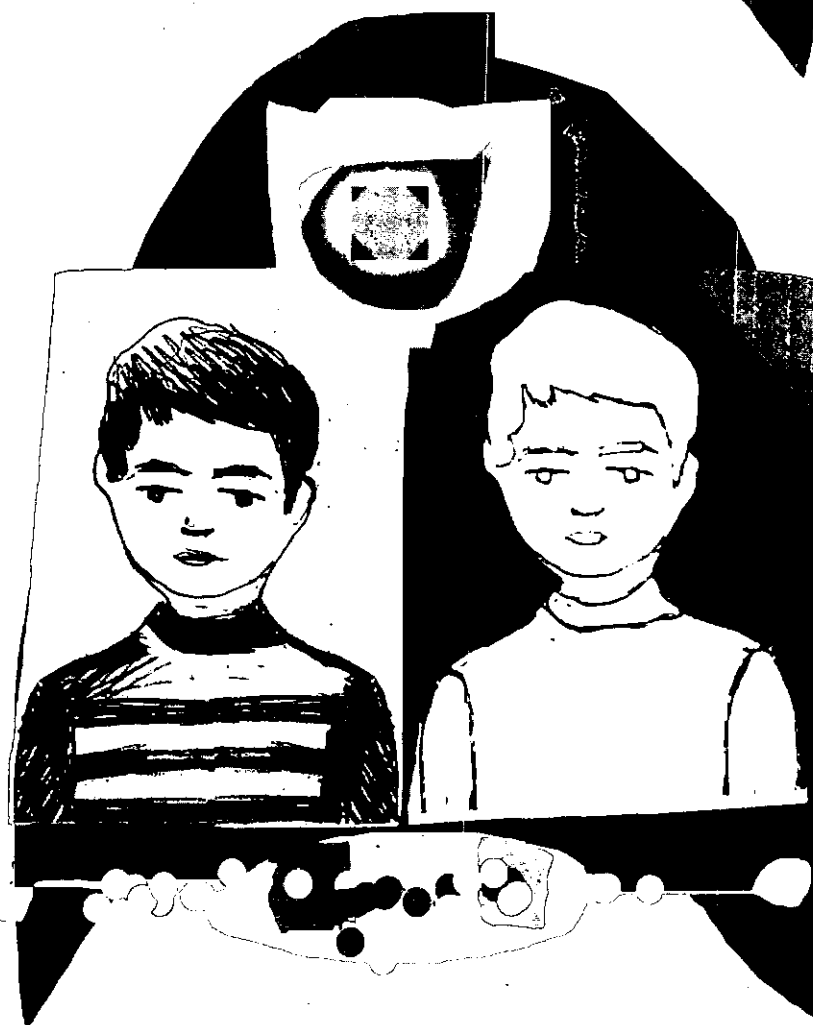




معادله‌های مثلثاتی



برای  
دانش آموزان  
سال دوم و سوم  
متوسطه

محمد هاشم رستمی

# حل معادله‌های غیر ساده مثلثاتی

اشاره

در شماره‌های قبل راجع به حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول بحث کردیم، اینک در ادامه راه حل‌های دیگر این گونه معادله‌ها را در پی می‌آوریم.

## راه دوم حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول

معادله‌ی کلاسیک نوع اول  $a \sin X + b \cos X = c$  را در نظر

می‌گیریم. می‌دانیم که  $\sin X = \frac{tg \frac{X}{2}}{1 + tg^2 \frac{X}{2}}$  و

$\cos X = \frac{1 - tg^2 \frac{X}{2}}{1 + tg^2 \frac{X}{2}}$  است. در معادله‌ی بالا، به جای  $\sin X$  و

$\cos X$  بر حسب  $tg \frac{X}{2}$  معادل‌های آن‌ها را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$a \left( \frac{tg \frac{X}{2}}{1 + tg^2 \frac{X}{2}} \right) + b \left( \frac{1 - tg^2 \frac{X}{2}}{1 + tg^2 \frac{X}{2}} \right) = c \Rightarrow \frac{a tg \frac{X}{2} + b(1 - tg^2 \frac{X}{2})}{1 + tg^2 \frac{X}{2}} = c$$

$$\Rightarrow a tg \frac{X}{2} + b(1 - tg^2 \frac{X}{2}) = c(1 + tg^2 \frac{X}{2})$$

$$\Rightarrow (c + b)tg^2 \frac{X}{2} - a tg \frac{X}{2} + c - b = 0 \quad (1)$$

به طوری که دیده می‌شود، معادله‌ی به دست آمده، یعنی معادله‌ی (۱)، معادله‌ای درجه‌ی دوم بر حسب  $tg \frac{X}{2}$  است

$$(c+b)\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2\operatorname{atg} x + c - b = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + 2\right)\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \times 1 \times \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\right)\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right)}}{\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2} = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 5\sqrt{2} - 7$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 5\sqrt{2} - 7 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \alpha \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + 2\alpha}$$

مثال ۲. معادله  $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2$  را حل کنید.  
حل: داریم:

$$a=1, b=\sqrt{3}, c=2, (c+b)\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{atg} x + c - b = 0$$

$$\Rightarrow (2+\sqrt{3})\operatorname{tg}^2 x - 2 \times 1 \times \operatorname{tg} x + 2 - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow (2+\sqrt{3})\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 2 - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{12}}$$

نکته: در این معادله  $a^2 + b^2 = c^2$  است، زیرا  $(1)^2 + (\sqrt{3})^2 = (2)^2$  یا  $4=4$  است.  
بنابراین، مشخص است که این معادله ریشه‌ی مضاعف دارد.

مثال ۳. معادله  $\sin 4x - \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2}$  را حل کنید.

که با حل آن، مقدار  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  و از روی آن، با حل معادله یا معادله‌های ساده‌ی مثلثاتی، مقدار  $x$  جواب معادله محاسبه می‌شود.

تبصره: اگر در معادله‌ی (۱)،  $c+b=0$  باشد، یکی از جواب‌های این معادله به  $\infty$  میل می‌کند و داریم:  
 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$   
پس در این حالت، این جواب را نیز باید جزو جواب‌های معادله منظور کنیم.

نکته‌ی ۱. شرط وجود جواب معادله‌ی کلاسیک نوع اول را با استفاده از معادله‌ی (۱) نیز می‌توان به دست آورد؛ زیرا معادله‌ی کلاسیک نوع اول وقتی جواب دارد که معادله‌ی (۱) جواب داشته باشد و این معادله نیز در صورتی دارای جواب است که مبین آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$\Delta' = b'^2 - ac \geq 0 \Rightarrow (a)^2 - (c+b)(c-b) \geq 0 \Rightarrow$$

$$a^2 - (c^2 - b^2) \geq 0 \Rightarrow a^2 - c^2 + b^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 \geq c^2}$$

و این همان شرطی است که قبلاً به دست آوردیم.  
نکته‌ی ۲. معمولاً وقتی از روش دوم حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول استفاده می‌کنیم که  $\frac{b}{a}$ ، تانژانت زاویه‌ی مشخصی نباشد و یا ضریب‌های  $a$ ،  $b$  و  $c$  یکی، یا همگی آن‌ها پارامتری باشند.

مثال ۱. معادله  $\sin x + 2 \cos x = \frac{3}{\sqrt{2}}$  را حل کنید.

حل: در این معادله  $a=1$ ،  $b=2$ ،  $c=\frac{3}{\sqrt{2}}$  و

$$a^2 + b^2 > c^2 \text{ است؛ زیرا } (1)^2 + (2)^2 > \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 \text{ یا } 5 > \frac{9}{2}$$

پس این معادله دو ریشه‌ی متمایز دارد. از آن‌جا خواهیم داشت:

مثال ۵. معادله ی  $(2m+3)\sin x + \cos x = m+4$  داده شده

حل : داریم :

است :

۱. حدود  $m$  را چنان تعیین کنید که این معادله دارای

جواب باشد.

۲. مقدار  $m$  را چنان تعیین کنید که یکی از جواب های این

معادله  $x = \frac{\pi}{3}$  باشد.

۳. مقدار  $m$  را چنان بیابید که  $\lg \frac{x}{y} \rightarrow \infty$

۴. مقدار  $m$  را چنان بیابید که  $\lg \frac{x}{y} = 2$  باشد.

حل : در این معادله ،  $a=2m+3$  ،  $b=1$  و  $c=m+4$  است و

داریم :  $a^2 + b^2 \geq c^2$

۱. شرط وجود جواب معادله :

$$\Rightarrow (2m+3)^2 + (1)^2 \geq (m+4)^2 \Rightarrow 3m^2 + 4m - 6 \geq 0$$

$$\Rightarrow 3m^2 + 4m - 6 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4+18}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{3}$$

| m               | $-\infty$ | $\frac{-2+\sqrt{22}}{3}$ | $\frac{-2-\sqrt{22}}{3}$ | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|--------------------------|--------------------------|-----------|
| $3m^2 + 4m - 6$ | +         | 0                        | -                        | +         |
| معادله          | ریشه دارد | ریشه ندارد               | ریشه دارد                | ریشه دارد |

پس به ازای  $m \geq \frac{-2+\sqrt{22}}{3}$  و  $m \leq \frac{-2-\sqrt{22}}{3}$  معادله

دارای جواب است.

۲. شرط آن که  $x = \frac{\pi}{3}$  ریشه ی این معادله باشد ، آن است

که در این معادله صدق کند ؛ یعنی داشته باشیم :

در معادله

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow (2m+3)\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = m+4$$

$$\Rightarrow (2m+3) \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = m+4 \Rightarrow (\sqrt{3}-1)m = \frac{7-3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{7-3\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)} = \frac{(7-3\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \Rightarrow \boxed{m = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$a=1, b=-\sqrt{2}, c=\sqrt{2}$$

$$(c+b)\operatorname{tg}^2 2x - 2\operatorname{atg} 2x + c - b = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{2})\operatorname{tg}^2 2x - 2 \times 1\operatorname{tg} 2x + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow$$

$$0 \times \operatorname{tg}^2 2x - 2\operatorname{tg} 2x + 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 2x \rightarrow \infty, -2\operatorname{tg} 2x + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \sqrt{2} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow 2x = k\pi + \alpha \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}}$$

نکته : در این معادله ، چون  $c+b = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$  است ،

از ابتدا می دانیم که  $\operatorname{tg} 2x \rightarrow \infty$  ؛ یعنی  $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$  و در

نتیجه :  $2x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  یا  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$  است ، و ریشه ی دیگر

معادله از  $0 = -2\operatorname{atg} 2x + c - b = 0$  ، یعنی از معادله ی

$$-2\operatorname{tg} 2x + 2\sqrt{2} = 0$$
 به دست می آید .

مثال ۴. معادله ی  $(m-1)\sin \frac{x}{y} + m \cos \frac{x}{y} = m-1$  را

حل کنید .

حل : داریم :

$$a=m-1, b=m, c=m-1, (c+b)\operatorname{tg}^2 \frac{x}{y} - 2\operatorname{atg} \frac{x}{y} + c - b = 0$$

$$\Rightarrow (m-1+m)\operatorname{tg}^2 \frac{x}{y} - 2(m-1)\operatorname{tg} \frac{x}{y} + m-1-m = 0$$

$$\Rightarrow (2m-1)\operatorname{tg}^2 \frac{x}{y} - 2(m-1)\operatorname{tg} \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{y} = \frac{(m-1) \pm \sqrt{(m-1)^2 + 1(2m-1)}}{2m-1} = \frac{m-1 \pm m}{2m-1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{y} = \frac{2m-1}{2m-1} = 1, \operatorname{tg} \frac{x}{y} = \frac{-1}{2m-1} = \frac{1}{1-2m}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{y} = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{y} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = 4k\pi + \pi}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{y} = \frac{1}{1-2m} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \frac{x}{y} = k\pi + \alpha \Rightarrow \boxed{x = 4k\pi + 4\alpha}$$

از این معادله، مقدار  $\cos X$  و از روی آن،  $X$  های جواب مسئله محاسبه می شوند.

**نکته ی مهم:** چون طرفین معادله ی  $a \sin X = -b \cos X + c$  را به توان ۲ رسانده ایم، پس حتماً باید جواب های به دست آمده برای  $X$  را در معادله ی اصلی، یعنی در معادله ی  $a \sin X + b \cos X = c$  امتحان کنیم، تا جواب های خارجی به دست آمده (در صورت وجود)، مشخص شوند. به مثال های زیر توجه کنید:

مثال ۱. معادله ی  $\sin x + 2 \cos x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$  را حل کنید.

حل: مقدارهای  $a=1$ ،  $b=2$  و  $c=\frac{3\sqrt{2}}{2}$  را در معادله ی زیر قرار می دهیم.

$$(a^2 + b^2) \cos^2 x - 2bc \cos x + c^2 - a^2 = 0$$

$$(1+4) \cos^2 x - 2 \times 2 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{9}{2} - 1 = 0$$

$$5 \cos^2 x - 6\sqrt{2} \cos x + \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{+3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 - \frac{35}{2}}}{5}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{+3\sqrt{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}}{5} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos x = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$$

| k | x                                      |
|---|----------------------------------------|
| ۰ | $+\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$       |
| ۱ | $2\pi + \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ |

در معادله

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow \sin \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

پس  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  جواب است.

۳. برای آن که  $\lg \frac{x}{y} \rightarrow \infty$  باید  $c+b=0$  باشد؛ یعنی داشته

باشیم:

$$(m+4)+1=0 \Rightarrow m+5=0 \Rightarrow \boxed{m=-5}$$

۴. معادله ی درجه ی دوم بر حسب  $\lg \frac{x}{y}$  را تشکیل

می دهیم. یک ریشه ی آن باید  $\lg \frac{x}{y} = 2$  باشد. داریم:

$$(c+b) \lg^2 \frac{x}{y} - 2a \lg \frac{x}{y} + c - b = 0 \Rightarrow$$

$$(m+4+1) \lg^2 \frac{x}{y} - 2(2m+3) \lg \frac{x}{y} + m+4-1=0$$

$$\Rightarrow (m+5) \lg^2 \frac{x}{y} - 2(2m+3) \lg \frac{x}{y} + m+3=0$$

در این معادله قرار می دهیم؛  $\lg \frac{x}{y} = 2$

$$(m+5)(2)^2 - 2(2m+3)(2) + m+3=0$$

$$4m+20-8m-12+m+3=0 \Rightarrow -3m=-11 \Rightarrow \boxed{m=\frac{11}{3}}$$

### راه سوم حل معادله ی کلاسیک نوع اول

در این روش، معادله ی کلاسیک نوع اول  $a \sin X + b \cos X = c$  را به معادله ای درجه ی دوم بر حسب  $\cos X$  (یا  $\sin X$ ) تبدیل می کنیم و با حل این معادله ی درجه ی دوم،  $\cos X$  (یا  $\sin X$ ) و با استفاده از آن، مقدار  $X$ ، جواب معادله ی داده شده را محاسبه می کنیم. برای این کار به صورت زیر عمل می کنیم:

$$a \sin X + b \cos X = c \Rightarrow a \sin X = -b \cos X + c$$

دو طرف این معادله را مجذور می کنیم. خواهیم داشت:

$$\Rightarrow (a \sin X)^2 = (-b \cos X + c)^2$$

$$\Rightarrow a^2 \sin^2 X = b^2 \cos^2 X + c^2 - 2bc \cos X$$

اما  $\sin^2 X = 1 - \cos^2 X$  است. پس داریم:

$$a^2(1 - \cos^2 X) = b^2 \cos^2 X + c^2 - 2bc \cos X$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2) \cos^2 X - 2bc \cos X + c^2 - a^2 = 0$$

در معادله

اکنون این جواب‌ها را در معادله قرار می‌دهیم تا جواب‌های خارجی، در صورت وجود، مشخص شوند.  
داریم:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{در معادله}} \sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) - \cos(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow 1 - 0 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow \text{جواب است } x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{در معادله}} \sin(2k\pi - \frac{\pi}{2}) - \cos(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(-\frac{\pi}{2}) - \cos(-\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow -1 - 0 = 1 \Rightarrow -1 = 1 \Rightarrow$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ جواب معادله نیست.}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{در معادله}} \sin(2k\pi + \pi) - \cos(2k\pi + \pi) = 1$$

$$\Rightarrow \sin \pi - \cos \pi = 1 \Rightarrow 0 - (-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ جواب است.}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که  $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$  نیز جواب است.

نکته: همانند مثال قبل، می‌توانستیم برای بررسی قابل

قبول بودن جواب‌های به دست آمده، جواب‌های خصوصی

موجود در بازه  $[0, 2\pi]$ ، یعنی  $x = \frac{\pi}{4}$  و  $x = \frac{3\pi}{4}$

را در معادله‌ی کلاسیک داده شده امتحان کنیم. اما در این

مثال، خواستیم نشان دهیم که می‌توانیم جواب‌های کلی به

دست آمده را نیز در معادله‌ی اصلی امتحان کنیم. بدیهی

است، استفاده از جواب‌های خصوصی، محاسبه را ساده‌تر

می‌کند.

$$x = -\frac{\pi}{4} \xrightarrow{\text{در معادله}} \sin(-\frac{\pi}{4}) + 2\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{+\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{جواب نیست } x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \frac{98}{100}} = \sqrt{\frac{2}{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{10}, \sin x = \frac{\sqrt{2}}{10} \xrightarrow{\text{در معادله}} \frac{\sqrt{2}}{10} + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{15\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{جواب است}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{10} = \cos \alpha \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \alpha}$$

نکته: همین جواب‌ها را در روش دوم حل معادله‌ی

کلاسیک نوع اول به دست آوردیم.

مثال ۲. معادله‌ی  $\sin 2x - \cos 2x = 1$  را حل کنید.

حل: در این معادله  $a=1$ ،  $b=-1$  و  $c=1$  است، بنابراین

برای حل این معادله می‌توانیم مانند مثال قبل عمل کنیم؛ یعنی

در معادله‌ی  $(a^2 + b^2) \cos^2 X - 2b \cos X + c^2 - a^2 = 0$

به جای  $a$ ،  $b$  و  $c$  مقدارهای بالا و به جای  $X$  مقدار  $2x$  را قرار

دهیم و معادله را حل کنیم. اما این معادله را به طور مستقیم به

صورت زیر حل می‌کنیم.

$$\sin 2x - \cos 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \sin^2 2x$$

$$= (1 + \cos 2x)^2$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 2x = 1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x \Rightarrow 2\cos^2 2x$$

$$+ 2\cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x (\cos 2x + 1) = 0 \Rightarrow 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$2x = 2k\pi \pm \pi \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, x = k\pi - \frac{\pi}{2}$$