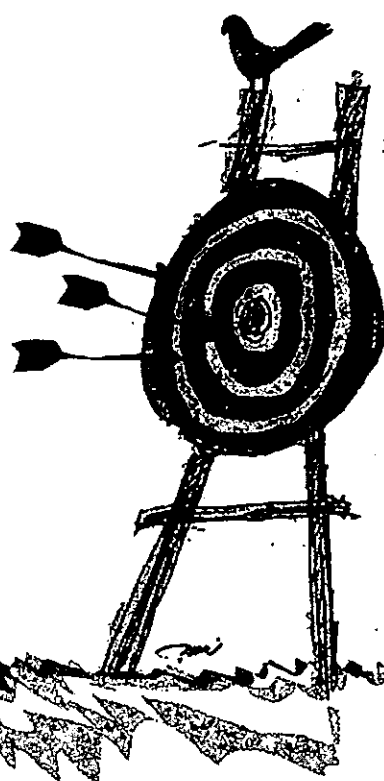




مجمد رضا امیری



مسائلی از احتمال در فضاهای پیوسته



شاید ساده ترین بیان برای تعریف فضاها یا مجموعه های پیوسته چنین باشد: فضای پیوسته به فضایی گفته می شود که اندازه گیری در آن، با شمارش امکان پذیر نباشد. در واقع، بعضی از فضاها برای اندازه گیری، مقیاس های اندازه گیری خاص خودشان را دارند و با همان مقیاس ها اندازه گیری می شوند؛ مثل: طول، سطح، حجم، وزن، زمان و... برای مثال، ما هیچ گاه نمی گوئیم طول آن درخت چندتاست! یا سطح این اتاق چندتاست! بلکه اولی را با متر و دومی را با متر مربع، حجم را با متر مکعب وزن را با کیلو گرم و زمان را با ثانیه یا ساعت اندازه گیری می کنیم. به چنین فضاهایی فضای پیوسته می گوئیم.

واضح است که اگر پدیده هایی تصادفی در فضاهای

پیوسته رخ بدهند، فرمول $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ به کار نمی آید،

زیرا $n(A)$ یعنی تعداد اعضای A و $n(S)$ یعنی تعداد اعضای S و می دانیم که تعداد (شمارش) در فضاهای پیوسته بی معنی است. بنابراین، احتمال رخداد A در فضای پیوسته ی S بر حسب این که S فضایی طولی، سطحی، حجمی، وزنی یا زمانی باشد، به یکی از این صورت ها محاسبه می شود:

$$I) \rightarrow P(A) = \frac{l_A}{l_S} \text{ در فضاهای طولی}$$

$$II) \rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} \text{ در فضاهای سطحی}$$

$$III) \rightarrow P(A) = \frac{V_A}{V_S} \text{ در فضاهای حجمی}$$

$$IV) \rightarrow P(A) = \frac{w_A}{w_S} \text{ در فضاهای وزنی}$$

$$V) \rightarrow P(A) = \frac{t_A}{t_S} \text{ در فضاهای زمانی}$$

در حل مسائل احتمال در فضاهای پیوسته، غالباً از اطلاعات دیگری در زمینه های جبر، هندسه و هندسه تحلیلی باید استفاده کنیم که همین موضوع، گاهی اوقات دانش آموزان را آزار می دهد. ولی اگر اطلاعات ما در زمینه های لازم (در حد مقدماتی) کافی باشد، حل مسائل احتمال در فضاهای پیوسته چندان مشکل نیست. سعی می کنم با طرح و حل مسائلی، تا حد امکان این مشکل را ساده کنم. در حل مسأله ها کوشش کرده ام، نکته ها و ظرافت های موجود را نیز تذکر دهم.

مسأله ی ۱. عددی (عدد حقیقی) به تصادف از بازه ی $[-6, 8]$ انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال آن که عدد انتخاب شده:

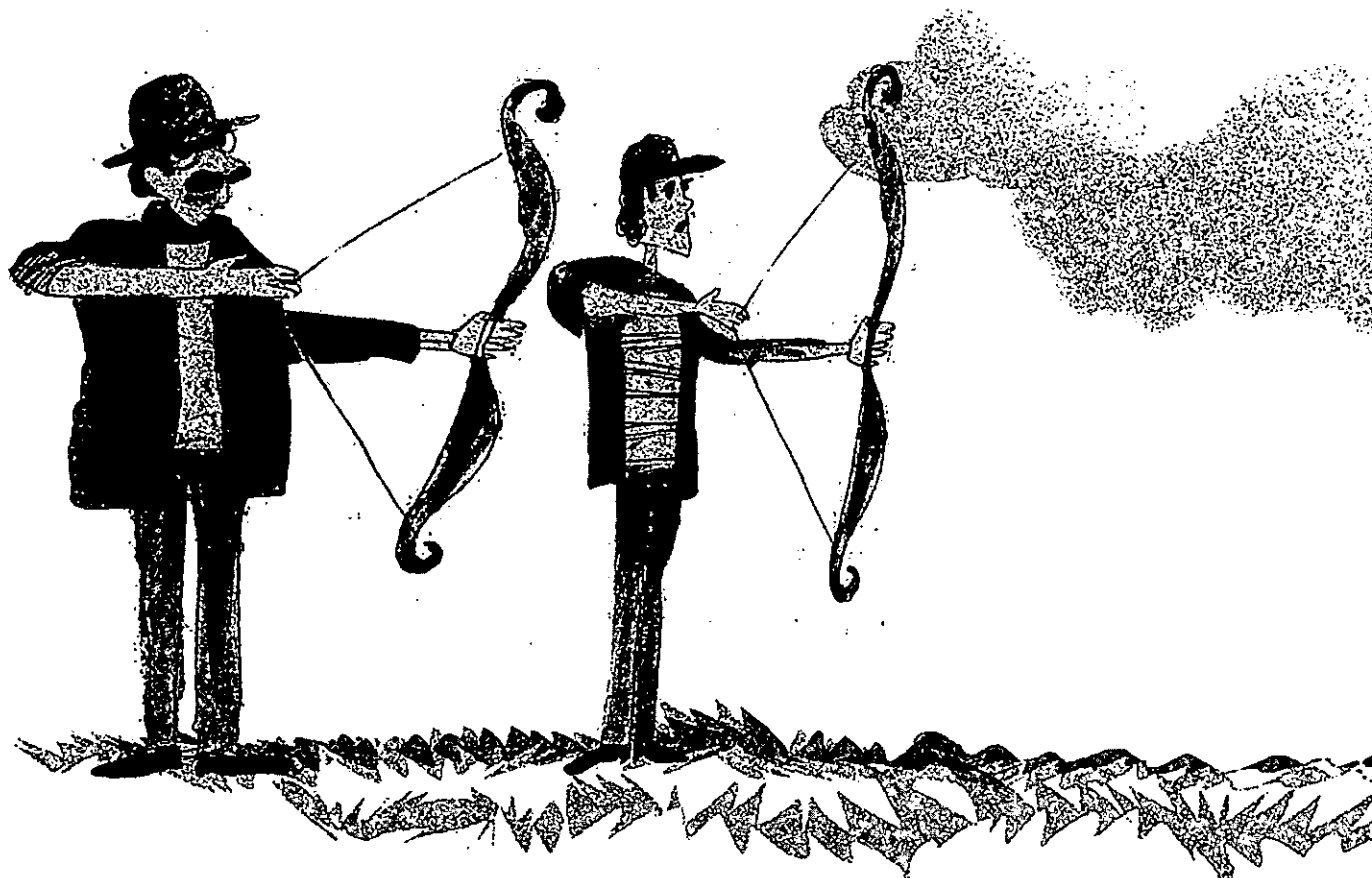
الف) مثبت باشد.

ب) بزرگ تر از ۵ باشد.

ج) بین ۱ و ۲ باشد.

د) صحیح باشد.

ه) بین ۶- و ۸ باشد $(-6 < x < 8)$.



$$د) A = \{-5, -4, -3, \dots, 7, 8\} \Rightarrow I_A = 0$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{0}{14} = 0$$

نظر تان در مورد قسمت (د) چیست؟

بله، احتمال این که از بازه‌ی $[-6, 8]$ عدد صحیح انتخاب شود، صفر است! البته مشاهده می‌کنید که مجموعه‌ی A دارای ۱۴ عضو است. شاید فکر کنید، حالا آمدم و عدد صحیحی مانند ۵ انتخاب شد، آیا این امکان وجود دارد؟!

حل مسأله به احتمال صفر منتهی شد، یعنی احتمال رخداد این پشامد صفر است و این در فضای پیوسته خیلی با فضای گسسته فرق دارد. از نظر شهودی، به دو طریق می‌توان به این ابهام پاسخ داد: اول این که ما می‌گوییم، احتمال رخداد صفر است. مثلاً وقتی حتی در فضای گسسته می‌گوییم، احتمال این که تاسی را بریزیم و عدد ۲ بیاید، $\frac{1}{6}$ است، یعنی چه؟ آیا به این معناست که اگر ۶ بار تاسی را بریزیم، حتماً باید یک بار ۲ بیاید؟ خیر، این طور نیست. در واقع، عدد $\frac{1}{6}$ به نوعی یک میانگین یا توقع ما از آمدن ۲ در ۶ بار پرتاب تاس است. بدین معنی که اگر تاسی را ۶ بار بریزیم و تعداد ۲ را در این شش بار پرتاب یادداشت کنیم، و این آزمایش (آزمایش ۶

حل: اگر فضای نمونه‌ای را S بنامیم، داریم:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | -6 < x \leq 8\}$$

و می‌دانیم، بازه‌ها یا فاصله‌ها در اعداد حقیقی، مجموعه‌هایی پیوسته و دارای طول معینی هستند. همچنین می‌دانیم، نقطه یا مجموعه نقاط متناهی و یا حتی مجموعه نقاط نامتناهی ولی گسسته، دارای طول صفر هستند. برای مثال، طول مجموعه‌ی اعداد طبیعی یا طول مجموعه‌ی اعداد صحیح صفر است.

بنابراین، طول بازه‌ی $[-6, 8]$ برابر با ۱۴، و با طول بازه‌های $(-6, 8)$ ، $(-6, 8]$ و $[-6, 8]$ برابر است. حتی طول مجموعه‌ی $(-6, -5) \cup (-5, -4) \cup \dots \cup (7, 8)$ نیز ۱۴ است. پس در این مسأله داریم:

$$a_s = 14$$

$$\text{الف) } A = \{x \in S | 0 < x \leq 8\} \Rightarrow I_A = 8$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

$$\text{ب) } A = \{x \in S | 5 < x \leq 8\} \Rightarrow I_A = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{14}$$

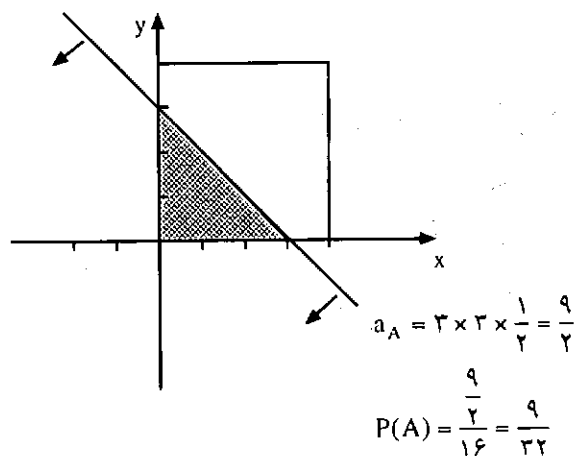
$$\text{ج) } A = \{x \in S | 1 < x < 2\} \Rightarrow I_A = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{14}$$

واضح است که مجموعه‌ی S دارای سطح است که همان سطح مربعی است به طول ضلع ۴ و مساحت S برابر است با: $16 = 4^2$ ؛ یعنی $a_s = 16$.

الف) باید مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x+y < 3$ را که یک نیم صفحه است، مشخص کنیم، سپس اشتراک آن را با S به دست آوریم و مساحت این فصل مشترک را بر مساحت S تقسیم کنیم.

تذکر مهم: برای مشخص کردن مجموعه‌ی جواب نامعادلاتی به صورت $ax+by > c$ یا $ax+by < c$ ، کافی است نمودار خط $ax+by=c$ را رسم کنیم و نقطه‌ای دلخواه را از یکی از دو نیم صفحه‌ای که خط در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ ایجاد کرده است، در نظر بگیریم و مختصات آن را در نامعادله قرار دهیم. اگر صدق کند، همان نیم صفحه‌ای که شامل آن نقطه است، مجموعه‌ی جواب را تشکیل می‌دهد و اگر صدق نکند، نیم صفحه‌ی دیگر، مجموعه‌ی جواب است.

صدق می‌کند $3 < 0+0 \Rightarrow$ نقطه اختیاری 0 .
(منطقه‌ی جواب با پیکان مشخص شده است.)



ب) در این قسمت باید $2 < x+y < 4$ باشد که به حل دو نامعادله‌ی $x+y > 2$ و $x+y < 4$ می‌انجامد. از اشتراک مجموعه جواب‌های این دو نامعادله با S باید اشتراک گرفته

بار ریختن تاس و یادداشت تعداد ۲ در هر آزمایش را ۲۰ بار تکرار کنیم و در این ۱۲۰ بار ریختن تاس، تعداد روشن شدن‌های ۲، مثلاً مساوی با ۱۸ بار باشد، با تقسیم ۱۸ بر ۱۲۰ به کسر $\frac{18}{120}$ می‌رسیم. و اگر این آزمایش را ۵۰ بار تکرار کنیم و تعداد روشن شدن‌های ۲ را در این ۳۰۰ بار ریختن تاس یادداشت و بر ۳۰۰ تقسیم کنیم، به کسری می‌رسیم که این کسر کم به عدد $\frac{1}{6}$ میل خواهد کرد. و در نهایت، اگر تعداد آزمایش‌ها بی‌شمار باشد، مساوی با $\frac{1}{6}$ خواهد بود؟

پاسخ شهودی دیگر، نگاه ما به مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین ۶- و ۸+ است که اگر این نگاه حقیقی باشد (بین هر دو عدد حقیقی، بی‌نهایت عدد حقیقی موجود است) و با این نگاه، یکی از این بی‌نهایت عدد را که ۱۴ تای آن‌ها صحیح است انتخاب کنیم، چه قدر احتمال دارد، عدد صحیح انتخاب شود؟!؟

تذکر مهم: در فضاها پیوسته، از $P(A)=0$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A = \emptyset$ و از $P(A)=1$ نمی‌توان نتیجه گرفت که: $A=S$.

$$\text{د) } A = \{x \in S \mid -6 < x < 8\} \Rightarrow I_A = 14 \Rightarrow P(A) = \frac{14}{16}$$

(دیدیم که $P(A)=1$ ولی $A \neq S$)

مسئله‌ی ۲. دو عدد x و y را به تصادف از بازه‌ی (۰ و ۴) انتخاب می‌کنیم. چه قدر احتمال دارد:

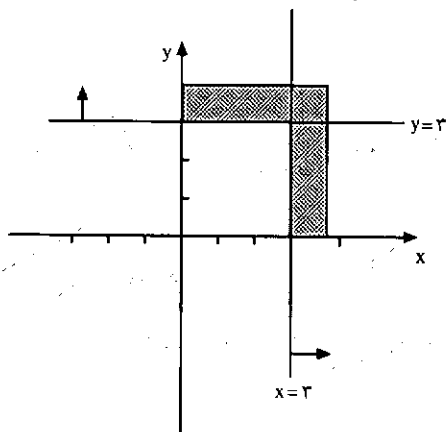
- الف) مجموع دو عدد کوچک‌تر از ۳ باشد.
- ب) مجموع دو عدد بین ۲ و ۴ باشد.
- ج) مجموع دو عدد مساوی با ۴ باشد.
- د) فاصله‌ی دو عدد (قدر مطلق تفاضل آن‌ها) کوچک‌تر از ۳ باشد.

هـ) حداقل یکی از دو عدد بزرگ‌تر از ۳ باشد.

حل: چون هم x و هم y از بازه‌ی (۰ و ۴) انتخاب می‌شوند، پس می‌توان فضای نمونه‌ای را به صورت زیر تعریف کرد:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 4, 0 < y < 4\} = (0, 4) \times (0, 4)$$

هـ) طبق فرض باید $x > 3$ یا $y > 3$ باشد که باید از اجتماع دو مجموعه جواب نامساوی ها با S ، اشتراک گرفته شود:

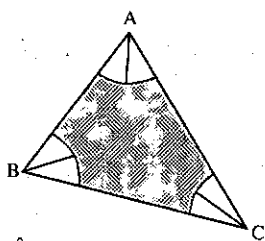


$$a_A = 16 - 9 = 7 = \text{مساحت منطقه‌ی هاشور خورده}$$

$$P(A) = \frac{7}{16}$$

مسأله‌ی ۳. اگر نقطه‌ای به تصادف از داخل سطح مثلثی با مساحت K انتخاب کنیم، چه قدر احتمال دارد فاصله‌ی این نقطه تا هر یک از رأس‌های مثلث بیش‌تر از l باشد (طول هر ضلع مثلث بزرگ‌تر از $2l$ است).

حل: ابتدا به مرکز هر یک از رأس‌ها و به شعاع l ، دایره‌هایی می‌زنیم تا مطابق شکل، منطقه‌ی موردنظر و مطلوب را که قسمت هاشور خورده است، مشخص کنیم.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

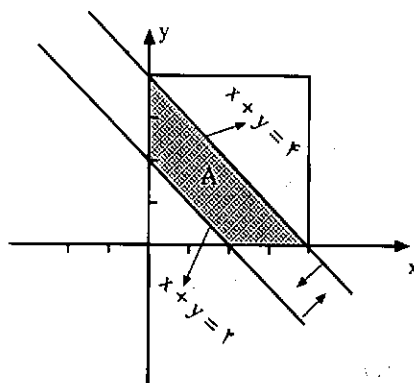
$$\text{مساحت دایره به شعاع } l = \frac{1}{4} \times \pi l^2 = \text{مساحت سه قطاع}$$

$$= \frac{1}{4} \times \pi l^2 = \text{مساحت سه قطاع}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشور خورده} = K - \frac{\pi l^2}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{K - \frac{\pi l^2}{4}}{K}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{\pi l^2}{4K}$$

شود و مساحت حاصل را به دست آوریم:



$$S = 16 - 8 - 2 = 6 \quad (\text{مساحت دوزنقه})$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(مساحت دو مثلث را از مساحت مربع کم کردیم تا

مساحت دوزنقه به دست آید.)

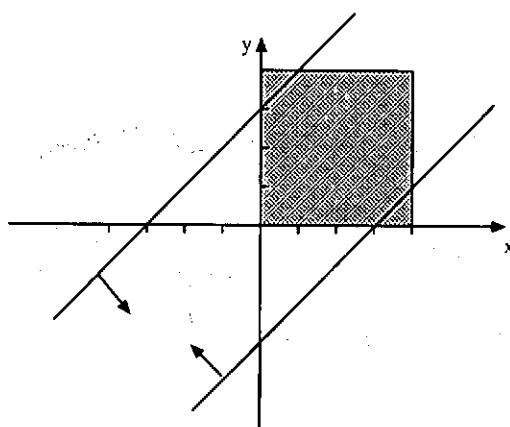
ج) باید مجموع دو عدد مساوی با ۴ باشد؛ یعنی $x+y=4$ که اشتراک این خط با مربع، پاره‌خطی با مساحت صفر است و در نتیجه:

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{0}{16} = 0$$

د) باید $|x-y| < 3$ باشد. این نامعادله به دو نامعادله‌ی

$$-3 < x-y < 3 \quad \text{یا} \quad x-y < 3 \quad \text{و} \quad x-y > -3 \quad \text{می‌انجامد که}$$

روی شکل مشخص کرده ایم:



$$a_A = 16 - (1 \times 1 \times \frac{1}{2}) - (1 \times 1 \times \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow a_A = 16 - 1 = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{15}{16}$$

مسئله ۴. سکه‌ای به شعاع ۲ را روی صفحه‌ی دایره‌ای شکل به شعاع ۸ پرتاب می‌کنیم. با فرض این که سکه به تمامی خارج صفحه قرار نگیرد، مطلوب است احتمال آن که:

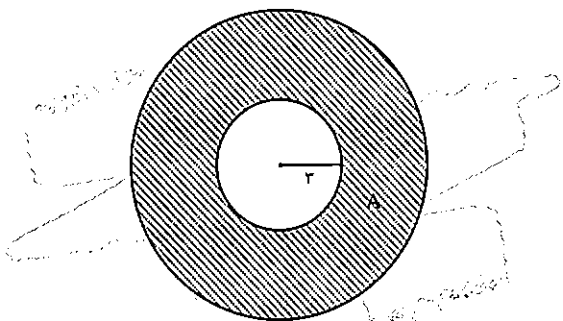
(الف) سکه به تمامی داخل صفحه واقع شود.

(ب) سکه روی مرکز صفحه را بپوشاند.

(ج) فاصله‌ی مرکز سکه تا مرکز صفحه بیش‌تر از ۳ باشد.

(اگر مرکز سکه روی محیط دایره‌ای به شعاع ۲ واقع شود، سکه بر مرکز صفحه مماس می‌شود.)

(ج) در این حالت، مرکز سکه باید در خارج از دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز، مرکز صفحه واقع شود که مطابق شکل، قسمت هاشور خورده منطقه‌ی مطلوب است که آن را A می‌نامیم:



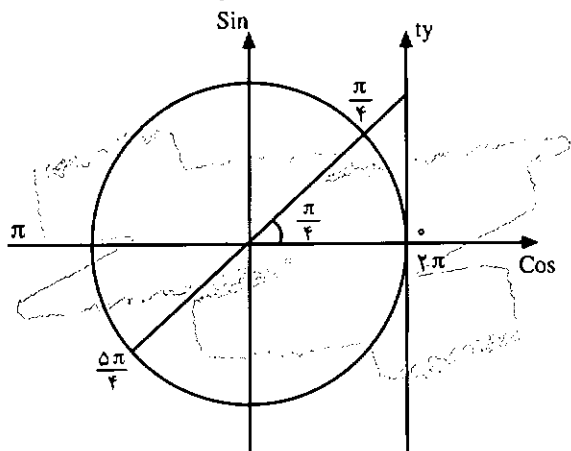
$$a_A = 64\pi - 9\pi = 55\pi$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{55\pi}{64\pi} = \frac{55}{64}$$

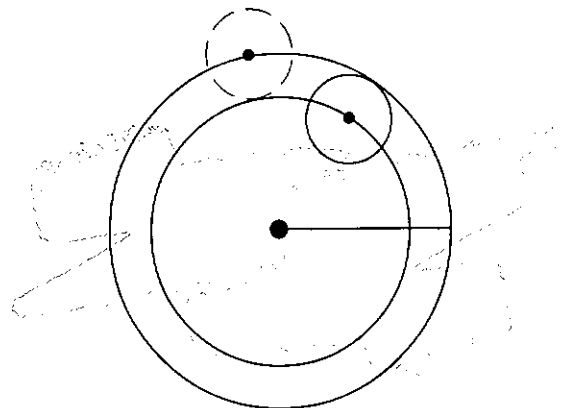
مسئله ۵. عددی مانند x را به تصادف از بازه‌ی $[0, 2\pi]$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که:

(الف) $\sin x < \frac{1}{2}$ ؛ (ب) $\tan x \leq 1$ ؛ (ج) $\cos x > \frac{1}{2}$

حل: چون یک عدد به تصادف از یک بازه انتخاب می‌کنیم، پس فضای نمونه‌ای دارای طول است که همان طول بازه، یعنی 2π می‌باشد. و اگر این بازه را به صورت یک دایره درآوریم، محیط دایره‌ای به شعاع ۱ را تشکیل می‌دهد.

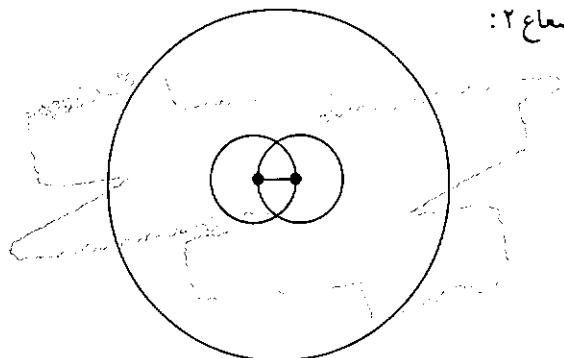


حل: (الف) مطابق شکل، اگر دایره‌ای به شعاع $2-6=8$ و به مرکز صفحه رسم کنیم، معلوم می‌شود: در صورتی که مرکز سکه خارج دایره‌ی رسم شده واقع شود، سکه حتماً محیط صفحه را قطع می‌کند. پس منطقه‌ی جواب سطح دایره‌ای است به شعاع ۶:



$$a_A = 36\pi \Rightarrow P(A) = \frac{36\pi}{64\pi} = \frac{9}{16}$$

(ب) برای این که سکه مرکز دایره را بپوشاند، کافی است مرکز سکه داخل سطح دایره‌ای به شعاع ۲ واقع شود. پس مساحت مطلوب مطابق شکل، مساحت دایره‌ای است به شعاع ۲:



$$a_A = 4\pi \Rightarrow P(A) = \frac{4\pi}{64\pi} = \frac{1}{16}$$

و نیز اگر: $x \in (-\frac{\pi}{3}, 0)$ ، در این صورت: $\frac{1}{2} < \cos < 1$.
پس طول بازه‌ی موردنظر عبارت است از:

$$I_A = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$$

مسئله‌ی ۶. شخصی به سمت یک هدف دایره شکل مطابق نمودار زیر به طور تصادفی تیراندازی می‌کند. اگر قسمت قرمز رنگ ۱۰ امتیاز، قسمت آبی رنگ ۸ امتیاز، قسمت نارنجی رنگ ۶ امتیاز، قسمت سبز رنگ ۵ امتیاز و قسمت زرد رنگ ۴ امتیاز داشته باشد، در این صورت چه قدر احتمال دارد:

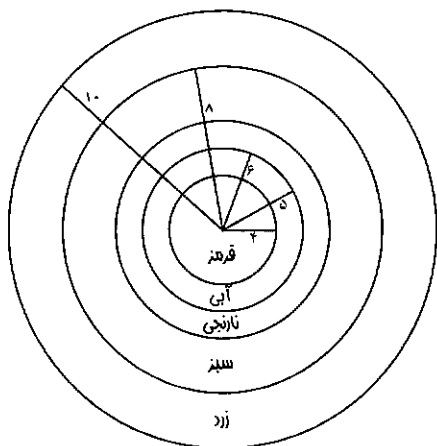
(الف) با شلیک ۲ تیر حداقل ۱۶ امتیاز بگیرد.

(ب) با شلیک ۳ تیر ۲۲ امتیاز بگیرد.

(فرض بر این است که هر تیر این شخص به صفحه‌ی دایره

شکل اصابت می‌کند.)

حل: (الف) حداقل ۱۶ امتیاز، یعنی ۱۶ امتیاز، یا ۱۸ امتیاز و یا ۲۰ امتیاز. به عبارت دیگر، برای این که ۱۶ امتیاز بگیرد، باید هر دو تیر او به منطقه‌ی ۸ امتیازی، یا یک تیر به منطقه‌ی ۱۰ امتیازی و یک تیر به منطقه‌ی ۶ امتیازی اصابت کند. برای کسب ۱۸ امتیاز باید یک تیر را به منطقه‌ی ۱۰ امتیازی (قرمز رنگ) و یک تیر را به منطقه‌ی ۸ امتیازی (آبی رنگ) بزند. و برای کسب ۲۰ امتیاز، باید هر دو تیر او در



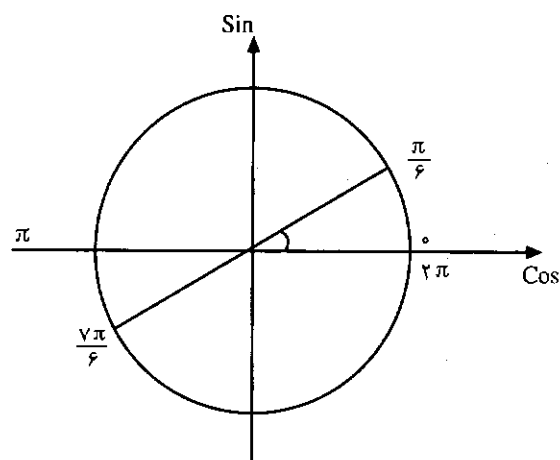
(الف) اگر x در فاصله‌ی $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ یا در فاصله‌ی $[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$ همواره $0 \leq \tan x \leq 1$ ، و اگر در ناحیه‌ی دوم یا ناحیه‌ی چهارم انتخاب شود نیز، $\tan x \leq 1$ خواهد بود؛ زیرا در این دو ناحیه $\tan x < 0$ است. پس:

$$I_A = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{I_A}{I_S} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi} = \frac{3}{4}$$

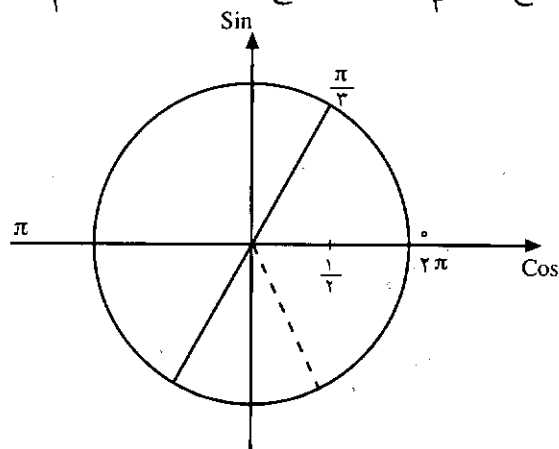
(ب) برای آن که $\frac{1}{2} < \sin x < 1$ باشد، مطابق شکل، باید

x از بازه‌ی $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ یا $(\frac{5\pi}{6}, \pi)$ انتخاب شود؛ پس:

$$I_A = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{6}$$



(ج) اگر $x \in (0, \frac{\pi}{3})$ ، واضح است که: $\frac{1}{2} < \cos < 1$.



منطقه ی ۱۰ امتیازی (دایره ای به شعاع ۴) بنشینند.

از طرف دیگر، می دانیم که مساحت کل یا a_3 برابر با

مساحت دایره به شعاع ۱۰ است؛ پس: $a_3 = 100\pi$

(مساحت دایره به شعاع ۴) - (مساحت دایره به شعاع ۵) = مساحت قسمت آبی

$$a_{\text{آبی}} = 25\pi - 16\pi = 9\pi$$

(مساحت دایره به شعاع ۵) - (مساحت دایره به شعاع ۶) = $a_{\text{نارنجی}}$

$$= 36\pi - 25\pi = 11\pi$$

$$P(\text{امتیاز } 20) = P(\text{امتیاز } 18) + P(\text{امتیاز } 16) + P(\text{امتیاز } 14)$$

$$= \left[\left(\frac{9\pi}{100\pi} \times \frac{9\pi}{100\pi} \right) + 2 \left(\frac{16\pi}{100\pi} \times \frac{11\pi}{100\pi} \right) \right]$$

تیر ۱ و دیگری ۶ امتیازی

هر دو تیر ۸ امتیازی

$$+ \left[2 \times \left(\frac{16\pi}{100\pi} \times \frac{9\pi}{100\pi} \right) + \left(\frac{16\pi}{100\pi} \times \frac{16\pi}{100\pi} \right) \right]$$

هر دو تیر ۱۰ امتیازی

۱۰ و دیگری ۸ امتیاز

$$= \frac{81}{10000} + \frac{176}{10000} \times 2 + \frac{144}{10000} \times 2 + \frac{256}{10000} = \frac{977}{10000}$$

ب) حالت های ممکن برای کسب ۲۲ امتیاز به

صورت های زیرند:

۱. اصابت تیر به قسمت های ۱۰، ۸ و ۴ امتیازی که به شش

طریق امکانپذیر است (اول ۱۰، دوم ۸ و سوم ۴

امتیازی، یا اول ۱۰، دوم ۴ و سوم ۸ یا ...).

۲. اصابت دو تیر به قسمت های ۸ و ۱ تیر به قسمت ۶

امتیازی که به سه طریق امکانپذیر است.

۳. اصابت دو تیر به قسمت ۶ امتیازی و ۱ تیر به قسمت ۱۰

امتیازی که به سه طریق امکانپذیر است.

(مساحت قسمت ۴ امتیازی) $a_{\text{زرد}} = 100\pi - 64\pi = 36\pi$

$$P(\text{امتیاز } 22) = \left[6 \times \left(\frac{16}{100} \times \frac{9}{100} \times \frac{36}{100} \right) \right]$$

$$+ \left[3 \times \left(\frac{9}{100} \times \frac{9}{100} \times \frac{11}{100} \right) \right] + \left[3 \times \left(\frac{11}{100} \times \frac{11}{100} \times \frac{16}{100} \right) \right]$$

$$P(\text{امتیاز } 22) = \frac{39585}{1000000}$$

مسأله ی ۷. سه عدد x ، y و z به تصادف از بازه ی $[0, 4]$

انتخاب می شوند. چه قدر احتمال دارد:

الف) $z > 3$ ؛ ب) $z > 3$ و $y > 2$ ؛ ج) $z > 2$ و $y > 2$ و $x > 2$

حل: فضای نمونه ای، یعنی $S = \{(x, y, z) | x, y, z \in [0, 4]\}$

عبارت است از مجموعه ی نقاطی از فضای سه بعدی که داخل

یک مکعب به ضلع ۴ قرار دارند (حجم مکعبی به ضلع ۴)؛

$$\text{پس: } V_S = 4^3 = 64$$

الف) چون باید $z > 3$ ، پس: $3 < z \leq 4$. و حجم مطلوب

عبارت است از حجم مکعب مستطیلی به طول ۴، عرض ۴ و

ارتفاع ۱؛ یعنی: $V_A = 4 \times 4 \times 1$. در نتیجه:

$$P(A) = \frac{V_A}{V_S} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

ب) باید $z > 3$ و $y > 2$ ، پس باید: $3 < z \leq 4$ و

$2 < y \leq 4$. بنابراین، حجم مطلوب عبارت است از حجم

مکعب مستطیلی به طول ۴، عرض ۲ و ارتفاع ۱؛ یعنی:

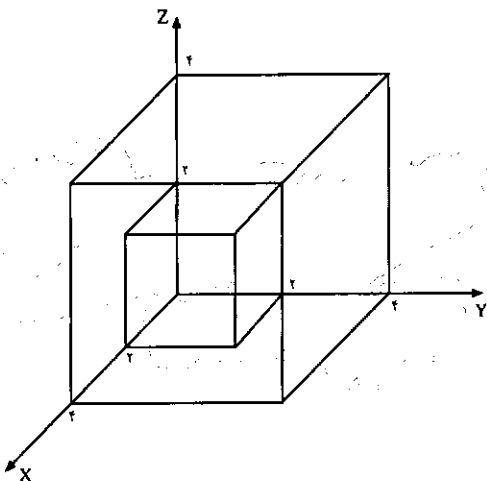
$$P(B) = \frac{V_B}{V_S} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} \quad \text{پس: } V_B = 4 \times 2 \times 1$$

ج) در این قسمت باید: $2 < x \leq 4$ ، $2 < y \leq 4$ و

$2 < z \leq 4$. پس حجم مطلوب حجم مکعبی است به طول،

عرض و ارتفاع ۲؛ یعنی: $V_C = 2 \times 2 \times 2$.

$$P(C) = \frac{V_C}{V_S} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} \quad \text{پس:}$$



حالا که با مقدمات احتمال در فضاهای پیوسته آشنا

شدیم، در شماره های بعدی سعی می کنیم مثال های

پیشرفته تر و متفاوت تری طرح و حل کنیم؛ مسائلی در

زمینه های هندسی، زمان و مسائل معروف در فضاهای

پیوسته. پس تا شماره ی بعد!