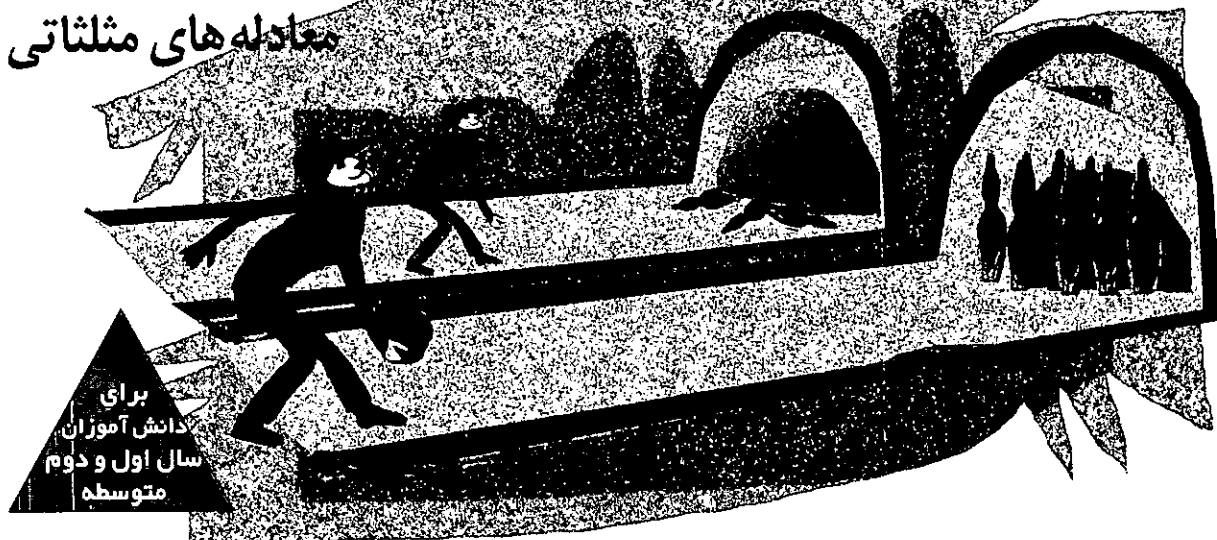




© محمد هاشم رستمی

معادله‌های مثلثاتی



حل معادله‌های کلاسیک مثلثاتی

اشاره

در شماره‌های قبل راجع به حل معادله‌های مثلثاتی بحث کردیم. اینک دومین دسته‌ی مهم از معادله‌های غیر ساده‌ی مثلثاتی، را بررسی می‌کنیم که صورت (فرم) مشخصی دارند و راه حل آن‌ها نیز مشخص است. این معادله‌ها که معادله‌های کلاسیک نام دارند، بر چهار نوع هستند که در این مقاله نوع اول آن‌ها را مطالعه می‌کنیم.

راه حل اول

۱. طرفین معادله را بر a ، یعنی بر ضریب $\sin X$ ، تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{a \sin X}{a} + \frac{b \cos X}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow \sin X + \frac{b}{a} \cos X = \frac{c}{a}$$

۲. فرض می‌کنیم $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$ باشد ($\frac{b}{a}$ هر عددی باشد،

همواره زاویه‌ای مانند α وجود دارد به قسمی که $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$).

در این صورت خواهیم داشت:

$$\sin X + \operatorname{tg} \alpha \cos X = \frac{c}{a}$$

۳. در معادله‌ی بالا به جای $\operatorname{tg} \alpha$ مقدار مساوی اش را قرار می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

معادله‌ی کلاسیک نوع اول

این معادله به صورت کلی $a \sin X + b \cos X = c$ است؛

یعنی معادله‌ای است درجه‌ی اول نسبت به سینوس و کسینوس

یک زاویه؛ مانند معادله‌های:

$$2 \sin x + \cos x = -1$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2$$

$$3 \sin(x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$$

$$\sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}$$

برای حل معادله‌ی کلاسیک نوع اول به یکی از راه‌های

ذیل عمل می‌کنیم:

اول آن است که داشته باشیم:

$$a^2 + b^2 \geq c^2 \text{ یا } a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$$

نکته: در صورتی که $a^2 + b^2 > c^2$ باشد، معادله دو جواب متمایز دارد و در صورتی که $a^2 + b^2 = c^2$ باشد، معادله دارای ریشه‌ی مضاعف است.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. معادله $3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3$ را حل کنید.

حل: در این معادله $a = 3$ ، $b = \sqrt{3}$ و $c = 3$ است و شرط $a^2 + b^2 > c^2$ برقرار است، زیرا $(3)^2 + (\sqrt{3})^2 > (3)^2$ یا $9 + 3 > 9$ است، پس این معادله دو جواب متمایز دارد. برای حل این معادله باروش ذکر شده، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱. دو طرف معادله را بر ۳، یعنی بر ضریب $\sin x$ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{3}{3} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x = \frac{3}{3} \Rightarrow \sin x + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos x = 1$$

۲. به جای $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ را قرار می‌دهیم، زیرا

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \text{ است. پس داریم:}$$

$$\sin x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \cos x = 1$$

۳. به جای $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ ، مقدار $\frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}}$ را قرار می‌دهیم:

$$\sin x + \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} \cos x = 1 \Rightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴. می‌دانیم که $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ است. پس خواهیم داشت:

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۲. معادله $\sqrt{3} \sin 4x - \cos 3x = 2$ را حل کنید.

$$\sin X + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos X = \frac{c}{a}$$

$$\sin X \cos \alpha + \cos X \sin \alpha = \frac{c}{a} \cos \alpha \quad \text{و یا:}$$

$$\sin(X + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha \quad \text{و از آنجا:}$$

$$۴. \text{ اگر } -1 \leq \frac{c}{a} \cos \alpha \leq +1 \text{ باشد، فرض می‌کنیم}$$

$$\frac{c}{a} \cos \alpha = \sin \varphi \text{ در این صورت خواهیم داشت:}$$

$$\sin(X + \alpha) = \sin \varphi$$

و این معادله، یک معادله‌ی ساده‌ی مثلثاتی است که

جواب‌های آن برابرند با:

$$\begin{cases} X + \alpha = 2k\pi + \varphi \\ X + \alpha = 2k\pi + \pi - \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi + \varphi - \alpha \\ X = 2k\pi + \pi - \varphi - \alpha \end{cases}$$

نکته‌ی ۱. در روش بالا می‌توانیم طرفین معادله را بر b ،

یعنی بر ضریب $\cos X$ ، تقسیم کنیم و سپس $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$ یا

$\frac{a}{b} = \cot \beta$ اختیار نماییم. در این صورت، نیز یک معادله‌ی

ساده‌ی مثلثاتی به دست خواهد آمد که با حل آن، جواب‌های معادله‌ی داده شده به دست می‌آید.

نکته‌ی ۲. در مرحله‌ی دوم راه حل اول، می‌توانیم

$\frac{b}{a} = \cot \alpha$ اختیار کنیم. در این صورت نیز یک معادله‌ی

ساده‌ی مثلثاتی به دست خواهد آمد که با حل آن، جواب‌های معادله‌ی داده شده محاسبه می‌شوند.

شرط جواب معادله‌ی کلاسیک نوع اول: همان‌طوری که

دیدیم معادله‌ی کلاسیک نوع اول در صورتی دارای جواب

است که داشته باشیم:

$$-1 \leq \frac{c}{a} \cos \alpha \leq +1$$

$$\frac{c^2}{a^2} \cos^2 \alpha \leq 1$$

یا:

$$\frac{c^2}{a^2} \leq \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} \leq 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$$

و یا:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \text{ است، پس باید داشته باشیم:}$$

$$\frac{c^2}{a^2} \leq 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow c^2 \leq a^2 + b^2 \text{ یا } a^2 + b^2 \geq c^2$$

بنابراین، شرط وجود جواب برای معادله‌ی کلاسیک نوع

$$(۴) \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(x - \frac{5\pi}{12}) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5\pi}{12} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x - \frac{5\pi}{12} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۴. معادله ی $(m-1)\sin \frac{x}{2} + 3\cos \frac{x}{2} = m+2$ داده شده است:

۱. حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله جواب داشته باشد.

۲. مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب های این معادله $x = \frac{\pi}{3}$ باشد.

حل:

۱. شرط وجود جواب معادله ی کلاسیک نوع اول $a \sin x + b \cos x = c$ آن است که $a^2 + b^2 \geq c^2$ باشد، در این معادله داریم:

$$a = m-1, \quad b = 3, \quad c = m+2$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$(m-1)^2 + (3)^2 \geq (m+2)^2 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 + 9 \geq m^2 + 4m + 4 \Rightarrow -6m + 6 \geq 0 \Rightarrow -6m \geq -6 \Rightarrow m \leq 1$$

پس معادله ی داده شده در صورتی دارای جواب است که $m \leq 1$ باشد.

۲. شرط آن که $x = \frac{\pi}{3}$ یکی از جواب های این معادله باشد، آن است که در این معادله صدق کند؛ یعنی باشیم:

$$\begin{aligned} (m-1)\sin \frac{\pi}{6} + 3\cos \frac{\pi}{6} &= m+2 \\ \Rightarrow (m-1)\sin \frac{\pi}{6} + 3\cos \frac{\pi}{6} &= m+2 \\ \Rightarrow (m-1) \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} &= m+2 \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}m &= \frac{5-3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = 3\sqrt{3}-5 \end{aligned}$$

مثال ۵. معادله ی $3m \sin x + (1-2m) \cos x = 3m-1$ داده شده است.

حل: در این معادله $a = \sqrt{3}$ ، $b = -1$ و $c = 2$ است و شرط $a^2 + b^2 = c^2$ زیرا داریم:

$$(\sqrt{3})^2 + (-1)^2 = (2)^2 \Rightarrow 3+1=4 \Rightarrow 4=4$$

بنابراین، معادله ریشه ی مضاعف دارد. برای حل این معادله به روش ارائه شده عمل می کنیم. داریم:

$$(۱) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \sin 4x - \frac{1}{\sqrt{3}} \cos 4x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin 4x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 4x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(۲) \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin 4x - \tan \frac{\pi}{6} \cos 4x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(۳) \sin 4x - \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} \cos 4x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin 4x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 4x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sin(4x - \frac{\pi}{6}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$(۴) 1 = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(4x - \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 4x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

مثال ۳. معادله ی $\sin(x - \frac{\pi}{6}) - \cos(x - \frac{\pi}{6}) = 1$ را حل

کنید.

حل: در این معادله $a = 1$ ، $b = -1$ ، $c = 1$ و $a^2 + b^2 = c^2$ زیرا: $(1)^2 + (-1)^2 = (1)^2$ یا $2 > 1$ است.

پس معادله دو جواب متمایز دارد. برای حل این معادله با استفاده از روش ارائه شده داریم:

$$(۱) \sin(x - \frac{\pi}{6}) - 1 \cos(x - \frac{\pi}{6}) = 1$$

$$(۲) 1 = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) - \tan \frac{\pi}{4} \cos(x - \frac{\pi}{6}) = 1$$

$$(۳) \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} \cos(x - \frac{\pi}{6}) = 1$$

$$\Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{6}) \cos \frac{\pi}{4} - \cos(x - \frac{\pi}{6}) \sin \frac{\pi}{4} = 1 \times \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \sin[(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{4}] = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x - \frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

از آن جا داریم :

$$x = \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{در معادله ی داده شده}} 3m \sin \frac{\pi}{6} + (1-2m) \cos \frac{\pi}{6} = 3m-1 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}m + (1-2m) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3m-1 \Rightarrow (\frac{3}{2} - \sqrt{3} - 3)m = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow (-\frac{3}{2} - \sqrt{3})m = (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow$$

$$m = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3} = \frac{(2 + \sqrt{3})(2\sqrt{3} - 3)}{(2\sqrt{3} + 3)(2\sqrt{3} - 3)} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} \xrightarrow{\text{در معادله ی داده شده}} 3m \sin \frac{5\pi}{6} + (1-2m) \cos \frac{5\pi}{6} = 3m-1$$

$$\Rightarrow 3m \times \frac{1}{2} + (1-2m)(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3m-1$$

$$\Rightarrow (\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2})m = \frac{\sqrt{3}-2}{2} \Rightarrow m = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

۳. مقدار $m=1$ را در معادله قرار می دهیم . داریم :

$$m=1 \xrightarrow{\text{در معادله}} 3 \sin x - \cos x = 2 \Rightarrow \sin x - \frac{1}{3} \cos x = \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x - \operatorname{tg} \alpha \cos x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin x - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos x = \frac{2}{3}$$

$$\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha = \frac{2}{3} \cos \alpha \Rightarrow \sin(x - \alpha) = \frac{2}{3} \cos \alpha,$$

$$\sin(x - \alpha) = \frac{2}{3} \cos \alpha = \sin \varphi \Rightarrow x - \alpha = 2k\pi + \varphi$$

$$\text{و } x - \alpha = 2k\pi + \pi - \varphi \Rightarrow x = 2k\pi + \varphi + \alpha$$

$$x = 2k\pi + \pi + \alpha - \varphi$$

نکته : چون $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ است ، $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ و در نتیجه

داریم :

$$\frac{2}{3} \cos \alpha = \frac{2}{3} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1$$

$$\frac{\sqrt{10}}{5} = \sin \varphi \text{ بنابراین، زاویه ای مانند } \varphi \text{ وجود دارد که}$$

باشد .

به صورت دیگر می توان گفت ، چون $|\cos \alpha| \leq 1$ است ،

پس $|\cos \alpha| \leq \frac{2}{3}$ می باشد . بنابراین تساوی

$$\frac{2}{3} \cos \alpha = \sin \varphi \text{ درست است .}$$

۱. حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله ریشه داشته

باشد .

۲. مقدار m را چنان بیابید که ریشه های معادله ی

$$2 \sin x = 1$$

۳. به ازای $m=1$ ، معادله را حل کنید .

حل :

۱. در این معادله ، $a = 3m$ ، $b = 1-2m$ و

$c = 3m-1$ است . شرط وجود جواب معادله ی کلاسیک

نوع اول را می نویسیم . داریم :

$$a^2 + b^2 \geq c^2 \Rightarrow (3m)^2 + (1-2m)^2 \geq (3m-1)^2$$

$$\Rightarrow 9m^2 + 1 + 4m^2 - 4m \geq 9m^2 + 1 - 6m \Rightarrow 4m^2 + 2m \geq 0$$

پس باید $4m^2 + 2m$ را تعیین علامت کنیم . داریم :

$$4m^2 + 2m = 0 \Rightarrow 2m(2m+1) = 0 \Rightarrow 2m = 0$$

$$\Rightarrow m = 0 \text{ و } 2m+1=0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$4m^2 + 2m$	+	0	-	+
	$\downarrow$ $\frac{3}{2}$	$\downarrow$ $\frac{1}{2}$	$\downarrow$ $\frac{1}{2}$	$\downarrow$ $\frac{3}{2}$

۲. جواب های کلی معادله ی $2 \sin x = 1$ یا جواب های

خصوصی موجود در بازه $[0, 2\pi]$ از این معادله ، باید در

معادله ی داده شده صدق کند . پس نخست جواب های

معادله ی $2 \sin x = 1$ را به دست می آوریم . داریم :

$$2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \text{جواب های کلی معادله}$$

k	x
0	$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$
1	$2\pi + \frac{\pi}{6} > 2\pi, 2\pi + \frac{5\pi}{6} > 2\pi$