

معادله درجه سوم و حل آن

● احمد قندهاری و مهدی قمصری

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad \begin{array}{l} x-1 \\ x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1, 2, 3}$$

۲- اگر در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ، $a + c = b + d$ ، آنگاه معادله بر $(x + 1)$ بخش پذیر است.

اثبات:

$$a + c = b + d \Rightarrow d = a + c - b$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + a + c - b = 0$$

$$\Rightarrow a(x^3 + 1) + b(x^2 - 1) + c(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a(x + 1)(x^2 - x + 1) + b(x - 1)(x + 1) + c(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a - b + c) = 0$$

مثال: معادله $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ را حل کنید.

چون در این معادله $a + c = b + d$ ، پس معادله بر $(x + 1)$ بخش پذیر است. معادله را بر $(x + 1)$ تقسیم می کنیم تا تجزیه شود.

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 \quad \begin{array}{l} x+1 \\ x^2 - 7x + 12 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x^2 - 7x + 12) = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1, 3, 4}$$

معادله درجه سوم: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

بخش اول:

حل معادله درجه سوم: روشهایی کلی، برای حل معادله درجه سوم وجود دارد که به علت مفصل بودن فرمولهای آن عملاً از آنها استفاده نمی شود. اینک حل معادله درجه سوم را در حالت های زیر بررسی می کنیم:

۱- اگر در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ مجموع ضرایب صفر باشد، آن معادله بر $(x - 1)$ بخش پذیر است.

اثبات:

$$\Rightarrow a + b + c + d = 0 \quad \text{مجموع ضرایب معادله صفر است.}$$

$$\Rightarrow d = -a - b - c$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx - a - b - c = 0$$

$$\Rightarrow a(x^3 - 1) + b(x^2 - 1) + c(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow a(x - 1)(x^2 + x + 1) + b(x - 1)(x + 1) + c(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(ax^2 + (a + b)x + (a + b + c)) = 0$$

مثال: معادله $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ را حل کنید.

حل: چون مجموع ضرایب صفر است، معادله بر $(x - 1)$ بخش پذیر است. معادله را بر $(x - 1)$ تقسیم می کنیم تا تجزیه شود:

۲- به کمک فاکتورگیری از راه دسته‌بندی بعضی از معادله‌های درجه سوم قابل حل‌اند.

مثال: معادله $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ را حل کنید.

حل:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x - 3) - 4(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3, \pm 2}$$

۴- اگر $x = \lambda$ یکی از ریشه‌های معادله درجه سوم

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باشد، آنگاه معادله بر $(x - \lambda)$ بخش پذیر است.

اثبات:

فرض می‌کنیم $x = \lambda$ یکی از ریشه‌های معادله

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باشد، پس می‌توان نوشت:

$$(۲): a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$$

دو معادله (۱) و (۲) را نظیر به نظیر از هم کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow a(x^3 - \lambda^3) + b(x^2 - \lambda^2) + c(x - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow a(x - \lambda)(x^2 + \lambda x + \lambda^2) + b(x - \lambda)(x + \lambda)$$

$$+ c(x - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (x - \lambda)(ax^2 + (a\lambda + b)x + a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

مثال: اگر $x = 2$ ، یکی از ریشه‌های معادله

$$x^3 + mx^2 - 2x + 4 = 0$$
 باشد، معادله را حل کنید:

حل:

$$x = 2 \Rightarrow 8 + 4m - 4 + 4 = 0 \Rightarrow m = -2$$

$$\Rightarrow x^3 + mx^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 4 \quad \left| \begin{array}{l} x - 2 \\ x^2 - 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2, \pm\sqrt{2}}$$

۵- اگر ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

عضو (Z) باشند، عدد ثابت معادله بر هریک از ریشه‌ها بخش پذیر است. به عبارت دیگر، ریشه‌های معادله عضو مجموعه مقسوم علیه‌های جبری عدد ثابت معادله‌اند.

اثبات:

اگر ریشه‌های حقیقی معادله درجه سوم

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ را x_1 و x_2 و x_3 بنامیم، بعداً خواهیم

$$\text{دید که } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

چون x_1 و x_2 و x_3 عضو (Z) می‌باشند چون: $a = 1$ پس

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -d$ بنابراین عدد (d) بر هریک از عددهای x_1 و x_2 و x_3

بخش پذیر است. بنابراین x_1 و x_2 و x_3 عضو مجموعه مقسوم علیه‌های

جبری عدد (d) می‌باشند.

مثال: اگر ریشه‌های معادله $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$

عضو (Z) باشند، معادله را حل کنید.

حل: عدد ثابت معادله (20) است و مجموعه مقسوم علیه‌های جبری

آن عبارت است از: $\{ \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20 \}$

مسلماً (1) یا (-1) نمی‌تواند یکی از ریشه‌های این معادله باشد

زیرا نه مجموع ضرایب صفر است و نه $a + c = b + d$ ، پس از

$x = 2$ شروع می‌کنیم به جایگذاری در معادله:

$$x = 2 \Rightarrow 8 - 20 - 8 + 20 = 0$$

پس $x = 2$ یکی از ریشه‌های این معادله است.

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)(16x^2 - 52x + 30) = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}$$

توجه: قواعد فوق در معادله درجه (n) ام نیز صادق است. به علت طولانی شدن مطلب، قواعد فوق در معادله درجه سوم بررسی شده است.

$$7- \text{داریم: } (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

اگر معادله ای درجه سوم دارای جمله هایی نظیر:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2$$

باشد به کمک اتحاد فوق قابل حل است.

مثال: معادله $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$ را حل کنید.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3 \Rightarrow (x - 1)^3 = 3 \Rightarrow$$

$$x - 1 = \sqrt[3]{3} \Rightarrow x = 1 + \sqrt[3]{3}$$

بخش دوم:

بحث در تعداد و علامت ریشه های معادله درجه سوم.

برای بحث در تعداد و علامت ریشه های معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ باید معادله را به فرم معادله قابل بحث $X^3 + pX + q = 0$ تبدیل کرد.

برای پیدا کردن تبدیل مورد نیاز x را به $X + k$ تبدیل می کنیم:

$$\Rightarrow a(X+k)^3 + b(X+k)^2 + c(X+k) + d = 0$$

$$\Rightarrow aX^3 + (3ak+b)X^2 + (3ak^2+2bk+c)X$$

$$+ (k^3 + bk^2 + ck + d) = 0$$

برای این که، این معادله به معادله قابل بحث تبدیل شود لازم است

ضریب X^2 را مساوی صفر قرار دهیم.

$$\Rightarrow 3ak + b = 0 \Rightarrow k = -\frac{b}{3a}$$

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \quad \left| \begin{array}{l} x-2 \\ x^2-3x-10 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2-3x-10) = 0 \Rightarrow x = 2, -2, 5$$

۶- اگر ریشه های معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

به صورت کسرهایی گویا به فرم $\frac{p}{q}$ باشد $p, q \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه

عدد d را می شمارد و q عدد a را می شمارد. به عبارت دیگر، عدد

عضو مجموعه مقسوم علیه های جبری عدد ثابت (d) است و q عضو

مجموعه مقسوم علیه های جبری عدد (a) خواهد بود.

اثبات:

اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه های حقیقی معادله

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

باشد، بعداً خواهیم دید که

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

نظیر $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \frac{p''}{q''}$ باشند داریم: $\frac{pp'p''}{qq'q''} = -\frac{d}{a}$ بنابراین

d بر p و p' و p'' و a بر q و q' و q'' بخش پذیر خواهد بود.

مثال: اگر ریشه های معادله $16x^3 - 60x^2 + 56x - 15 = 0$

به صورت کسرهایی گویا مانند: $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$) باشند، معادله فوق را حل کنید:

حل:

$$x_1 = \frac{p}{q} \Rightarrow \begin{cases} p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\} \\ q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\} \end{cases}$$

با بررسی مختصری، یکی از ریشه های معادله $(x = \frac{1}{4})$ پیدا می شود که برای حل، معادله را بر $(x - \frac{1}{4})$ تقسیم می کنیم.

$$16x^3 - 60x^2 + 56x - 15 \quad \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{4} \\ 16x^2 - 52x + 30 \end{array} \right.$$

داریم:

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{4p^2 + 27q^2}{27}$$

(صفحه ۱۵۸ کتاب جبر و آنالیز سطر ۱۴)

عبارت $4p^2 + 27q^2$ را Δ دلتا می‌نامیم، پس:

$$\Delta = 27y_1 \cdot y_2$$

نتایج بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $X^2 + pX + q = 0$.

۱) $p > 0$ یا $\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله یک ریشه حقیقی ساده دارد.

۲) $\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله سه ریشه حقیقی ساده دارد.

۳) $\Delta = 0 \Rightarrow$

معادله یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشه حقیقی مضاعف دارد.

علامت ریشه‌ها

در هر حالتی علامت یکی از ریشه‌ها مخالف علامت q است. و

علامت بقیه ریشه‌ها در صورت وجود موافق علامت q است.

تذکره: در حالتی که $\Delta = 0$ معادله $X^2 + pX + q = 0$

یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشه حقیقی مضاعف دارد، ریشه

مضاعف برابر با: $\sqrt[2]{\frac{q}{2}}$ و ریشه ساده برابر است با: $-\sqrt[2]{\frac{q}{2}} - 2$

اثبات: فرض می‌کنیم معادله درجه سوم $X^2 + pX + q = 0$

دارای ریشه مضاعف (α) و ریشه ساده (β) باشد.

پس می‌توان نوشت:

$$x^2 + px + q \equiv (x - \alpha)^2 (x - \beta)$$

$$\Rightarrow x^2 + px + q \equiv x^2 - (2\alpha + \beta)x^2 +$$

$$(2\alpha\beta + \alpha^2)x - \alpha^2\beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha\beta + \alpha^2 = p \\ -\alpha^2\beta = q \end{cases}$$

از این جا نتیجه می‌شود که اگر در معادله $ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$

x را به $(X - \frac{b}{2a})$ تبدیل کنیم معادله، به معادله قابل بحث $X^2 + pX + q = 0$ تبدیل می‌شود.

مثال: معادله $x^2 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$ را به معادله قابل

بحث تبدیل کنید.

$$x \rightarrow X - \frac{b}{2a} = X - \frac{6}{2} = X - 2$$

$$\Rightarrow (X - 2)^2 + 6(X - 2) + 9(X - 2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow X^2 - 3X - 1 = 0$$

تذکره: چنانچه معادله درجه سوم به صورت

$ax^2 + bx^2 + d = 0$ باشد، برای تبدیل آن به معادله قابل بحث

کافی است.

$$x \rightarrow \frac{1}{X}$$

مثال: معادله $2x^2 - 6x^2 + 1 = 0$ را به معادله قابل

بحث تبدیل کنید:

$$x \rightarrow \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{2}{X^2} - \frac{6}{X^2} + 1 = 0 \Rightarrow X^2 - 6X + 2 = 0$$

سؤال: چرا باید برای بحث معادله درجه سوم، آن را به فرم

$X^2 + pX + q = 0$ تبدیل کرد؟

جواب: چون منحنی به معادله $y = X^2 + pX + q$ بسادگی

قابل رسم است.

اگر تابع به معادله $y = X^2 + pX + q$ را در حالت‌های مختلف

بررسی کنیم به نتایج زیر می‌رسیم (اثبات کامل، در کتاب جبر و آنالیز

سال چهارم فصل ۶ آمده است):

توجه: در حالتی که منحنی تابع $y = X^2 + pX + q$ ، یک

Max و یک Min دارد و y_1 و y_2 عرضهای نقاط اکسترم باشد

$$\Delta = 4p^2 + 2vq^2 = -4(2v) + 2v(m+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m = 0, -4$$

$$q = m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$$

m	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
Δ	+	•	-	-	•	+
q	-	-	•	+	+	+
نتیجه	$0 < x_1$	$x_1 < x_r < 0 < x_r$	$x_1 < 0 < x_r < x_r$		$x_1 < 0$	
		①	②	③		

$$1) \begin{cases} \Delta = 0 \\ q < 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_r < 0 < x_r$$

$$2) q = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow -3x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3) \begin{cases} \Delta = 0 \\ q > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 < 0 < x_r = x_r$$

مسئله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^2 - 3x^2 + (m-1) = 0$ بحث کنید:

$$x \rightarrow \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{1}{X^2} - \frac{3}{X^2} + m - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{3}{m-1}X + \frac{1}{m-1} = 0$$

$$\Delta = 4p^2 + 2vq^2 = -4 \times \frac{2v}{(m-1)^2} + 2v \times \frac{1}{(m-1)^2}$$

$$= \frac{2v(m-5)}{(m-1)^2} = 0 \Rightarrow m = 5$$

$$= 0 \Rightarrow m = 1$$

$$q = \frac{1}{m-1} = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

$$\beta = -2\alpha, -\alpha^2\beta = q \Rightarrow 2\alpha^2 = q \Rightarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{q}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{q}{2}}}$$

$$\beta = -2\alpha \Rightarrow \boxed{\beta = -2\sqrt{\frac{q}{2}}}$$

مسئله: در تعداد ریشه‌های معادله

$x^3 - 6x^2 + 9x + (m-4) = 0$ به ازای مقادیر مختلف m بحث کنید.

$$x \rightarrow X - \frac{b}{3a} = X - \frac{-6}{3} = X + 2$$

$$(X+2)^3 - 6(X+2)^2 + 9(X+2) + m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow X^3 - 3X + (m-2) = 0$$

$$\Delta = 4p^2 + 2vq^2 = 4(-2v) + 2v(m-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0, 4$$

m	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
Δ	+	•	-	•	+
نتیجه	یک ریشه حقیقی ساده		سه ریشه حقیقی ساده	یک ریشه حقیقی ساده	

$$1) \Delta = 0 \Rightarrow$$

معادله یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشه حقیقی مضاعف دارد.

$$2) \Delta = 0 \Rightarrow$$

معادله یک ریشه حقیقی ساده و یک ریشه حقیقی مضاعف دارد.

مسئله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $(m+2)x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ بحث کنید.

$$x \rightarrow \frac{1}{X} \Rightarrow \frac{m+2}{X^3} - \frac{3}{X^2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow X^3 - 3X + (m+2) = 0$$

مسأله: ثابت کنید منحنی تابع به معادله
 $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$
 دارای سه نقطه عطف است.

$$y' = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-2(-x^2+2x+2)}{(x^2+x+1)^3}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x^2 - 3x^2 - 6x - 1 = 0 \quad (I)$$

$$x \rightarrow x - \frac{b}{ra} = x - \frac{-3}{3} = x + 1$$

$$\Rightarrow (X+1)^2 - 3(X+1)^2 - 6(X+1) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$X^2 - 9X - 9 = 0 \quad (II)$$

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4(-9)^2 + 27(-9)^2 = -729$$

پس معادله (II) و معادله (I) سه ریشه حقیقی ساده دارد. اگر ریشه‌ها را x_1 و x_2 و x_3 بنامیم: $x_1 < x_2 < x_3$ و چون y'' به ازای ریشه‌های ساده تغییر علامت می‌دهد، پس تابع فوق سه نقطه عطف دارد.

بخش سوم:

روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله درجه سوم

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله درجه سوم فوق باشد، می‌توان نوشت:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 +$$

$$(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

m	$-\infty$	۱	۵	$+\infty$
Δ	+	-	۰	+
q	-	+	+	+
نتیجه	$0 < x_1$	$x_1 < 0 < x_2 < x_3$	$x_1 < 0$	

در معادله

$$۱) m = 1 \Rightarrow x^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} \Delta = 0 \\ q > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 < 0 < x_2 = x_3$$

مسأله: به ازای مقادیر مختلف m در تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^3 - 2(m-2)x + 2(m-2) = 0$ بحث کنید.

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = -4 \times 27(m-2)^2 + 27 \times$$

$$4(m-2)^2 = 0$$

$$\Delta = -108(m-2)^2(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$$

$$q = 2(m-2) = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

m	$-\infty$	۲	۳	$+\infty$
Δ	+	۰	+	-
q	-	۰	+	+
نتیجه	$0 < x_1$	$x_1 < 0$	$x_1 < 0 < x_2 = x_3$	

در معادله

$$۱: m = 2 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$۲: \begin{cases} \Delta = 0 \\ q > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 < 0 < x_2 = x_3$$

تذکره:

$$\Rightarrow \frac{-\gamma^2 + 1}{\gamma} = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = \pm 1}$$

اگر $\gamma = 1 \Rightarrow 1 + m + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -4}$

$$\Rightarrow x^2 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x \rightarrow \frac{1}{X} \Rightarrow X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 27\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{256}{27} + \frac{27}{9} = -\frac{175}{27} < 0$$

پس: $m = -4$ قابل قبول است. و معادله سه ریشه حقیقی α ، β و γ می تواند داشته باشد.

اگر $\gamma = -1 \Rightarrow -1 + m + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{m = -2}$

$$\Rightarrow x^2 - 2x^2 + 3 = 0 \quad x \rightarrow \frac{1}{X} \Rightarrow X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{1}{3} = 0$$

$$\Delta = 4p^2 + 27q^2 = 4\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 27\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{49}{27} > 0$$

پس در ازای $m = -2$ معادله یک ریشه حقیقی دارد پس $m = -2$ قابل قبول نیست.

مسئله ۴: در معادله $x^2 - 9x^2 + (m-1)x - 15 = 0$ اگر α و β و γ ریشه های حقیقی معادله باشند و داشته باشیم: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 35$ ، m را بیابید.

حل:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 9$$

طرفین تساوی را به توان (۲) می رسانیم.

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 81$$

$$35 + 2\left(\frac{c}{a}\right) = 81 \Rightarrow 35 + 2(m-1) = 81$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 23}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d}}$$

مسئله ۱: اگر ریشه های معادله $x^2 - 9x^2 + mx - 15 = 0$ تصاعد عددی بسازند، m را بیابید.

حل: ریشه ها تصاعد عددی می سازند و α و β و γ ریشه های حقیقی معادله

$$\Rightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow 3\beta = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow 3\beta = 9 \Rightarrow \boxed{\beta = 3}$$

در معادله قرار می دهیم $\beta = 3 \rightarrow 27 - 81 + 3m - 15 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 23}$

مسئله ۲: اگر ریشه های معادله $x^2 - 7x^2 + (m-1)x - 8 = 0$ تصاعد هندسی بسازند، m را بیابید.

حل: اگر α و β و γ ریشه های حقیقی معادله باشند و تصاعد هندسی بسازند:

$$\beta^2 = \alpha\gamma \Rightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -\frac{d}{a} = 8 \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$$

$$\beta = 2 \rightarrow 8 - 28 + 2m - 2 - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 15}$$

مسئله ۳: اگر ریشه های حقیقی معادله $x^2 + mx^2 + 3 = 0$ α و β و γ باشد، m قابل قبول را طوری بیابید تا رابطه $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -\gamma$ برقرار باشد.

حل:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d} \Rightarrow -\gamma + \frac{1}{\gamma} = 0$$

تذکره: اتحاد اولر:

$$\text{اگر } \begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=3abc$$

مسئله ۵: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله

$$x^3 - 5x^2 + m - 1 = 0$$

باشد، m را چنان بیابید تا داشته باشیم:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = -\frac{3}{2}$$

حل:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d} = 0$$

$$\text{بنابراین اتحاد اولر: } \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 3 \left(\frac{1}{\alpha\beta\gamma} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} = 3 \left(\frac{1}{-\frac{d}{a}} \right) \Rightarrow -\frac{3}{2} = -3 \left(\frac{1}{m-1} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{m=3}$$

مسئله ۶: در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله باشد و

$$k = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta}$$
 مقدار k را بیابید.

حل:

$$k+3 = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + 1 + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + 1 + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + 1$$

$$k+3 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta}$$

$$(1) = (\alpha+\beta+\gamma) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)$$

$$\Rightarrow k+3 = -\frac{b}{a} \left(-\frac{c}{d} \right) \Rightarrow k+3 = \frac{bc}{ad}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{bc}{ad} = -3}$$

مسئله ۷: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله

$$M = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} \text{ باشد حاصل عبارت } x^3 + px + q = 0$$

را بیابید.

حل:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha\beta\gamma$$

$$M = \frac{\alpha^2}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\gamma^2}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha\beta\gamma} \\ = \frac{3(\alpha\beta\gamma)}{\alpha\beta\gamma} \Rightarrow \boxed{3=M}$$

مسئله ۸: اگر در معادله $x^3 - 8x^2 + 17x + m = 0$ α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله باشد و داشته باشیم

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 134$$
 مقدار m را بیابید.

حل:

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 8$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 64$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\left(\frac{c}{d}\right) = 64$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(17) = 64$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 30$$

$$(\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5) - 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$+ (m - 2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$$

$$(-15) - 9(2 - m) + (m - 2) \times 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 3}$$

مسئله ۱۰: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 24 \quad x^2 - 3x + m = 0 \text{ باشد و داشته باشیم:}$$

مقدار m را بیابید.

حل: ابتدا معادله درجه سوم جدیدی تشکیل می‌دهیم که

ریشه‌هایش α^2 ، β^2 و γ^2 باشد.

$$\begin{cases} x: & \text{ریشه معادله مفروض} \\ y: & \text{ریشه معادله جدید} \end{cases}$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt[2]{y} \quad \text{در معادله مفروض قرار می‌دهیم:}$$

$$y - 3\sqrt[2]{y} + m = 0 \Rightarrow y + m = 3\sqrt[2]{y}$$

$$y^2 + 3my^2 + 3m^2y + m^2 = 27y$$

$$y^2 + 3my^2 + (3m^2 - 27)y + m^2 = 0$$

ریشه‌های این معادله $y_1 = \alpha^2$ و $y_2 = \beta^2$ و $y_3 = \gamma^2$ است.

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = -\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} =$$

$$\frac{27 - 3m^2}{m^2} = 24$$

$$\frac{9 - m^2}{m^2} = \frac{8}{1} \Rightarrow 8m^2 + m^2 - 9 = 0 \quad \text{مجموع ضرایب صفر است.}$$

$$8m^2 + m^2 - 9 \quad \frac{m - 1}{8m^2 + 9m + 9}$$

در معادله به جای x یکبار α و یکبار β و یکبار γ را قرار می‌دهیم:

$$x^2 - 3x^2 + 17x + m = 0$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - 3\alpha^2 + 17\alpha + m = 0 \\ \beta^2 - 3\beta^2 + 17\beta + m = 0 \\ \gamma^2 - 3\gamma^2 + 17\gamma + m = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$+ 17(\alpha + \beta + \gamma) + 3m = 0$$

$$134 - 3(30) + 17(8) + 3m = 0 \Rightarrow \boxed{m = -10}$$

مسئله ۹: اگر α و β و γ ریشه‌های حقیقی معادله

$$x^2 - 3x + (m - 2) = 0 \text{ باشد و داشته باشیم:}$$

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = -15$$

مقدار m را بیابید.

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$$

$$3(\alpha\beta\gamma) = 3\left(-\frac{d}{a}\right) = 3(2 - m)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$$

طرفین معادله را در x^2 ضرب می‌کنیم:

$$x^5 - 3x^2 + (m - 2)x^2 = 0$$

در معادله به جای x یکبار α و یکبار β و یکبار γ را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} \alpha^5 - 3\alpha^2 + (m - 2)\alpha^2 = 0 \\ \beta^5 - 3\beta^2 + (m - 2)\beta^2 = 0 \\ \gamma^5 - 3\gamma^2 + (m - 2)\gamma^2 = 0 \end{cases}$$

k	α	$x = \operatorname{tg} \alpha$
۰	$\frac{\pi}{9}$	$x_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$
۱	$\frac{4\pi}{9}$	$x_2 = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9}$
۲	$\frac{7\pi}{9}$	$x_3 = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{9}$
۳	$\frac{10\pi}{9}$	$x_4 = \operatorname{tg} \frac{10\pi}{9} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$

در نتیجه معادله جبری فوق سه ریشه حقیقی متمایز دارد.

$$x_2 = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9}, \quad x_3 = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{9}, \quad x_4 = \operatorname{tg} \frac{10\pi}{9}$$

$$x_3 = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{9} = \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{2\pi}{9} \right) = -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 3\sqrt{3}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 27$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\left(\frac{c}{a} = -3\right) = 27$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 33$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{9} + \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{9} + \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{9} = 33$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{9} = \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{9} = 3$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{9} + \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{9} + \operatorname{tg}^2 \frac{7\pi}{9} + \operatorname{tg}^2 \frac{10\pi}{9} = 36$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 20^\circ + \operatorname{tg}^2 40^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{tg}^2 80^\circ = 36$$

حل معادله درجه سوم

هرگاه در معادله درجه سوم $x^3 + px + q = 0$ داشته باشیم

$$\Rightarrow \Delta m^2 + m^2 - 9 = (m-1)(\Delta m^2 + 9m + 9) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{m=1}, \quad \Delta m^2 + 9m + 9 = 0 \quad \Delta < 0$$

مسئله ۱۱: دستگاه مقابل را حل کنید:

$$\begin{cases} 8 + 4x + 2y + Z = 0 \\ 27 + 9x + 3y + Z = 0 \\ 64 + 16x + 4y + Z = 0 \end{cases}$$

حل: معادله درجه سوم $t^3 + xt^2 + yt + Z = 0$ را در نظر

می‌گیریم. اگر α و β و γ ریشه‌های این معادله باشد با توجه به معادلات دستگاه $\gamma = 4$ و $\beta = 3$ ، $\alpha = 2$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -x \Rightarrow 2 + 3 + 4 = -x \Rightarrow \boxed{x = -9}$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} = y \Rightarrow 6 + 8 + 12 = y \Rightarrow \boxed{y = 26}$$

$$\alpha.\beta.\gamma = -\frac{d}{a} = -Z \Rightarrow 2 \times 3 \times 4 = -Z \Rightarrow \boxed{Z = -24}$$

مسئله ۱۲: معادله درجه سوم $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$

را در نظر بگیرید ثابت کنید:

$$\operatorname{tg}^2 20^\circ + \operatorname{tg}^2 40^\circ + \operatorname{tg}^2 60^\circ + \operatorname{tg}^2 80^\circ = 36$$

حل:

$$x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}(1 - 3x^2) = 3x - x^3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$$

$$x = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \operatorname{tg} 3\alpha$$

$$3\alpha = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{q}{r}} \quad \text{ریشه مضاعف}$$

$$\Delta = 0 \quad x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{r}} \quad x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{r}} \quad \text{خلاصه}$$

حل معادله در حالت $\Delta < 0$

فرض می‌کنیم $x = r \cos \theta$ باشد که برای تعیین x باید r و θ را پیدا کرد ($r > 0$).

$$x^3 + px + q = 0 \Rightarrow r^3 \cos^3 \theta + pr \cos \theta + q = 0$$

$$\Rightarrow \cos^3 \theta + \frac{p}{r^2} \cos \theta + \frac{q}{r^3} = 0 \quad (1)$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \Rightarrow \cos 3\theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0$$

می‌دانیم که (2)

از مقایسه رابطه‌های ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{p}{r^2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow r = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

$$\frac{q}{r^3} = -\frac{\cos 3\theta}{4} \Rightarrow \cos 3\theta = -\frac{4q}{r^3}$$

هرگاه $\Delta < 0$ اختیار شود θ متناظر آن فرق می‌کند چون $\cos 3\theta$ به r هم بستگی دارد.

از معادله $\cos 3\theta = \frac{-4q}{r^3}$ سه مقدار متمایز برای $\cos \theta$ به دست می‌آید زیرا $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{r} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{r} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}}$$

$\Delta = 4p^3 + 27q^2 > 0$ ، در این صورت $x = u + v$ اختیار کرده در معادله قرار می‌دهیم:

$$1) (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v) = 0$$

و چون x را مجموع دو مجهول u و v اختیار کرده‌ایم می‌توانیم بین u و v رابطه دلخواهی اختیار کرده و آن را با معادله ۱ به منزله دو معادله دو مجهولی در نظر گرفته و u و v را پیدا کنیم و با هم جمع کنیم تا x به دست آید (روش گاردان):

$$\begin{cases} 3uv + p = 0 \\ u^3 + v^3 + q = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 v^3 = \frac{-p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

حاصل ضرب مجموع

معادله درجه دومی که یک ریشه آن u^3 و یک ریشه آن v^3 است

$$Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$u^3, v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{108}}$$

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{108}}} \quad \text{دستورگاردان}$$

هرگاه $\Delta = 0$ باشد خواهیم داشت:

این ریشه ساده معادله است زیرا علامت آن مخالف علامت q است. و چون

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow -2\sqrt[3]{\frac{q}{r}} + 2x = 0$$

حال اگر $f(a+h)$ را نزدیک به صفر فرض کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{-f(a)}{h} \approx f'(a), \quad \boxed{h \approx -\frac{f(a)}{f'(a)}}$$

به همین ترتیب وقتی $a+h$ پیدا شد می توان ریشه بهتری برای معادله به دست آورد.

مثال: به فرض آن که $x=2$ یک ریشه تقریبی معادله $x^2-2=0$ فرض شود ریشه بهتری برای این معادله پیدا کنید:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x \\ f(2) = 2, f'(2) = 4 \\ a=2 \quad a+h = 2 - \frac{2}{4} = 1/2 \end{cases}$$

دقت کنید:

$$f(2) = 2^2 - 2 = 2 \quad \text{چقدر به صفر دور است}$$

$$f(1/2) = 1/2^2 - 2 = 0.25 \quad \text{چقدر بهتر است}$$

$$a = 1/2$$

$$f(1/2) = 0.25 \text{ و } f'(1/2) = 1$$

$$a+h = 1/2 - \frac{0.25}{1} \approx 1/4$$

حالا:

$$f(1/4) = 1/4^2 - 2 \approx 0.0625$$

توجه می کنید که $1/4$ چه ریشه بهتری برای معادله $x^2-2=0$ به حساب می آید.

حالا برای تعیین ریشه های تقریبی معادله $f(x)=0$ بخصوص معادله درجه سوم منحنی تابع $y=f(x)$ را رسم کنید و طول نقاط برخورد منحنی را با محور x ها معین کنید (خواهی نخواهی بین دو عدد متوالی می باشد) و با روش (نیوتن) ریشه های تقریبی معادله را با هر تقریبی که می خواهید حساب می کنید.

مثال ۱: مطلوب است حل معادله $x^2+6x-20=0$

$$\Delta > 0 \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 + 4 \cdot 20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 80}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{116}}{2}$$

مطلوب است حل معادله $x^2-6x+4\sqrt{2}=0$

$$\Delta = 0 \quad x_1 = x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = -2\sqrt{2}$$

مطلوب است حل معادله $x^2-2x-1=0$ ، $\Delta < 0$

$$x = r \cos \theta \quad r = \sqrt{2} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 2\theta = \frac{-2}{r^2} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow 2\theta = 2K\pi \pm \pi$$

$$\theta = K\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\theta_2 = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ \quad \theta_3 = \frac{5\pi}{2} = 450^\circ$$

لذا

$$\boxed{x = 2 \cos 90^\circ, 2 \cos 270^\circ, 2 \cos 450^\circ}$$

تذکره: باید موقعی که به K مقدار داده می شود θ_1 و θ_2 و θ_3 دارای کسینوسهای متفاوت باشند.

حل تقریبی معادله $f(x)=0$ (منظور ریشه های تقریبی می باشند).

فرض کنید a یک ریشه تقریبی معادله $f(x)=0$ باشد بنابراین اگر $a+h$ ریشه تقریبی بهتر آن باشد باید h را پیدا کنیم. می دانیم که:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

لذا $1/88$ و $1/87$ به ترتیب ریشه‌های معادله با 0.01 تقریب نقصانی و اضافی می‌باشند.

مسأله: معادله درجه سوم $x^3 + px + q = 0$ که ریشه‌های آن را α و β و γ می‌نامیم مفروض است. مطلوب است محاسبه

$$\Sigma \frac{1}{2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \quad \text{بر حسب } p \text{ و } q.$$

در هر معادله درجه سوم $S^2 - 2PS + 2R = 0$ که $S = -\frac{b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$ و $R = -\frac{d}{a}$ لذا با توجه $S = 0$ و $R = -q$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2q$$

معادله درجه سومی می‌نویسیم که ریشه‌های آن $y_1 = \frac{1}{2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ و $y_2 = \frac{1}{2\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2}$ و $y_3 = \frac{1}{2\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2}$ باشند.

$$y = \frac{1}{\Sigma \alpha^2 + \alpha^2} = \frac{1}{-2q + \alpha^2} \Rightarrow \alpha^2 - 2q = \frac{1}{y},$$

$$\alpha = \sqrt{2q + \frac{1}{y}}$$

حالا را در معادله $x^3 + px + q = 0$ می‌بریم و

$$2q + \frac{1}{y} + p\sqrt{2q + \frac{1}{y}} + q = 0 \Rightarrow$$

$$(64q^2 + 3p^2q)y^2 + (p^2 + 48q^2)y^2 + 12qy + 1 = 0.$$

لذا:

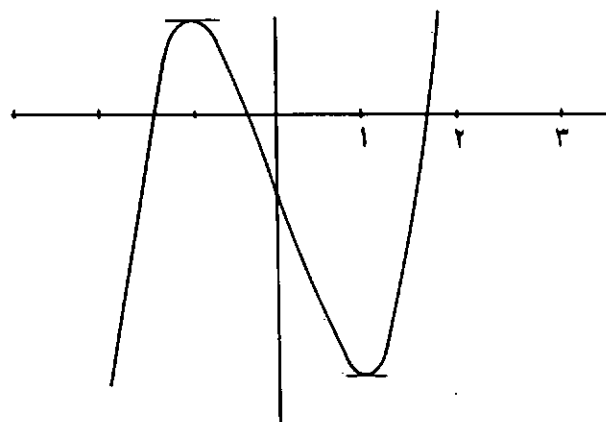
$$\Sigma \frac{1}{2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = -\frac{p^2 + 48q^2}{64q^2 + 3p^2q}$$



مثال: ریشه مثبت معادله $x^3 - 3x - 1 = 0$ را تا 0.01 واحد حساب کنید:

$$y = x^3 - 3x - 1 \quad y' = 3x^2 - 3 = 0 \quad x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow -2$	$\nearrow 1$	$\searrow -1$	$\searrow -2$	$\nearrow 1$	$+\infty$



ریشه مثبت معادله بین 1 و 2 می‌باشد:

$$f(1/8) = -0.568$$

$$f(1/9) = 0.159$$

بنابراین $1/8$ و $1/9$ به ترتیب ریشه‌های معادله تا 0.01 تقریب نقصانی و اضافی می‌باشند.

حالا:

$$f(1/8) = -0.568$$

$$f'(1/8) = 6/72$$

$$a + h = 1/8 + \frac{-0.568}{6/72} \approx 1/88$$

$$f(1/88) = 0.004672$$

$$f(1/87) < 0$$

چقدر به صفر نزدیک است: