

عدد حقیقی با ۱، مساوی صفر می‌شود؟ یعنی یک عدد حقیقی بگویید که با ۱ جمع شده و حاصل مساوی صفر شود. پاسخ ساده است: $x = -1$ ؛ زیرا می‌دانیم: $1 + (-1) = 0$.

اکنون می‌توانیم حل مثال اول را نیز انجام دهیم: اگر $2x$ را یک مجهول در نظر بگیریم، با همین روش نتیجه می‌شود: $-1 = 2x$ ، حال باید به این سؤال پاسخ دهیم: دو برابر کدام عدد حقیقی، مساوی -1 است؟ این نیز با قدری فکر به دست می‌آید:

$$x = -\frac{1}{2} \quad (\text{زیرا می‌دانیم } (-\frac{1}{2}) \times 2 = -1).$$

حال می‌خواهیم معادله $ax + b = 0$ را در حالت کلی حل کنیم؛ بدیهی است که در این معادله، a و b اعدادی حقیقی بوده و $a \neq 0$ می‌باشد. اگر ax را به عنوان یک مجهول در نظر بگیریم، باید به این سؤال پاسخ دهیم: کدام عدد حقیقی به اضافه b ، مساوی صفر می‌شود؟ با کمی جست‌وجو و توجه به برابری $0 = b + (-b)$ نتیجه می‌شود که $ax = -b$. اکنون برای یافتن x باید به این سؤال پاسخ دهیم: حاصل ضرب کدام عدد حقیقی در a ، می‌شود $-b$ ، که این نیز با توجه به تساوی $a(-\frac{b}{a}) = -b$ ، نتیجه می‌دهد: $x = -\frac{b}{a}$ ؛ بنابراین جواب معادله $ax + b = 0$ برابر است با $x = -\frac{b}{a}$. مثلاً

جواب معادله $2x + 3 = 0$ می‌شود: $x = -\frac{3}{2}$. اکنون یک نوع بیان سنتی برای رسیدن به جواب معادله را به کار می‌بریم: همان‌طور که دیدیم از تساوی $ax + b = 0$ به تساوی $ax = -b$ رسیدیم. در این جا می‌گوییم، b را به طرف دوم تساوی می‌بریم و با این کار، علامت آن عوض می‌شود. پس از این، قرارداد می‌کنیم که هر عبارت جبری یا عدد حقیقی که از یک طرف معادله، به طرف دیگر آن برود، علامت آن قرینه بشود. حال از تساوی $ax = -b$ نتیجه گرفتیم که: $x = -\frac{b}{a}$ ، یعنی عدد ثابت را بر ضریب مجهول (a)

تقسیم کردیم و مجهول x را پیدا کردیم. پس از این نیز همین کار را می‌کنیم: یعنی هروقت به تساوی $ax = k$ رسیدیم، بلافاصله می‌نویسیم $x = \frac{k}{a}$. مثلاً از تساوی $2x = 5$ ، نتیجه می‌شود: $x = \frac{5}{2}$ یا از تساوی $3x = -6$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$\text{مثال: حل معادله } 3x + 7 - 5x = 4 + 2x.$$

حل: همه مجهولها را به سمت راست و همه عددها (معلومها) را به سمت چپ تساوی می‌بریم (این کار اختیاری است و می‌توانستیم بعکس عمل کنیم): $7 - 4 = 2x + 5x - 3x$ چون $-5x$ و $3x$ و عدد ۴ تغییر مکان داده‌اند، پس تغییر علامت داده‌اند؛ ولی $2x$ و ۷ تغییر علامت نداده‌اند؛ زیرا تغییر مکان نداشته‌اند. اکنون از جمع جبری عبارتهای سمت راست و چپ تساوی، نتیجه می‌شود:

$$\boxed{x = \frac{3}{4}}$$

و براساس دستور گفته شده:

$$\text{مثال: حل معادله } 4y - 14 = -2y + 2 - y + 5.$$

حل: به همان روش عمل می‌کنیم (به ترتیب اعمال زیر دقت کنید):

$$4y + 2y + y = 14 + 2 + 5$$

$$\Rightarrow 7y = 21 \Rightarrow y = \frac{21}{7} = 3 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

تمرین: اکنون شما نیز با همین روش، هریک از معادله‌های زیر را حل نموده و مجهول معادله را به دست آورید:

$$1) 4x + 3x - 11 = 2x - 1$$

$$2) 5t - 2t - 1 = 3t + t - 3$$

$$3) 5y - 2 = 4y - 3$$

حال، معادله را قدری پیچیده‌تر کنیم.

$$\text{مثال: معادله } \frac{4x-1}{3} = \frac{x+1}{4} \text{ را حل کنید.}$$

حل: به کمک خاصیت «طرفین - وسطین» نمودن تناسبها که

می‌گوید از تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ برای $ad = bc$ نتیجه می‌شود

$$\Rightarrow 50x - 33x = 9 - 10 \Rightarrow 17x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{17}$$

مثال: معادله $\frac{2t+1}{3} - \frac{t-1}{2} + 1 = \frac{t}{2} + t$ را حل کنید.

حل: به ترتیب می توان نوشت:

$$\frac{2(2t+1) - 3(t-1) + 6}{6} = \frac{t+2t}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4t+2-3t+3+6}{3} = \frac{3t}{1} \Rightarrow \frac{t+11}{3} = \frac{3t}{1}$$

$$\Rightarrow t+11=9t$$

$$\Rightarrow 11=9t-t \Rightarrow 11=8t \Rightarrow \boxed{t=\frac{11}{8}}$$

مثال: حل معادله

$$\frac{7z+1}{4} - \frac{2z-3}{2} - \frac{z-1}{3} = \frac{5z}{2} - \frac{3z-1}{5} - 1$$

حل:

$$\frac{3(7z+1) - 6(2z-3) - 4(z-1)}{12}$$

$$= \frac{20z - 2(3z-1) - 10}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{21z+3-12z+18-4z+4}{6} = \frac{20z-6z+2-10}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{9z+25}{6} = \frac{14z-8}{5} \Rightarrow 5(9z+25) = 6(14z-8)$$

$$\Rightarrow 45z+125=84z-48$$

$$\Rightarrow 45z-84z=-125-48$$

$$\Rightarrow -39z=-173 \Rightarrow z=\frac{173}{39}$$

تمرین: هریک از معادله های زیر را حل کنید.

$$1) \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x+1}{5} - 1$$

$$2) \frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{2} = \frac{x-1}{3} - \frac{x-1}{2}$$

$$3) \frac{3x-1}{2} - \frac{5x-1}{5} = \frac{x+1}{4} + \frac{x-1}{3} - x$$

$$4) \frac{4y+1}{3} - \frac{2-y}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{5y+1}{2} - 1$$

$$5) \frac{2m+4}{3} - \frac{m-1}{5} - m-1 = \frac{3m-4}{2} - \frac{m-1}{6} + 1$$

می توان معادله حاصل را به صورت زیر $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc\right)$

تغییر داد:

$$\frac{4x-1}{3} = \frac{x+1}{4} \Rightarrow 4(4x-1) = 3(x+1)$$

حال با ضرب ضرایب ۳ و ۴ در پرانتزها به دست می آید:

$$16x-4=3x+3$$

و این، معادله ای از همان نوع قبل می باشد که بسادگی حل می شود:

$$16x-3x=4+3 \Rightarrow 13x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{13}$$

مثال: حل معادله درجه اول: $\frac{3x-2}{5} = \frac{2x+1}{3}$

حل: به همان روش، بترتیب می نویسیم:

$$3(3x-2) = 5(2x+1) \Rightarrow 9x-6=10x+5$$

$$\Rightarrow 9x-10x=6+5 \Rightarrow -x=11 \Rightarrow \boxed{x=-11}$$

تمرین: هریک از معادله های زیر را حل کنید.

$$1) \frac{4x-1}{3} = \frac{2x+5}{2}$$

$$2) \frac{5x+1}{2} = \frac{3x-1}{4}$$

$$3) \frac{x+1}{7} = \frac{4x-1}{3}$$

$$4) \frac{2t+3}{3} = \frac{3t+2}{2}$$

$$5) \frac{7y-1}{6} = \frac{6y-1}{7}$$

اکنون مسأله را قدری جلوتر می بریم.

مثال: حل معادله $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{3} = \frac{3x-1}{4} - \frac{x-2}{5}$

حل: ابتدا با جمع و تفریق کسره های دو طرف تساوی، هر طرف را به یک کسر تبدیل می کنیم (در دو طرف، با مخرج مشترک گیری، عمل جمع یا تفریق را انجام می دهیم):

$$\frac{3(x+1)+2(x-1)}{6} = \frac{5(3x-1)-4(x-2)}{20}$$

حال، اعمال جبری را در صورت های دو کسر انجام داده و مخرج دو کسر را نیز به عدد ۲۰ ساده می کنیم:

$$\frac{3x+3+2x-2}{3} = \frac{15x-5-4x+8}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{5x+1}{3} = \frac{11x+3}{10}$$

حال مسأله ما به مسأله ای مشابه حالت پیش تبدیل می شود:

$$10(5x+1) = 3(11x+3) \Rightarrow 50x+10 = 33x+9$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

بنابراین، دامنه معادله $D = \mathbb{R} - \{1, -1\}$ می باشد، یعنی ریشه معادله، نباید مساوی یکی از این دو مقدار باشد. اکنون با جمع کسره های سمت چپ تساوی، حل معادله را آغاز می کنیم:

$$\frac{(x+1)^2 + (x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 1} = 2$$

اکنون با طرفین - وسطین کردن، تناسب بالا به دست می آید:

$$2x^2 - x + 3 = 2x^2 - 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 2x^2 = -2 - 3$$

$$\Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$$

جواب به دست آمده در دامنه معادله صدق نموده، لذا قابل قبول است.

تمرین: دامنه هریک از معادله های زیر را به دست آورده و سپس معادله را حل کنید و درستی جواب را براساس دامنه، تحقیق کنید.

$$1) \frac{4x-1}{3x+1} = \frac{4x+1}{3x-1} \quad 2) \frac{5x+2}{x-1} = \frac{5x+3}{x+1}$$

$$3) \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-1}{2x-1} = \frac{1}{2} \quad 4) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x+2}$$

معادله غیر ممکن و معادله مبهم

هرگاه پس از ساده کردن یک معادله، برای حل آن، مجهول معادله حذف شده و یک تساوی نادرست عددی حاصل شود، معادله مزبور را معادله ای غیر ممکن می نامیم. معادله غیر ممکن، ریشه حقیقی ندارد.

مثال: معادله $\frac{x+2}{3} + \frac{x-2}{2} = \frac{5x+1}{6}$ را حل کنید.

حل: مطابق روشهای گفته شده، طرفین تساوی را ساده کنیم:

$$\frac{2(x+2) + 3(x-2)}{6} = \frac{5x+1}{6}$$

اکنون به معادله هایی می پردازیم که در آنها عبارتهای درجه دوم و بیشتر ظاهر می شوند: ولی با حذف آنها معادله ای درجه اول به دست می آید.

مثال: ریشه های معادله $\frac{x+3}{x+2} = \frac{3x-1}{3x-2}$ را به دست آورید.

حل: از طرفین - وسطین کردن این تناسب، به تساوی زیر می رسم:

$$(x+3)(3x-2) = (x+2)(3x-1)$$

و از ضرب پراثرها در یکدیگر، به برابری زیر می رسم:

$$3x^2 - 2x + 9x - 6 = 3x^2 - x + 6x - 2$$

اکنون اگر همه عبارتهای شامل مجهول x را به یک طرف و عددهای معلوم را به طرف دیگر ببریم، تساوی به این صورت تغییر می کند:

$$3x^2 - 2x + 9x - 3x^2 + x - 6x = -2 + 6$$

در اینجا عبارت درجه دوم $3x^2$ با $-3x^2$ حذف شده و یک معادله درجه اول به دست می آید: $2x = 4$ که از حل آن نتیجه می شود:

$$\boxed{x=2}$$

البته در حل این گونه معادله ها که x در مخرج کسرها قرار دارد، باید دقت نمود که ریشه معادله، مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نکند و در این جا چنین نیست؛ زیرا ریشه های مخرج کسرها به صورت زیر به دست می آیند:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2, 3x-2=0 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

که هیچ یک مساوی ۲ نمی باشند. در حقیقت، در معادله هایی که مجهول معادله در مخرج هریک از کسرها باشد، ابتدا باید ریشه مخرج همه کسرها را به دست آورد و این ریشه ها را از مجموعه اعداد حقیقی کم کرد، مجموعه حاصل را دامنه معادله می نامیم:

مثلاً در معادله اخیر دامنه معادله، مجموعه $D = \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{2}{3}\right\}$ می باشد.

مثال: دامنه معادله $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = 2$ را به دست آورده و

سپس معادله را حل کنید.

حل: از صفر قرار دادن مخرج کسرها جوابهای زیر به دست می آیند:

$$a(x+a)=b(x+b) \Rightarrow ax+a^2=bx+b^2$$

و با بردن عبارتهای مجهول و معلوم به یک طرف، نتیجه می شود:

$$ax-bx=b^2-a^2$$

و اگر در سمت چپ، از x فاکتور بگیریم:

$$x(a-b)=b^2-a^2 \Rightarrow x=\frac{b^2-a^2}{a-b}$$

و به این ترتیب، x برحسب a و b به دست می آید. حال با فرض

$a \neq b$ (که با این فرض، مقدار مخرج کسر، مخالف صفر بوده و

کسر تعریف شده می باشد) می توان مقدار x را ساده تر نمود:

$$x=\frac{b^2-a^2}{a-b}=\frac{-(a^2-b^2)}{a-b}=\frac{-(a-b)(a+b)}{(a-b)}$$

$$=-(a+b) \Rightarrow x=-(a+b)$$

با یک مثال دیگر از این نوع، موضوع روشن تر می شود.

مثال: از تساوی $b^2(b-a)=c^2(c-a)+a(b-c)$ مقدار

a را برحسب b و c به دست آورید.

حل: با ملاحظه این برابری، واضح است که معادله فوق،

برحسب مجهول a ، از درجه اول می باشد. برای حل آن مانند مثال

قبل، پس از ضرب و ساده کردن پرانتزها، همه عبارتهای شامل

مجهول a را به یک طرف معادله برده و سایر عبارتها را به طرف

دیگر آن می بریم و a را به دست می آوریم:

$$b^2-b^2a=c^2-c^2a+ab-ac \Rightarrow$$

$$b^2-c^2=b^2a-c^2a+ab-ac \Rightarrow$$

$$b^2-c^2=a(b^2-c^2+b-c) \Rightarrow a=\frac{b^2-c^2}{b^2-c^2+b-c}$$

با تجزیه عبارتهای صورت و مخرج کسر، می توان مقدار a را

ساده تر نمود:

$$a=\frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)}{(b-c)(b+c)+(b-c)}=\frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)}{(b-c)(b+c+1)}$$

$$\Rightarrow a=\frac{b^2+bc+c^2}{b+c+1} \quad (b \neq c) \text{ با شرط}$$

و این مقدار a را برحسب b و c به ما می دهد.

مثال: از تساوی $a^2+ab=ac+bc+1$ مقادیر b و c را

برحسب سایر مجهولها به دست آورید.

حل: یک بار b را مجهول اصلی فرض نموده و آن را برحسب

سایر عبارتها به دست می آوریم:

$$\Rightarrow \frac{2x+4+3x-6}{6}=\frac{5x+1}{6}$$

$$\Rightarrow 5x-2=5x+1 \Rightarrow 5x-5x=2+1 \Rightarrow 0=3$$

که برابری آخر نادرست می باشد، لذا معادله اولیه غیر ممکن است

و هیچ عدد حقیقی x ، در تساوی فوق صدق نمی کند. حال اگر

پس از ساده شدن طرفین معادله، x حذف شده و یک تساوی

درست حاصل شود، معادله مزبور را معادله مبهم گوئیم. معادله

مبهم دارای بی شمار ریشه حقیقی است.

مثال: معادله $\frac{x+2}{5}-\frac{x-1}{2}=1-\frac{3x+1}{10}$ را حل کنید.

حل: پس از ساده کردن طرفین تساوی، نتیجه می شود:

$$\frac{2(x+2)-5(x-1)}{10}=\frac{10-(3x+1)}{10}$$

$$\Rightarrow 2x+4-5x+5=10-3x-1$$

$$\Rightarrow 2x-5x+3x=10-1-4-5 \Rightarrow 0=0$$

و تساوی آخر صحیح می باشد. و از آن جا نتیجه می شود معادله

فوق یک معادله مبهم بوده و بی شمار ریشه حقیقی دارد. به عبارت

دیگر، تساوی فوق به ازای هر عدد حقیقی x برقرار می باشد:

یعنی برابری $\frac{x+2}{5}-\frac{x-1}{2}=1-\frac{3x+1}{10}$ یک اتحاد جبری

می باشد.

معادله های حرفی

معادله های حرفی، معادله هایی می باشند که معلومهای معادله،

عدد حقیقی نمی باشند و به صورت حرفی می باشند. مانند معادله

$\frac{x+a}{b}=\frac{x+b}{a}$ که در آن x مجهول معادله بوده و a و b دو

مقدار معلوم می باشند، برای حل این گونه معادله ها به همان ترتیبی

عمل می کنیم که در مورد معادله های عددی دیدیم: یعنی همه

عبارتهای شامل مجهول معادله را به یک طرف تساوی و سایر

عبارتها را به طرف دیگر معادله می بریم. سپس از مجهول معادله

فاکتور می گیریم. آن گاه مجهول معادله برابر می شود با مجموع

عبارتهای معلوم تقسیم بر ضریب مجهول. برای شروع، حل

معادله ای را که مثال زده شد، انجام می دهیم:

$$\frac{x+a}{b}=\frac{x+b}{a}$$

با طرفین - وسطین کردن تناسب بالا به تساوی زیر می رسم:

تمرین: در هریک از معادله‌های حرفی زیر، متغیر خواسته شده را برحسب سایر مجهولها به دست آورید:

$$۱) a^2(x-1) - b^2(x+1) + 2ab = 0 \quad (x = ?)$$

$$۲) x^2(y-x) + xy + y + 1 = 0 \quad (y = ?)$$

$$۳) a^2b + c^2 - b + 1 = b + c \quad (b = ?)$$

$$۴) (a+b)(a+x) = (b+x)(b-a) \quad (x = ?)$$

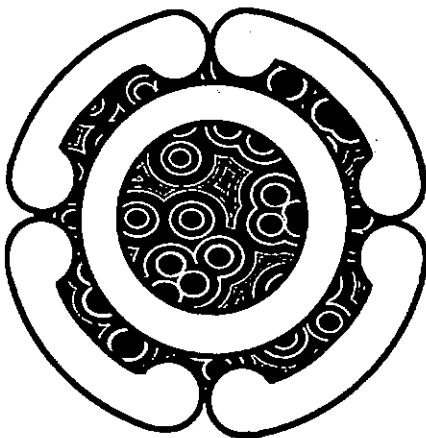
$$۵) \frac{x+n}{m} + \frac{x+m}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \quad (x = ?)$$

تمرین: به هر جسم با جرم m که بر دایره‌ای به شعاع r و با سرعت V دوران کند، نیرویی معادل F وارد می‌شود؛ به قسمی که: $F = \frac{mV^2}{r}$. از این دستور، مقدار شعاع دایره (r) را برحسب سایر متغیرها به دست آورید.

تمرین: دو بار الکتریکی با اندازه‌های q_1 و q_2 که به فاصله r از یکدیگر قرار داشته باشند، نیرویی به اندازه F به یکدیگر وارد می‌کند؛ به طوری که:

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2}$$

که در این دستور، k مقدار ثابتی می‌باشد. برای محاسبه این مقدار ثابت، دو بار معلوم q_1 و q_2 را در فاصله معین r از یکدیگر قرار داده و نیروی بین آنها (F) را اندازه گرفته‌ایم. مقدار k را برحسب F و r ، q_1 ، q_2 به دست آورید.



$$ab - bc = ac - a^2 + 1 \Rightarrow b(a-c) = ac - a^2 + 1$$

$$\Rightarrow b = \frac{ac - a^2 + 1}{a - c}$$

و یک بار دیگر، c را مجهول اصلی فرض نموده و آن را برحسب a و b به دست می‌آوریم:

$$a^2 + ab - 1 = ac + bc \Rightarrow a^2 + ab - 1 = c(a+b)$$

$$\Rightarrow c = \frac{a^2 + ab - 1}{a + b}$$

در انتهای این بخش، یادآور می‌شویم که حل معادله‌های حرفی و به دست آوردن هریک از مجهولها در یک تساوی، برحسب سایر مجهولها، کاربردهای زیادی در سایر علوم و بخصوص در محاسبه‌های مربوط به فیزیک و الکترونیک دارد. در این جا به چند نمونه توجه می‌کنیم.

مثال: قانون حرکت متحرکی که با حرکت شتابدار، طی مسیر می‌کند، به صورت $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t$ بیان می‌شود که در این تساوی، a شتاب حرکت، t زمان و V_0 سرعت اولیه می‌باشد و از آن جا x مسافت طی شده به دست می‌آید. از این تساوی، مقدار شتاب حرکت را برحسب زمان حرکت، سرعت اولیه و مسافت به دست آورید.

حل: به ترتیب می‌توان نوشت:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t \Rightarrow x - V_0t = \frac{1}{2}at^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{x - V_0t}{\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow a = \frac{2x - 2V_0t}{t^2}$$

مثال: ظرفیت یک خازن مسطح، از دستور $C = \epsilon_0 \frac{kA}{d}$

به دست می‌آید.

که در این دستور، C ظرفیت خازن، k عددی ثابت به نام ثابت دی الکتریک، ϵ_0 نیز یک عدد ثابت بوده و A مسافت صفحات خازن و d فاصله دو صفحه از یکدیگر می‌باشد. از این دستور، مقدار ثابت دی الکتریک را برحسب سایر متغیرها و مقادیر ثابت به دست آورید.

حل: بسادگی می‌توان نوشت:

$$C = \frac{\epsilon_0 kA}{d} \Rightarrow \epsilon_0 kA = C.d \Rightarrow k = \frac{C.d}{\epsilon_0 A}$$