

معادلات

سید محمدرضا هاشمی موسوی

(۱) حل معادله (۱) در حالت $n = 1$:

معادله (۱) به ازای $n = 1$ به شکل خاص

$$a_0 x + a_1 = 0$$

درمی آید. برای حل این معادله کافی است a_1 را به طرف دیگر برده و طرفین را بر a_0 که مخالف صفر فرض شده است تقسیم کنیم یعنی:

$$x = -\frac{a_1}{a_0}$$

حل و بحث معادله درجه اول: بنابر مقادیری که

a_0 و a_1 کسب می کنند سه حالت می تواند وجود داشته باشد که مورد بحث قرار گیرند. I) اگر $a_0 = 0$ و $a_1 \neq 0$ در این صورت معادله جواب ندارد. II) اگر $a_0 = 0$ و $a_1 = 0$ معادله به شکل $0 \cdot x + 0 = 0$ درمی آید و ریشه معادله مبهم است. III) اگر $a_0 \neq 0$ و $a_1 \in \mathbb{R}$ ریشه معادله چنین است:

$$x = -\frac{a_1}{a_0}$$

□

مثال ۱: به ازای مقادیر مختلف m در وجود یا عدم ریشه

$$\text{معادله: } m^2 x + 2m + 1 = (3m - 2)x$$

حل: ابتدا مجهولات را به سمت چپ و معلومات را به طرف

راست انتقال می دهیم. (با توجه به اینکه هر عدد از يك طرف به

طرف دیگر برده شود علامتش عوض می شود.) بنابراین داریم:

حل و بحث معادلات درجه اول و دوم يك مجهولی

به طور کلی هر معادله درجه n ام يك مجهولی را در حالت عمومی به شکل زیر نمایش می دهیم:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1)$$

در حالت عمومی $n \geq 5$ معادله (۱) به وسیله رادیکالهای بسته و محدود قابل حل نیست. یعنی ریشه معادله (۱) در حالت عمومی $n \geq 5$ به وسیله رادیکالهای متناهی قابل بیان نیست. در این حالت معادله را با روشهای تقریبی موجود حل می کنند. بنابراین حل معادله (۱) فقط در حالت $n \leq 4$ ممکن است. زیرا در این حالت معادله حلال معادله منظور، از نظر درجه، يك درجه کمتر از درجه معادله اصلی است. بنابراین در این جا نتیجه می شود که معادله (۱) را تنها در مجموعه ای محدود از n می توان حل نمود یعنی:

$$n = \{1, 2, 3, 4\}$$

در این شماره کلیه مطالب در رابطه با حل معادله (۱) به

ازای $n = 1$ و $n = 2$ ارائه می شود.

1) Equations

(۲) حل معادله (۱) در حالت $n=2$:

معادله (۱) به ازای $n=2$ به شکل خاص

$$a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$$

درمی آید. برای سادگی معادله درجه دوم را در حالت عمومی به شکل آشنای مقابل در نظر می گیریم:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (2)$$

معادله (۲) را می توان با روشهای جبری، هندسی، مثلثاتی، ترسیمی (گرافیکی) حل نمود. در اینجا تنها به ذکر يك روش جبری ساده اکتفا می کنیم.

روش جبری: ابتدا معادله (۲) را در a ضرب می کنیم.

سپس به طرفین معادله حاصله b^2 را اضافه می کنیم یعنی:

$$a(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$a^2x^2 + 2abx + 2ac = 0 \Rightarrow$$

$$a^2x^2 + 2abx + b^2 = b^2 - 2ac$$

طرف اول رابطه اخیر مربع $(2ax + b)$ است بنابراین داریم:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 2ac \quad (3)$$

همان طور که مشاهده می شود طرف اول رابطه (۳) همواره مثبت است، بنابراین طرف دوم تساوی فوق نیز همواره باید مثبت و یا مساوی صفر باشد. در این صورت اگر طرف دوم تساوی فوق-الذکر را به Δ نمایش دهیم می توانیم Δ را مبین حل معادله (۲) منظور کنیم. یعنی برای وجود جواب معادله (۲) باید داشته باشیم:

$$\Delta = b^2 - 2ac \geq 0$$

در اینجا با فرض $\Delta \geq 0$ می توان از طرفین رابطه (۳) جذر گرفت و سپس x را محاسبه نمود. یعنی:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 2ac} \Rightarrow$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{\Delta} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (a \neq 0)$$

بحث در وجود یا عدم ریشه های معادله (۲): به طور کلی اگر

$$m^2x - 3mx + 2x = -2m - 1 \Rightarrow$$

$$(m^2 - 3m + 2)x = -(2m + 1)$$

معادله به ازای $m \in R - \{1, 2\}$ يك ریشه حقیقی دارد.

$$x = \frac{-(2m+1)}{m^2-3m+2} = -\frac{2m+1}{(m-1)(m-2)}$$

$$\text{بحث: } \begin{cases} \text{I) اگر } (m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow \\ \text{معادله ریشه حقیقی ندارد. } m=1 \vee m=2 \\ \text{II) اگر } (m-1)(m-2) \neq 0 \Rightarrow \\ \text{معادله يك ریشه حقیقی دارد. } m \neq 1 \wedge m \neq 2 \end{cases}$$

G

مثال ۲: به ازای مقادیر مختلف m و n در وجود یا عدم ریشه معادله زیر بحث کنید.

$$(3m - 2n + 1)x + 1 = (2m - n)x + 3n - 2m$$

حل:

$$(3m - 2n + 1)x - (2m - n)x = 3n - 2m - 1$$

$$(m - n + 1)x = 3n - 2m - 1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{3n - 2m - 1}{m - n + 1}$$

$$\text{بحث: } \begin{cases} \text{I) اگر } m - n + 1 = 0 \wedge 3n - 2m - 1 \neq 0 \\ \text{غیر ممکن} \\ \text{II) اگر } m - n + 1 = 0 \wedge 3n - 2m - 1 = 0 \\ \text{مبهم} \\ \text{III) اگر } m - n + 1 \neq 0 \wedge \forall m, n \in R \\ \text{ممکن} \end{cases}$$

توجه: برای به دست آوردن m و n در حالت مبهم کافی است دستگاه زیر را حل کنیم. از حل دستگاه نتیجه می شود:

$$\begin{cases} m - n + 1 = 0 \\ 3n - 2m - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow n = -1 \text{ و } m = -2$$

و در نتیجه ریشه‌های مختلط چنین می‌شوند.

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-7}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad (i^2 = -1)$$

تبصره ۲: ریشه‌های غیر حقیقی (مختلط) همواره در معادلات باضرایب حقیقی به شکل مزدوج ظاهر می‌شوند یعنی اگر معادله درجه دومی دارای ریشه $2 - i\sqrt{3}$ باشد ریشه دیگرش در صورت حقیقی بودن ضرایب، $2 + i\sqrt{3}$ می‌باشد.

G

مثال ۴: معادله درجه دومی که يك ریشه غیر حقیقی آن

$$\frac{3 + i\sqrt{5}}{2}$$

است، ریشه دیگرش در صورت حقیقی بودن ضرایب، چیست.

حل: چون فرض شده است ضرایب معادله حقیقی است بنابراین ریشه دیگر معادله باید مزدوج ریشه داده شده باشد یعنی ریشه دیگر معادله $\frac{3 - i\sqrt{5}}{2}$ است.

تذکره: اگر در معادله (۲) b زوج باشد (یعنی $b = 2b'$) معادله را می‌توان با فرمول ساده‌تری حل نمود. زیرا داریم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow b = 2b' \Rightarrow$$

$$x = \frac{-(2b') \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$\frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' = b'^2 - ac \\ b = 2b' \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

$\Delta \geq 0$ باشد معادله ریشه حقیقی دارد. و اگر $\Delta < 0$ باشد معادله ریشه حقیقی ندارد. یعنی:

$$\text{بحث: } \begin{cases} \text{I) اگر } \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow \text{معادله (۲) دو ریشه حقیقی متمایز دارد.} \\ \text{II) اگر } \Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \text{معادله (۲) دو ریشه مساوی (ریشه مضاعف) دارد.} \\ \text{III) اگر } \Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \text{معادله (۲) ریشه حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

تبصره ۱: در حالت $\Delta < 0$ معادله دو ریشه غیر حقیقی دارد که به شکل کلی: $x = \alpha \pm i\beta$ می‌باشند. این نوع اعداد که در آنها $i = \sqrt{-1}$ است از دو جزء تشکیل یافته‌اند، که این دو جزء عبارتند از جزء حقیقی α (یعنی α) و جزء موهومی β (یعنی $i\beta$). به عنوان مثال معادله: $x^2 + x + 1 = 0$ دارای دو ریشه غیر حقیقی (مختلط) است که عبارتند از:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} =$$

$$\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{-1}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\beta} i \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$\Rightarrow x = \alpha \pm i\beta \quad (\text{ریشه‌های مختلط معادله})$$

مثال ۳: ریشه‌های غیر حقیقی (مختلط) معادله

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

را به دست آورید.

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} \quad \text{حل: داریم:}$$

1) Real 2) Imaginary 3) Complex

و یا داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} -3m+1 > 0 \Rightarrow -3m > -1 \Rightarrow m < \frac{1}{3} & (1) \text{ دو ریشه حقیقی دارد.} \\ -3m+1 = 0 \Rightarrow -3m = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{3} & (2) \text{ ریشه مضاعف دارد.} \\ -3m+1 < 0 \Rightarrow -3m < -1 \Rightarrow m > \frac{1}{3} & (3) \text{ ریشه حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

اگر ریشه‌ها عکس و قرینه یکدیگر باشند داریم:

$$x'' = \frac{-1}{x'} \Rightarrow \begin{cases} x'x'' = -1 \\ x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{m} \end{cases} \Rightarrow$$

از روابط بین ریشه‌ها و ضرایب داریم:

$$\frac{m+1}{m} = -1 \Rightarrow m+1 = -m \Rightarrow 2m = -1$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

بنابراین به ازای $m = -\frac{1}{2}$ ریشه‌ها عکس و قرینه یکدیگرند.

اگر ریشه‌ها قرینه یکدیگر باشند داریم: $x'' = -x'$

و از روابط بین ریشه‌ها و ضرایب داریم:

$$x'' + x' = -\frac{b}{a}$$

بنابراین با جایگزینی داریم:

$$-x' + x' = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

بنابراین به ازای $m = 1$ ریشه‌ها قرینه یکدیگرند. زیرا داریم:

$$b = -2(m-1) = 0 \Rightarrow m = 1$$

روابط بین ریشه‌های معادله (۲):

اگر دو ریشه معادله (۲) را با x' و x'' نمایش دهیم و معادله دوجمله دوم (۲) را بر a که مخالف صفر فرض شده است تقسیم کنیم، از مقایسه معادله حاصل و معادله:

$$(x-x')(x-x'') = 0$$

و مسا معادله: $x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0$ روابط بین ریشه‌ها و ضرایب به دست می‌آید. یعنی:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 & \text{از مقایسه} \\ \Rightarrow x^2 - (x' + x'')x + x'x'' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x' + x'' = -\frac{b}{c} \\ x'x'' = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (4)$$

6

مثال ۵: به ازای مقادیر مختلف m در وجود یا عدم

ریشه‌های معادله:

$$mx^2 - 2(m-1)x + m+1 = 0$$

بحث کنید. و مقدار m را طوری تعیین کنید که ریشه‌ها عکس و قرینه یکدیگر باشند. و تعیین کنید به ازای چه مقادیری از m معادله دو ریشه قرینه دارد.

حل: برای بحث در وجود یا عدم ریشه‌های حقیقی معادله کافی است مبین معادله را تشکیل دهیم. چون b زوج است بهتر است Δ' را تشکیل دهیم. بنابراین داریم:

$$\Delta' = (m-1)^2 - m(m+1)$$

$$\Delta' = m^2 - 2m + 1 - m^2 - m = -3m + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' = -3m + 1 > 0 & (1) \text{ دو ریشه حقیقی دارد.} \\ \Delta' = -3m + 1 = 0 & (2) \text{ ریشه مضاعف دارد.} \\ \Delta' = -3m + 1 < 0 & (3) \text{ ریشه حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

استفاده کرد و معادله درجه دوم منظور را نوشت.

* برهان نکاتی چند در مورد معادله درجه دوم که درست می توان بکار برد.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (۲)$$

(۱) همواره قدرمطلق تفاضل ریشه ها چنین است:

$$|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

برهان: همان طور که می دانیم ریشه های معادله درجه دوم (۲) چنین است:

$$x', x'' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \quad \text{و یا} \quad \begin{cases} x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

پس به ترتیب داریم:

$$x' - x'' = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \quad \text{و} \quad x' - x'' = \frac{-\sqrt{\Delta}}{a} \Rightarrow$$

$$x' - x'' = \frac{\pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

$$a(x' - x'') = \pm \sqrt{\Delta} \Rightarrow |a(x' - x'')| = \sqrt{\Delta}$$

$$\Rightarrow |a| |x' - x''| = \sqrt{\Delta}$$

و بنابراین از رابطه اخیر داریم:

$$|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

(لازم به توضیح است که رابطه اخیر را از اصل:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

نتیجه گرفته ایم.)

تعیین معادله درجه دوم، با معلوم بودن ریشه ها:

با توجه به روابط بین ریشه ها و ضرایب می توان به طور مستقیم معادله را مشخص نمود، یعنی اگر فرض کنیم مجموع ریشه ها برابر S و حاصل ضرب ریشه ها برابر P باشد در این صورت داریم:

$$\begin{cases} x' + x'' = -\frac{b}{a} = S \\ x'x'' = \frac{c}{a} = P \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

مثال ۶:

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه هایش

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{باشد.}$$

$$\text{حل: داریم: } x' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad x'' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

بنابراین از جمع و ضرب ریشه ها نتیجه می شود:

$$\begin{cases} x' + x'' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 \\ x'x'' = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' + x'' = 1 \\ x'x'' = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

نتیجه: با در دست داشتن دو ریشه معادله درجه دوم به

طور مستقیم می توان از رابطه:

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = 0$$

$$B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$$

$$C = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right)^2 - 2 \frac{1}{x_1 x_2} \\ = \frac{S^2}{P^2} - \frac{2}{P}$$

$$D = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$$

$$E = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \Rightarrow E^2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2$$

$$E^2 = \frac{S^2 - 2P}{P} + 2 = \frac{S^2 - 2P + 2P}{P} = \frac{S^2}{P} \Rightarrow$$

$$E = \frac{S}{\sqrt{P}} \times \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P}} = \frac{S\sqrt{P}}{P} \quad (P > 0)$$

$$F = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2PS$$

$$g = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3} = \frac{S^3 - 3PS}{P^3}$$

$$H = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 \\ = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = S^4 - 4PS^2 + 2P^2$$

* (برای محاسبه S_k بر حسب P و S چنین عمل می‌کنیم:

$$S_k = \left(\frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \right)^k + \left(\frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \right)^k$$

(لازم به توضیح است که x_1 و x_2 ریشه‌های معادله (۲) می‌باشند و داریم:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \\ x_2 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} \end{cases}$$

(۲) با استفاده از روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله (۲) عبارتهای متقارن اصلی زیر را بر حسب S و P محاسبه کنید (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله (۲) فرض شده‌اند).

(لازم به ذکر است که عبارت متقارن بر حسب x و y عبارت است که اگر x به y و y به x تبدیل شود عبارت تغییر نکند، به عبارت دیگر عبارات متقارن عباراتی هستند که اگر نقش متغیرها را بایکدیگر عوض کنیم عبارت تغییری نکند، به عنوان مثال عبارت $P = x^2 + y^2 + xy$ يك عبارت متقارن است زیرا اگر x به y و y به x تبدیل شود عبارت چنین می‌شود:

$$P = y^2 + x^2 + yx$$

که در واقع همان عبارت قبلی است. به عنوان مثالی دیگر $S = x^2 + xyz + y^2 + z^2$ نیز متقارن است.)

$$A = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{و} \quad B = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$$C = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \quad \text{و} \quad D = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

$$E = \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad \text{و} \quad F = x_1^2 + x_2^2$$

$$G = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{و} \quad H = x_1^4 + x_2^4$$

$$*(S_k = x_1^k + x_2^k)*$$

حل: همان‌طور که می‌دانیم روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله (۲) چنین است:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \\ = S^2 - 2P$$

با حذف $x_1^2 - x_2^2$ از صورت و مخرج داریم:

$$\Rightarrow T = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)$$

$$T = (S^2 - 2P)[(S^2 - 2P)^2 - 2P^2] =$$

$$(S^2 - 2P)^2 - 2P^2(S^2 - 2P)$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S = 3 \\ x_1 x_2 = P = 1 \end{cases}$$

بنابراین نتیجه می‌شود:

$$T = (9 - 2)^2 - 2(9 - 2) = 7^2 - 14 = 329$$

و با جایگزینی x_1 و x_2 در S_k به رابطه فوق رسیده‌ایم.

پس از بسط هر یک از پرانتزها و اختصار لازم مقدار S_k بر حسب S و P محاسبه می‌شود یعنی:

$$S_k = \frac{1}{2^{k-1}} \left[S^k + \frac{k(k-1)}{1 \times 2} (S^2 - 2P) S^{k-2} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} (S^2 - 2P)^2 S^{k-4} + \dots \right]$$

رابطه اخیر بیان S_k را بر حسب S و P نشان می‌دهد. *

□

مثال ۷: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم:

$$x^2 - \sqrt{3}x - 2\sqrt{6} = 0$$

باشند عبارت متقارن زیر را حساب کنید.

$$A = x_1^2 x_2^4 + x_2^2 x_1^4 + x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_1^2$$

$$\text{حل: } A = x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) + x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)(x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2)$$

$$A = S(P^2 + P^2) \Rightarrow A = SP^2(P + 1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{3} = S \\ x_1 x_2 = -2\sqrt{6} = P \end{cases} \Rightarrow A = 24(\sqrt{3} - 6\sqrt{2})$$

□

مثال ۸: عبارت $T = \frac{x_1^4 - x_2^4}{x_1^2 - x_2^2}$ در صورتی که

x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند را حساب کنید.

$$T = \frac{(x_1^4 - x_2^4)(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 - x_2^2}$$

(۳) تشکیل معادله درجه دومی که بین ریشه‌های آن و ریشه‌های معادله درجه دوم مفروضی رابطه خاصی برقرار باشد. به عنوان مثال معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش k واحد بیشتر و یا کمتر از معادله (۲) باشد. و یا معادله درجه دومی تشکیل دهید که هر ریشه آن مکعب هر ریشه معادله (۲) باشد و ... در این جا برخی از این گونه مسائل را مطرح و با یکی از دو روش معمول یعنی استفاده از عبارتهای متقارن و یا برقراری رابطه بین ریشه‌های معادله مفروض (x) و ریشه‌های معادله مطلوب (y) حل می‌کنیم. البته باید به این نکته توجه داشت که در برخی از مسائل روش اول و در برخی دیگر روش دوم ساده تر است. و در بعضی از مسائل تنها از یکی از روشهای معمول می‌توان استفاده کرد.

(۳-۱) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش k

واحد بیشتر یا کمتر از معادله (۲) باشد.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

حل: ریشه معادله مطلوب را y فرض می‌کنیم. بنابراین

با برقراری رابطه بین ریشه‌های معادله مفروض و ریشه‌های معادله مطلوب داریم:

$$y = x \pm k \Rightarrow x = y \mp k$$

با جایگزینی رابطه اخیر در معادله (۲) داریم:

مثال ۱۰: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه هایش ۳ برابر ریشه های معادله $x^2 + x - 3 = 0$ باشد.

حل: y را ریشه معادله مطلوب فرض می کنیم بنابراین باید داشته باشیم:

$$y = 3x$$

با محاسبه x بر حسب y و جایگزینی در معادله داریم:

$$x = \frac{y}{3} \Rightarrow \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right) - 3 = 0$$

و در نتیجه داریم:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{y}{3} - 3 = 0 \Rightarrow y^2 + 3y - 27 = 0$$

(معادله مطلوب)

مثال ۳-۳: معادله درجه دومی تشکیل دهید که به ترتیب ریشه هایش معکوس، مجذور، مکعب و قرینه ریشه های معادله (۲) باشد.

حل: اگر ریشه معادله مطلوب را y فرض کنیم، در این صورت داریم:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

با جایگزینی در معادله (۲) داریم:

$$a\left(\frac{1}{y}\right)^2 + b\left(\frac{1}{y}\right) + c = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c = 0$$

با ضرب طرفین معادله اخیر در y^2 معادله مطلوب بنی معادله ای که ریشه هایش عکس ریشه های معادله (۲) می باشد چنین است:

$$cy^2 + by + a = 0$$

همچنین اگر مجذور باشد داریم:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$

$$a(y \mp k)^2 + b(y \mp k) + c = 0$$

معادله مطلوب:

$$ay^2 \mp 2aky + k^2 + by \mp bk + c = 0 \Rightarrow$$

$$ay^2 + (b \mp 2ak)y + (k^2 \mp bk + c) = 0$$

(اگر k واحد بیشتر باشد با علامت منفی (-) و اگر k واحد کمتر باشد با علامت مثبت (+) در نظر می گیریم.)

□

مثال ۹: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه هایش ۲ واحد کمتر از ریشه های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشد.

حل: ریشه معادله مطلوب را y فرض می کنیم. در این صورت داریم:

$$y = x - 2$$

$$x = y + 2 \Rightarrow (y + 2)^2 - 4(y + 2) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y + 4 - 4y - 8 + 2 = 0$$

بنابراین معادله مطلوب چنین است:

$y^2 - 2 = 0$ (معادله ای که ریشه هایش ۲ واحد کمتر از معادله مفروض است).

مثال ۳-۲: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه هایش k برابر ریشه های معادله (۲) باشد.

حل: ریشه معادله مطلوب را y فرض می کنیم، در این صورت داریم:

$$y = kx$$

با محاسبه x بر حسب y و جایگزینی آن در معادله (۲)

$$x = \frac{y}{k}$$

خواهیم داشت:

$$a\left(\frac{y}{k}\right)^2 + b\left(\frac{y}{k}\right) + c = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{ay^2}{k^2} + \frac{by}{k} + c = 0 \Rightarrow$$

$$ay^2 + bky + ck^2 = 0$$

مثال ۱۱: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد.

حل: ریشه معادله مطلوب را y فرض می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow \left(\frac{1}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{y}\right) + 1 = 0$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y} + 1 = 0 \Rightarrow y^2 - 3y + 1 = 0$$

بنابراین چنین نتیجه می‌شود که اگر ریشه‌های معادله

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

را معکوس کنیم باز هم در معادله صدق می‌کنند.

□

مثال ۱۲: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادله $x^2 - x - 1 = 0$ باشد.

حل: روش اول: ریشه معادله مطلوب را y فرض می‌کنیم، پس داریم:

$$x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow$$

$$(\pm\sqrt{y})^2 - (\pm\sqrt{y}) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$y \mp \sqrt{y} - 1 = 0 \Rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow (\pm\sqrt{y})^2 = (y - 1)^2$$

$$\Rightarrow y = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow$$

$$y^2 - 3y + 1 = 0 \quad (\text{معادله مطلوب})$$

روش دوم: ریشه‌های معادله مطلوب را y_1 و y_2 فرض

می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$y_1 = x_1^2$$

$$y_2 = x_2^2$$

با جایگزینی در معادله (۲) داریم:

$$a(\pm\sqrt{y})^2 + b(\pm\sqrt{y}) + c = 0 \Rightarrow$$

$$ay \pm b\sqrt{y} + c = 0$$

$$ay + c = \mp b\sqrt{y} \Rightarrow (ay + c)^2 = (\mp b\sqrt{y})^2$$

$$\Rightarrow a^2 y^2 + 2acy + c^2 = b^2 y$$

معادله‌ای که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادله (۲) است:

$$a^2 y^2 + (2ac - b^2)y + c^2 = 0$$

همچنین اگر مکعب باشد داریم:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^3 \\ y_2 = x_2^3 \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} \text{ریشه‌های } y_1 \text{ و } y_2 \\ \text{معادله مطلوب} \\ \text{فرض می‌شوند.} \end{array}$$

و می‌دانیم:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = S \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = P \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = x_1^3 + x_2^3 \\ y_1 y_2 = x_1^3 x_2^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = S^3 - 3PS \\ y_1 y_2 = P^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y^2 - (S^3 - 3PS)y + P^3 = 0$$

بنابراین معادله‌ای که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادله (۲) می‌باشد چنین است:

$$a^3 y^2 + (b^3 - 3abc)y + c^3 = 0$$

بالاخره معادله‌ای که ریشه‌هایش قرینه معادله (۲) است چنین است:

$$y = -x \Rightarrow x = -y$$

$$a(-y)^2 + b(-y) + c = 0 \Rightarrow$$

$$ay^2 - by + c = 0 \quad (\text{معادله مطلوب})$$

مثال ۱۴: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش قرینه ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشد.

حل: اگر ریشه‌های معادله مطلوب را به y نمایش دهیم، در این صورت داریم: $y = -x \Rightarrow x = -y$ و با جایگزین کردن در معادله مفروض داریم:

$$(-y)^2 - 5(-y) + 3 = 0 \Rightarrow y^2 + 5y + 3 = 0$$

مثال ۱۵: معادله درجه دومی تشکیل دهید که هر ریشه آن از k برابر هریک از ریشه‌های معادله (2) ، m واحد کمتر باشد.

حل: ریشه معادله مطلوب را y فرض می‌کنیم بنابراین از شرایط مسئله داریم:

$$y = kx - m$$

از رابطه اخیر x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم و سپس در معادله (2) قرار می‌دهیم، یعنی:

$$x = \frac{y+m}{k} \Rightarrow a\left(\frac{y+m}{k}\right)^2 + b\left(\frac{y+m}{k}\right) + c = 0$$

$$\frac{a}{k^2}(y^2 + 2my + m^2) + \frac{b}{k}(y+m) + c = 0$$

$$\Rightarrow ay^2 + 2amy + bky + am^2 + bkm + k^2c = 0$$

بنابراین معادله مطلوب چنین است:

$$ay^2 + (2am + bk)y + am^2 + bkm + k^2c = 0$$

□

مثال ۱۵: معادله درجه دومی تشکیل دهید که هر ریشه آن از ۳ برابر هریک از ریشه‌های معادله $2x^2 - 4x + 1 = 0$ به اندازه ۲ واحد بیشتر باشد.

حل: ریشه معادله مطلوب را y فرض می‌کنیم بنابراین

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 \\ y_1 y_2 = x_1^2 x_2^2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 \\ y_1 y_2 = (x_1 x_2)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = (1)^2 - 2(-1) = 3 \\ y_1 y_2 = (-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 3 \\ y_1 y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 3y + 1 = 0$$

□

مثال ۱۶: معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشد.

حل: ریشه‌های معادله مطلوب را y_1 و y_2 فرض می‌کنیم، پس داریم:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^3 \\ y_2 = x_2^3 \end{cases}$$

و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\ y_1 y_2 = x_1^3 x_2^3 = (x_1 x_2)^3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = (3)^3 - 3(-2)(3) \\ y_1 y_2 = (-2)^3 = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = (3)^3 - 3(-2)(3) = 27 + 18 = 45 \\ y_1 y_2 = (-2)^3 = -8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y^2 - 45y - 8 = 0 \quad (\text{معادله مطلوب})$$

با توجه به شرایط مسئله داریم:

$$y = 2x + 2$$

و در نتیجه داریم:

$$x = \frac{y-2}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{y-2}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{y-2}{2}\right) + 1 = 0$$

$$\frac{2}{4}(y^2 - 4y + 4) - \frac{2}{2}(y-2) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2y^2 - 8y + 8 - 2y + 4 + 4 = 0$$

پس از اختصار لازم معادله مطلوب چنین است:

$$2y^2 - 20y + 41 = 0$$

(۴) نتایجی از حالت‌های خاص ضرایب a و b و c :

(۴-۱) هرگاه در معادله (۲) داشته باشیم $a = 0$ آنگاه

یک ریشه معادله به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

(۴-۲) اگر $c = 0$ ، یک ریشه معادله صفر و ریشه دیگر آن

برابر $-\frac{b}{a}$ است زیرا داریم:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

(۴-۳) اگر $b = 0$ ، با شرط مختلف علامت بودن a و c

معادله دو ریشه قریبه دارد زیرا:

$$b = 0 : ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

(۴-۴) اگر در معادله (۲) داشته باشیم:

$$a = b = c = 0$$

آنگاه معادله بی‌شمار جواب دارد زیرا در این حالت معادله به

انواع عددی تبدیل می‌شود. یعنی:

$$0 \times x^2 + 0 \times x + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

(۴-۵) اگر $a + b + c = 0$ آنگاه یک ریشه معادله

$x_1 = 1$ و ریشه دیگر معادله $x_2 = \frac{c}{a}$ است و برعکس. زیرا

اگر در معادله (۲) مقدار $x = 1$ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$a(1)^2 + b(1) + c = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow 1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{c}{a}$$

(۴-۶) اگر $a + c = b$ آنگاه یک ریشه معادله $x_1 = -1$

و ریشه دیگر معادله $x_2 = -\frac{c}{a}$ است و برعکس. زیرا اگر

در معادله (۲) مقدار $x = -1$ را قرار دهیم خواهیم داشت:

$$a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$$

$$\Rightarrow a + c = b, \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-1)x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{c}{a}$$

(۴-۷) اگر در معادله (۲) مقادیر a و c مختلف علامت

باشند یعنی $\frac{c}{a} < 0$ ، معادله همواره دو ریشه حقیقی مختلف.

الامت دارد و نیازی به تشکیل Δ (مبین) نمی‌باشد. زیرا با این شرط همواره $\Delta > 0$ است. همچنین باید توجه داشت که اگر

$\frac{c}{a} > 0$ باشد دلیلی بر نداشتن ریشه نیست و Δ را باید تشکیل

دهیم.

$$+c(ab'-a'b)^2=0$$

$$a(a'c-ac')^2+(ab'-a'b)[b(a'c-ac') \\ +c(ab'-a'b)]=0$$

$$a(a'c-ac')^2+(ab'-a'b)[ba'c-bac' \\ +cab'-ca'b]=0$$

$$a(a'c-ac')^2+a(ab'-a'b)(b'c-bc')=0$$

بنابراین با فرض $a \neq 0$ داریم:

$$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$$



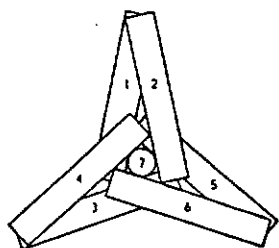
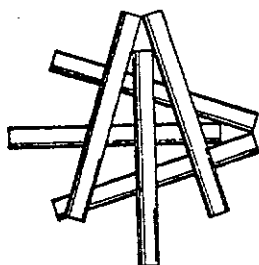
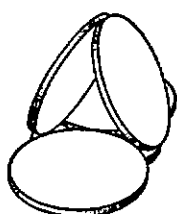
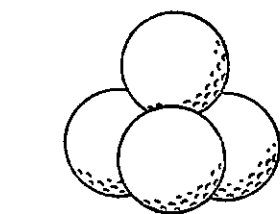
(۱) پنج توپ گلف را چنان قرار دهید که هر توپ به سه توپ دیگر تماس داشته باشد. (۲) پنج سکه دو ریالی را چنان قرار دهید که هر سکه به چهار سکه دیگر برخورد کند. (۳) آیا ممکن است شش سیگار را چنان قرار دهیم که هریک از آنها با پنج قطعه دیگر برخورد کند؟ سیگارها را نباید خم کرد یا شکست. هفت سیگار را چگونه؟

مارتین گاردنر

معماها و تفریحات ریاضی،

ترجمه غلامرضا یاسی پور

جواب



(۴-۸) اگر در معادله (۲) داشته باشیم $a=c$ یعنی:

$\frac{c}{a}=1$ ، معادله دو ریشه معکوس دارد. زیرا در این حالت داریم:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow x_1 x_2 = 1 \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1} \text{ یا } x_1 = \frac{1}{x_2}$$

(۵) برای آنکه دو معادله

$$ax^2+bx+c=0 \text{ و } a'x^2+b'x+c'=0$$

ریشه مشترک داشته باشند باید داشته باشیم:

$$(ab'-a'b)(bc'-b'c)=(ac'-a'c)^2$$

برهان:

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ a'x^2+b'x+c'=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-a' \begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ a'x^2+b'x+c'=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -a'ax^2-a'bx-a'c=0 \\ aa'x^2+ab'x+ac'=0 \end{cases}$$

از جمع دو رابطه دستگاه نتیجه می شود:

$$(ab'-a'b)x=a'c-ac' \Rightarrow$$

$$x = \frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$$

از آنجا که ریشه اخیر در هر دو معادله صادق است داریم:

$$a\left(\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)^2+b\left(\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)+c=0$$

$$a(a'c-ac')^2+b(a'c-ac')(ab'-a'b)$$