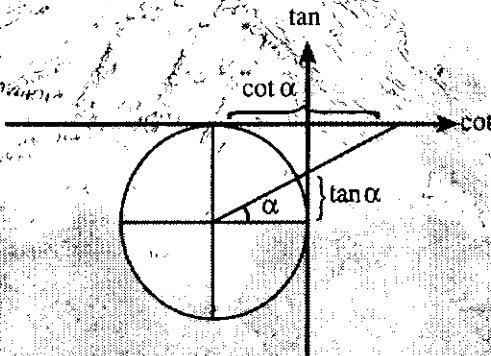




محمد هاشم رستمی



معادله های مثلثاتی



اشاره: در شماره قبل حل معادله های مثلثاتی $\text{tg} X = \text{tg} \alpha$ و $\text{cot} X = \text{cot} \alpha$ را ملاحظه کردید، اینک در ادامه مطلب مثال هایی را درباره این نوع معادله های مثلثاتی می آوریم.

حل: گزینه ۱ درست است؛ زیرا داریم:

$$\text{cot} g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \text{cot} g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2 + \sqrt{3} = \text{cot} g \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$$

آزمون ۳. جواب های معادله $\text{tg} 3x = \text{cot} g\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$ کدام اند؟

$$x = \frac{1}{8}\left(k\pi + \frac{\pi}{3}\right) \quad (2) \quad x = \frac{1}{4}\left(k\pi + \frac{\pi}{3}\right) \quad (1)$$

$$x = \frac{1}{8}\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right) \quad (4) \quad x = \frac{1}{4}\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right) \quad (3)$$

کنکور سراسری

حل: گزینه ۴ درست است؛ زیرا داریم:

آزمون ۱. جواب کلی معادله $3\text{tg} 3x - \sqrt{3} = 0$ کدام است؟

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (2) \quad k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$3k\pi + \frac{\pi}{18} \quad (4) \quad \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \quad (3)$$

حل: گزینه ۳ درست است؛ زیرا داریم:

$$3\text{tg} 3x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 3\text{tg} 3x = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg} 3x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg} \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$$

آزمون ۲. جواب کلی معادله $\text{cot} g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 2 - \sqrt{3} = 0$ کدام است؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (4) \quad k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (3)$$

راه دوم: جواب های کلی معادله و سپس جواب های خصوصی آن در محدوده جواب های داده شده در گزینه ها را به دست می آوریم. داریم:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)-1=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=1=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2x}{3}=k\pi+\frac{5\pi}{12}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3k\pi}{2}+\frac{5\pi}{8}$$

$$\begin{array}{c|c} k & x \\ \hline -1 & -\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi}{8}=\frac{-7\pi}{8} \end{array} \quad \text{جواب}$$

آزمون ۶. کدام مقدار جواب معادله $3 \cot g\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$ نیست؟

$$-\frac{11}{12} \quad (2) \qquad \frac{13}{12} \quad (1)$$

$$\frac{5}{12} \quad (4) \qquad \frac{25}{12} \quad (3)$$

حل: گزینه ۴ جواب است.

راه اول: عدددهای داده شده در گزینه ها را در معادله قرار می دهیم تا مقداری از x که در معادله صدق نمی کند، مشخص شود.

$$x = \frac{13}{12} \xrightarrow{\text{در معادله}} 3 \cot g\left(\frac{13\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow 3 \cot g \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$x = \frac{-11}{12} \xrightarrow{\text{در معادله}} 3 \cot g\left(\frac{-11\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow 3 \cot g\left(\frac{-2\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow -3 \cot g \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow -3\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$x = \frac{25}{12} \xrightarrow{\text{در معادله}} 3 \cot g\left(\frac{25\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow 3 \cot g\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$\operatorname{tg} 4x = \cot g\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - 4x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)$$

$$\Rightarrow 4x = k\pi + \left(\frac{\pi}{6} - 4x\right) \Rightarrow 8x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{8}\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

آزمون ۴. جواب های معادله $-\cot g\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg}(\pi - x)$

کدام اند؟

$$k\pi \quad (2) \qquad \frac{k\pi}{4} \quad (1)$$

$$(2k+1)\frac{\pi}{4} \quad (4) \qquad (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (3)$$

کنکور سراسری

حل: گزینه ۲ درست است. داریم:

$$-\cot g\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg}(\pi - x) \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x \Rightarrow 2 \operatorname{tg} x = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

آزمون ۵. یک جواب معادله $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)-1=0$ کدام است؟

$$\frac{7\pi}{8} \quad (2) \qquad -\frac{7\pi}{8} \quad (1)$$

$$-\frac{7\pi}{4} \quad (4) \qquad \frac{7\pi}{4} \quad (3)$$

حل: گزینه ۱ درست است.

راه اول: عدددهای داده شده در گزینه ها را در معادله قرار

می دهیم. هر کدام در معادله صدق کند، جواب، آن است.

$$x = \frac{-7\pi}{8} \xrightarrow{\text{در معادله}} \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3} \times \frac{-7\pi}{8} - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Rightarrow -\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -(-1) - 1 = 0 \Rightarrow 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

بنابراین $x = \frac{-7\pi}{8}$ جواب معادله و گزینه (۱) درست

است. بنابراین نیازی به گذاشتن بقیه گزینه ها در معادله نیست.

$$\cot g\left(2x + \frac{\pi}{\lambda}\right) + 1 - \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cot g\left(2x + \frac{\pi}{\lambda}\right) = \sqrt{2} - 1 = \cot g \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{\pi}{\lambda} = k\pi + \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

k	x
0	0
1	$\frac{\pi}{2}$
2	π
3	$\frac{3\pi}{2}$
4	2π

جواب های خصوصی موجود در بازه $[0, \pi]$ عبارت اند

از: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$. بنابراین مجموع آن ها برابر است با:

$$0 + \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

آزمون ۸. اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\lg x = 2 - 3m$ باشد، حدود

m کدام است؟

$$\frac{1}{3} < m < 1 \quad (1) \quad 2 < m < 1 \quad (2)$$

$$-3 < m < -1 \quad (3) \quad \frac{1}{3} \leq m \leq 1 \quad (4)$$

حل: گزینه ۱ درست است؛ زیرا داریم:

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 < \lg x < 1 \Rightarrow -1 < 2 - 3m < 1$$

$$\Rightarrow -3 < -3m < -1 \Rightarrow \frac{1}{3} < m < 1$$

آزمون ۹. اگر $0 < \lg x < \sqrt{2}$ باشد، کدام گزینه می تواند حدود

x باشد؟

$$0 < x < \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \quad (3) \quad \frac{\pi}{3} < x < \pi \quad (4)$$

حل: گزینه ۱ درست

است. در بازه $[0, 2\pi]$

می دانیم که $0 = \lg 0 = \lg \pi$

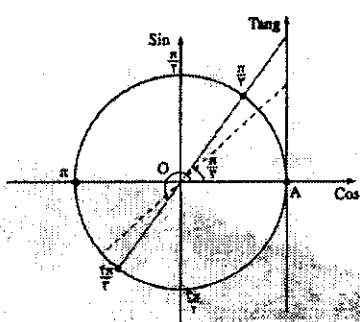
و $\sqrt{2} = \lg \frac{\pi}{3} = \lg \frac{4\pi}{3}$ است.

بنابراین با توجه به شکل،

حدود x می تواند به یکی از

صورت های زیر باشد:

$$0 < x < \frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad \pi < x < \frac{4\pi}{3}$$



$$2 \cot g \frac{\pi}{3} - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

چون سه عددهای داده شده در گزینه های (۱)، (۲) و (۳)

در معادله صدق کرده اند، بنابراین جواب معادله اند؛ پس

$x = \frac{5}{12}$ جواب معادله نیست، پس نیازی به قرار دادن این عدد

در معادله نیست.

راه دوم: معادله را حل می کنیم و جواب های خصوصی

آن در محدوده عددهای داده شده در گزینه ها را بررسی

می کنیم. داریم:

$$2 \cot g\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cot g\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cot g \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \pi x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = k$$

به طوری که دیده می شود، $x = \frac{5}{12}$ جزو جواب های

معادله نیست.

k	x
-1	$-\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{5}{4}$
2	$\frac{9}{4}$

پرسش: برای این تست، کدام راه حل ساده تر است؟

آزمون ۷. مجموع جواب های معادله $\cot g\left(2x + \frac{\pi}{\lambda}\right) + 1 - \sqrt{2} = 0$

در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$$\pi \quad (2) \quad \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$2\pi \quad (4) \quad \frac{3\pi}{2} \quad (3)$$

حل: گزینه ۳ درست است. جواب های کلی معادله و

سپس جواب های خصوصی موجود در بازه $[0, \pi]$ و آن گاه

مجموع آن ها را به دست می آوریم.

۲. جواب‌های کلی معادله‌های زیر را به دست آورید، سپس جواب‌های خصوصی هر معادله در بازه داده شده برای آن معادله را تعیین کنید.

الف) $3 \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \sqrt{3} = 0, [0, 2\pi]$

ب) $(2 + \sqrt{3}) \cot g 2x - 1 = 0, [-\pi, 0]$

پ) $(2 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} \left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} \right) - 1 = 0, [0, 4]$

ت) $(\sqrt{2} + 1) \cot g \left(2\pi x - \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0, \left[-\frac{1}{2}, 1 \right]$

ث) $\operatorname{tg} \left(\pi x + \frac{\pi}{6} \right) + \cot g \left(\frac{2\pi x}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = 0, [-2, 2]$

۳. معادله $3 \operatorname{tg} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - 3m + 2 = 0$ داده شده است.

الف. حدود m را چنان تعیین کنید که $-\frac{\pi}{24} < x < \frac{2\pi}{8}$

ب. مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله $x = \frac{13\pi}{24}$ باشد.

پ. مقدار m را چنان تعیین کنید که $\cot g x = -1$ باشد.

ت. به ازای $m = \frac{5}{3}$ معادله را حل کنید.

۴. معادله $\cot g \left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{3} \right) - m + 2 = 0$ داده شده است.

الف. حدود m را چنان بیابید که $-\frac{1}{6} < x < \frac{5}{6}$ باشد.

ب. مقدار m را چنان تعیین کنید که $x = 2$ ، یکی از جواب‌های این معادله باشد.

پ. به ازای $m = 3 + \sqrt{3}$ معادله را حل کنید.

۵. اگر $\operatorname{tg} x = 3m + 7$ و $\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{24}$ باشد، حدود m را تعیین کنید.

۶. اگر $-\sqrt{3} < \cot g \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، حدود x را در بازه $[0, 2\pi]$ تعیین کنید.

آزمون ۱۰. اگر $1 < \cot g \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) < 1$ باشد، کدام گزینه می‌تواند حدود x باشد؟

(۱) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

(۲) $\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$

(۳) $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$

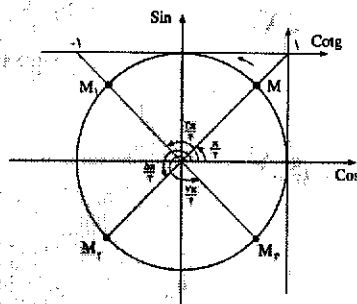
(۴) $\pi < x < 2\pi$

حل: گزینه ۴ درست است. در بازه $[0, 2\pi]$ داریم:

$1 = \cot g \frac{\pi}{4} = \cot g \frac{5\pi}{4}$ و $-1 = \cot g \frac{3\pi}{4} = \cot g \frac{7\pi}{4}$

بنابراین با فرض $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \alpha$ ، $1 < \cot g \alpha < 1$ و در نتیجه حدود α به یکی از صورت‌های زیر است:

$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$



با جایگذاری $\alpha = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$ خواهیم داشت:

$\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi \Rightarrow \pi < x < 2\pi$

$\frac{5\pi}{4} < \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \frac{x}{2} < 2\pi \Rightarrow 3\pi < x < 4\pi$

تمرین

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\operatorname{tg} 2x + \sqrt{3} = 0$

ب) $\cot g \frac{x}{4} - \sqrt{2} + 1 = 0$

پ) $(\sqrt{2} - 1) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - 1 = 0$

ت) $\cot g \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{3} = 0$

ث) $\operatorname{tg} \left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} \right) + \cot g \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = 0$

ج) $\cot g \left(\pi x + \frac{\pi}{12} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$