

مسیر، دور و هم‌بندی در گراف‌ها

در ادامه‌ی مقاله‌ی

گراف‌های کامل در شماره‌ی

۶۸ پرهان، در این مقاله با تعریف

مسیر و دور در یک گراف و تعریف گراف مکمل، سعی در

تکمیل این بحث داریم.

حمیدرضا امیری

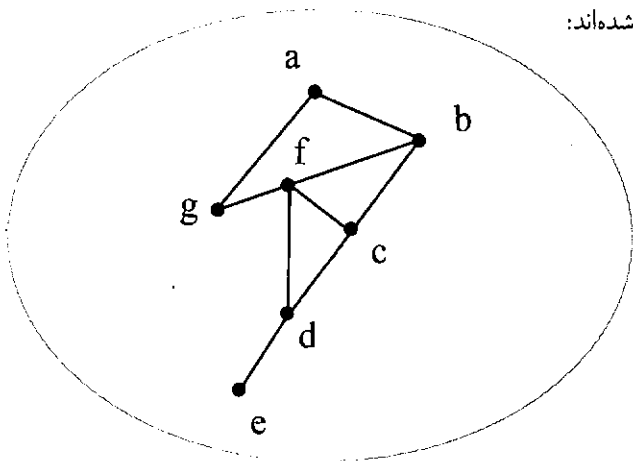
تعریف مسیر: در یک گراف از مرتبه‌ی p ، مسیری به طول m از

رأس a به b دنباله‌ای است شامل $(m+1)$ رأس دوبه‌دو متمایز که با

a شروع و به b ختم شود.

مثال: در گراف زیر، مسیرهایی با طول‌های متفاوت مشخص

شده‌اند:



مسیر به طول ۱ ab

مسیر به طول ۲ abc

مسیر به طول ۴ از a به e $abcde$

نکته: تعداد مسیرهای با طول‌های متفاوت از رأس a به b در

گراف کامل k_p از دستورهای زیر قابل محاسبه است:

$$k_p \text{ در } b \text{ به } a = \sum_{k=1}^{p-1} (p-1)_k \cdot ((n)_k = \frac{n!}{(n-k)!})$$

$$k_p \text{ در } b \text{ به } a = [(p-1) \times e]$$

تذکر: اگر تعداد مسیرهای بین a و b (از a به b و از b به a)

در گراف k_p را بخواهیم، کافی است تعداد مسیرهای از a به b را

دوبرابر کنیم و اگر همه‌ی مسیرهای بین رأسهای متمایز در گراف k_p

را بخواهیم، کافی است آن را در $\binom{p}{2}$ ضرب کنیم (هر دو نقطه از p

تعداد مسیرهایی را بین یکدیگر تعریف می‌کنند).

$$k_p \text{ در } b \text{ به } a = 2 \times \binom{p}{2} \times [(p-1) \times e]$$

در رابطه‌ی اخیر e عدد اولر است که تقریباً برابر با $2/72$ در نظر

گرفته می‌شود و علامت $[]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح است.

تذکر: مسیر از رأس a به رأس a را مسیر به طول صفر تعریف

می‌کنیم.

تعریف دور: یک دور به طول m زوی رأسی چون a در گراف

G از مرتبه‌ی p دنباله‌ای است شامل m رأس دوبه‌دو متمایز که با a

شروع و به a ختم شود.

تذکر: دورهایی که رأس‌های به‌کار رفته و یال‌های طی‌شده روی

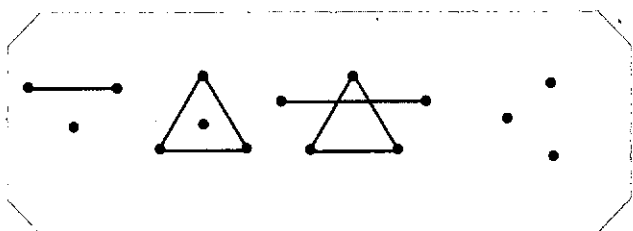
آنها با هم برابر باشد، یک دور به حساب می‌آیند.

مثال: در گراف زیر (k_4) هریک از ۶ دور abc و acb و bca و

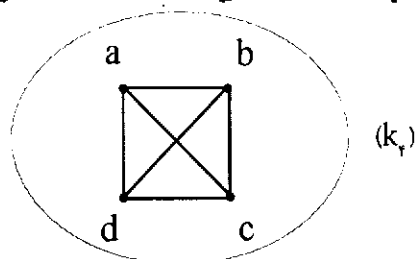
bac و cab و cba یک دور به حساب می‌آیند، و دورهای $abcd$

$abdca$ دو دور متفاوت با طول‌های ۴ هستند.

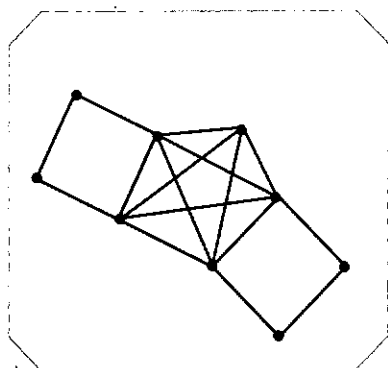
مثال: گراف‌های زیر همگی ناهمبندند:



حل: گزینه ی ۳ صحیح است، زیرا کافی است یک رأس را ایزوله



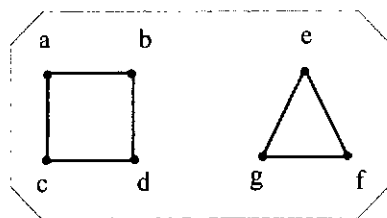
می توان گفت:



تا دور به طول p) از رابطہ‌ی زیر به دست می‌آید:

$$k_p \text{ در دورها کل تعداد} = \sum_{k=r}^p \frac{1}{r} \binom{p}{k} (k-1)!$$

(بین a و b مسیری وجود داشته باشد $\Leftrightarrow aRb$)



کنیم و با هفت رأس باقی مانده گراف K_7 بسازیم.

$$q_{K_7} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

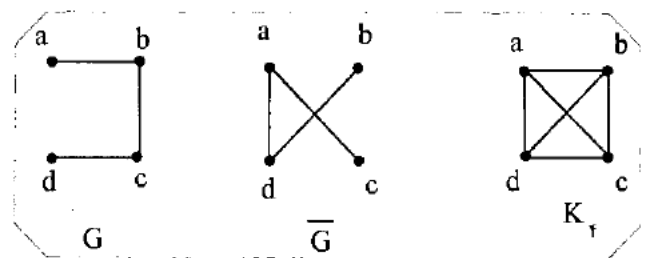
پرسش: گراف G از مرتبه ۹ مفروض است. این گراف حداقل چند یال باید داشته باشد تا مطمئن باشیم همبند است؟

$$(1) \quad 21 \quad (2) \quad 26 \quad (3) \quad 28 \quad (4) \quad 29$$

حل: گزینه ۴ صحیح است، زیرا:

$$q \geq \binom{p-1}{2} + 1 \Rightarrow q \geq \binom{8}{2} + 1 = 29 \rightarrow \text{شرط همبندی}$$

مکمل یک گراف: مکمل گراف G از مرتبه p گرافی است چون $\bar{G}$ از مرتبه p به طوری که این دو گراف روی هم، گراف کامل از مرتبه p را تشکیل می دهند. به مثال زیر توجه کنید:



تذکر: همواره مجموع یال های یک گراف و مکمل آن گراف برابر است با تعداد یال های گراف کامل هم مرتبه با آن گراف، یعنی:

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$$

تذکر: اگر G گرافی از مرتبه p باشد و a رأسی در این گراف و $\bar{a}$ رأس متناظر با آن در گراف $\bar{G}$ باشد، همواره داریم:

$$\deg a + \deg \bar{a} = p - 1$$

تذکر: اگر G گرافی r_1 - منتظم از مرتبه p باشد، مکمل G نیز گرافی r_2 - منتظم است و همواره $r_1 + r_2 = p - 1$ است.

مثال: چند گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۶ وجود دارد؟

حل: مکمل گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۶ گرافی است ۲ - منتظم از مرتبه ۶ و چون تعداد گراف های ۲ - منتظم از مرتبه ۶ همواره برابر است با ۲، یعنی دو گراف زیر را داریم، پس تعداد گراف های ۳ - منتظم از مرتبه ۶ نیز ۲ است.

