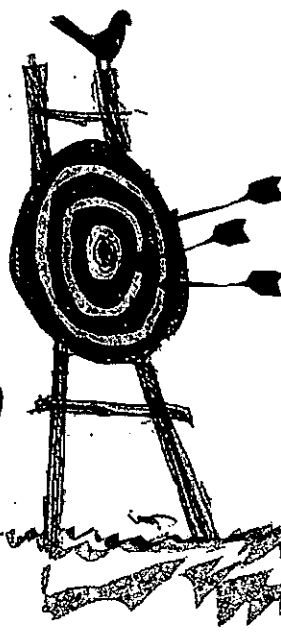


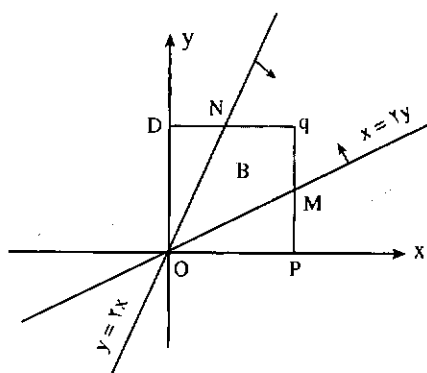


میدان‌های آموزشی

مسائلی از احتمال در فضا‌های پیوسته



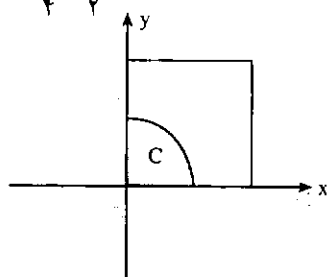
برای دانش آموزان سال سوم و پیش دانشگاهی



$$a_B = a_S - (a_{OPM} + a_{ODN})$$

$$a_B = 4 - (1 + 1) = 2$$

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$a_C = \frac{1}{4} \times (\text{مساحت دایره به شعاع ۱})$$

$$a_C = \frac{1}{4} \times \pi \times r^2 = \frac{1}{4} \pi \times 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$P(C) = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$$

کوچک‌تر از ۱ باشد. د) هر یک از دو عدد از مربع دیگری بزرگ‌تر باشد.

حل: اگر فضای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی در حالت‌های الف، ب، ج و د را به ترتیب S، A، B، C و D بنامیم، خواهیم داشت:

$$S = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\} = [0, 2] \times [0, 2]$$

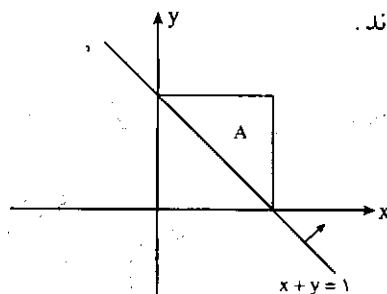
$$A = \{(x, y) | x, y \in S, x + y > 1\}$$

$$B = \{(x, y) | x, y \in S, x < 2y, y < 2x\}$$

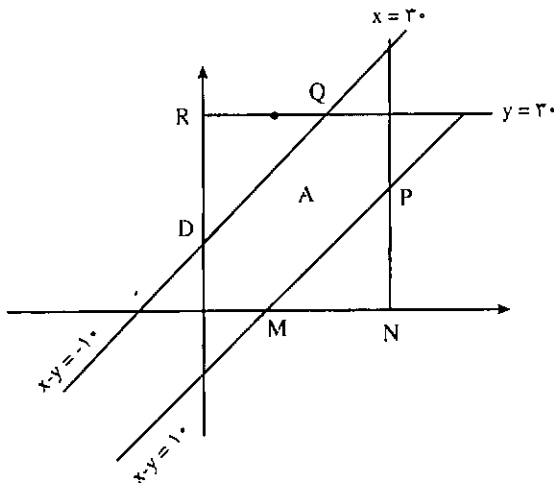
$$C = \{(x, y) | x, y \in S, x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D = \{(x, y) | x, y \in S, y > x^2, x > y^2\}$$

هر یک از مجموعه‌های A، B، C و D قسمت‌هایی از سطح مربعی به ضلع ۲ را مشخص می‌کنند که در شکل‌های زیر رسم شده‌اند.



$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$|x-y| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq x-y \leq 10$$

$$a_A = a_S - (a_{MNP} + a_{DQR})$$

$$\Rightarrow a_A = 900 - (200 + 200) = 500$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{500}{900} = \frac{5}{9}$$

مسئله ۴. مثلث غیر مشخصی را به طور تصادفی رسم می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که این مثلث یک زاویه‌ی منفرد داشته باشد.

حل: اگر x و y و z را زاویه‌های مثلث مورد نظر فرض کنیم، فضای نمونه‌ای به صورت

$$S = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}, 0 < x, y, z < 180, x + y + z = 180\}$$

تعریف می‌شود. با توجه به این که می‌خواهیم یکی از زاویه‌ها بزرگ‌تر از 90° باشد، پیشامد A به صورت:

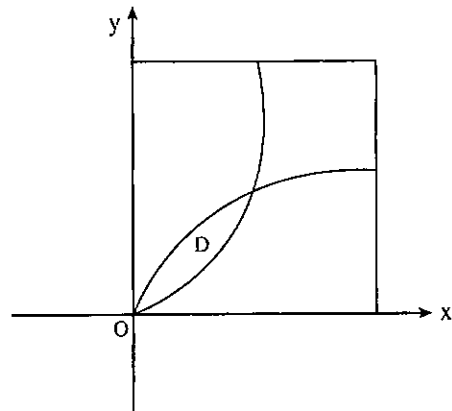
$$A = \{(x, y, z) \in S | x > 90^\circ \text{ یا } y > 90^\circ \text{ یا } z > 90^\circ\}$$

تعریف می‌شود. توجه داریم که فقط یکی از x ، y و z باید بزرگ‌تر از 90° باشد.

برای رسم نمودار هندسی S و A باید از یک دستگاه مختصات سه بعدی استفاده کنیم. فضای نمونه‌ای S عبارت است از نقاط روی صفحه‌ی $x+y+z=180$ ، با شرط: $0 < x, y, z < 180$ که این نقاط همان‌طور که در شکل صفحه بعد مشخص شده است، نقاط روی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC هستند.

برای رسم پیشامد A باید سه صفحه‌ی $x=90$ ، $y=90$ و $z=90$ را رسم کنیم و محل برخورد هریک از این سه صفحه را با صفحه‌ی $x+y+z=180$ که خطی راست است

برای محاسبه‌ی مساحت سطح D باید مساحت محدود بین دو منحنی $y=x^2$ و $x=y^2$ را از ۰ تا ۱ به دست آوریم:



$$a_D = \int_0^1 (x^2 - \sqrt{x}) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow a_D = \left| \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \right| = \frac{1}{15} \Rightarrow P(D) = \frac{1/15}{1/4} = \frac{4}{15}$$

مسئله ۳. بهزاد و جمشید بین ساعت‌های ۷ و ۷:۳۰ دقیقه با هم قرار ملاقات دارند. با فرض این که هر دو در همین فاصله‌ی زمانی به محل قرار برسند، چه قدر احتمال دارد هیچ یک از آن‌ها بیش‌تر از ده دقیقه معطل نشوند؟

حل: اگر ساعت‌های ورود بهزاد و جمشید را به محل قرار x و y بنامیم و ساعت ۷ را به عنوان مبدأ (زمان صفر) در نظر بگیریم، در این صورت فضای نمونه‌ای به صورت

$$S = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 30\}$$

تعریف می‌شود که در آن، هر زوج مرتب مانند (x, y) به منزله‌ی زمان‌های ورود این دو نفر به محل قرار بعد از ساعت ۷ است. مثلاً زوج مرتب $(5, 10)$ به این معنی است که نفر اول ساعت ۷ و ۵ دقیقه و نفر دوم ساعت ۷ و ۱۰ دقیقه به محل قرار رسیده است و در نتیجه، نفر اول ۵ دقیقه معطل مانده است. پس برای آن که هیچ یک از دو نفر بیش‌تر از ده دقیقه معطل نشوند، باید: $|x-y| \leq 10$ بنابراین، پیشامد A به صورت

$$A = \{(x, y) \in S | |x-y| \leq 10\}$$

هندسی S و A در شکل ذیل مشخص شده است:

جمشید است. اگر x و y را زمان رسیدن این دو نفر به آزمایشگاه در نظر بگیریم و ساعت ۷ صبح را مبدأ (زمان صفر) فرض کنیم، خواهیم داشت:

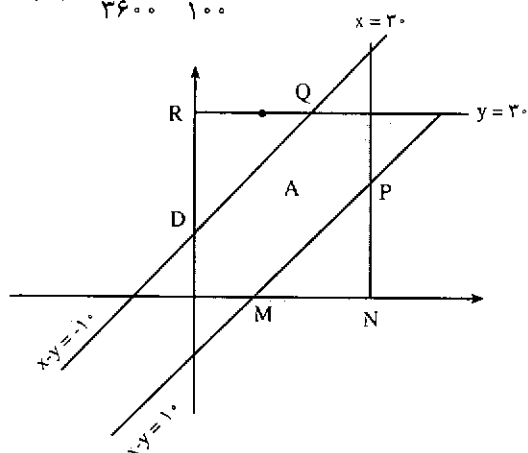
$$S = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$$

$$A = \{(x, y) \in S | |x - y| < 6\}$$

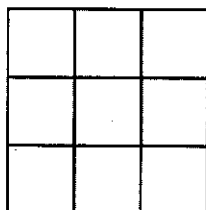
$$a_A = a_S - (S_{MNP} + S_{QRL})$$

$$\Rightarrow a_A = 3600 - (2 \times \frac{54 \times 54}{2}) = 684$$

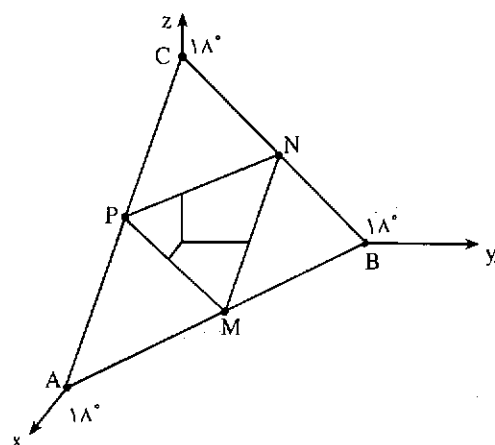
$$P(A) = \frac{684}{3600} = \frac{19}{100}$$



مسئله ۶. سکه ای به شعاع ۵ سانتی متر را روی صفحه ی شطرنجی شکل زیر که هر ضلع آن ۶ سانتی متر است، پرتاب کرده ایم. احتمال این که سکه درون مربع های سفید قرار گیرد، کدام است؟ (این مسئله نیز به صورت تست در کنکور سراسری ۸۴-۸۳ طرح شده بود.)



حل: ابتدا احتمال آن را حساب می کنیم که سکه ای به شعاع ۵/۵ سانتی متر به تمامی درون مربعی به شعاع ۲ سانتی متر قرار بگیرد. در این حالت باید فاصله ی مرکز سکه



مشخص کنیم و محدوده های (NP, MN, MP) را به دست آوریم که در شکل بالا $x > 90$ ، $y > 90$ و $z > 90$ را به دست آوریم که در شکل بالا هاشور خورده اند. برای محاسبه ی مساحت قسمت های هاشور خورده، به مختصات نقاط M, N, P نیاز داریم که به راحتی قابل محاسبه اند. برای مثال، نقطه ی N محل برخورد سه صفحه ی $x + y + z = 180$ و $x = 0$ و $z = 90$ است:

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \\ x = 0 \\ z = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 90 \\ 90 \\ 90 \end{matrix}$$

به همین ترتیب $M \begin{pmatrix} 90 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $P \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 90 \end{pmatrix}$ مشخص می شوند.

$$a_A = a_{ABC} - a_{MNP} = \frac{180^2 \times \sqrt{3}}{2} - \frac{90^2 \times \sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times 90^2 \times \sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{3 \times 90^2 \times \sqrt{3}}{2}}{\frac{4 \times 90^2 \times \sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{4}$$

مسئله ۵. دو نفر قرار گذاشته اند که بین ساعت های ۷ و ۸ صبح در آزمایشگاهی حاضر شوند. هر کدام زودتر رسید، فقط ۶ دقیقه منتظر دیگری باشد و سپس کار خود را شروع کند. با کدام احتمال این دو نفر قبل از شروع کار یکدیگر را ملاقات می کنند؟

حل: این مسئله که به صورت تست در کنکور سراسری ۸۴-۸۳ طرح شده بود، شبیه به مسئله ی ملاقات بهزاد و

$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{36}$$

تا محیط مربع بیش‌تر از ۵/۰ سانتی باشد. یعنی مطابق شکل زیر باید مرکز سکه داخل مربعی به ضلع ۱ قرار گیرد که احتمال آن برابر است با:

1	B	

$$P(B) = \frac{a_B}{a_S} = \frac{1}{4}$$

معمای فکری و منطقی



A, B, M, و S، نام‌های چهار نفر هستند که در طبقات متفاوت یک ساختمان ۱۸ طبقه دفتر دارند. یکی از آن‌ها حسابدار، یکی معمار، یکی دندانپزشک، و یکی هم وکیل دادگستری است.

دفتر A بالاتر از دفتر M است، گرچه پائین‌تر از دفتر S قرار دارد.

دفتر B زیر دفتر دندانپزشک است.

دفتر S پنج بار بالاتر از دفتر وکیل دادگستری است.

اگر قرار باشد معمار دو طبقه بالاتر برود، در نیمه راه دفترهای دندانپزشک و حسابدار واقع می‌شود، و اگر دفترش را نیم فاصله پائین ببرد، در نیمه راه دفترهای دندانپزشک و وکیل دادگستری قرار می‌گیرد.

در این ساختمان خاص طبقه‌ی همکف به مغازه‌های گوناگون اختصاص یافته است و شامل هیچ دفتری نیست. در نتیجه، تا آن‌جا که به دفترهای واقع در ساختمان مربوط است، طبقه‌ی اول، طبقه‌ی بلافاصله بالای طبقه‌ی همکف است.

حرفه‌ی هر شخص چیست، و محل دفتر هر کدام در چه طبقه‌ای است؟

၎င်းတို့သည် ၁၈၆၅ ခုနှစ်၊ ဇူလိုင်လ ၁ ရက်နေ့တွင် ဖမ်းဆီးခံရပြီးနောက်
 နေပြည်တော်ရှိ နိုင်ငံတော်အမှုဆောင်ရုံးသို့ ပို့ဆောင်ခံရသည်။