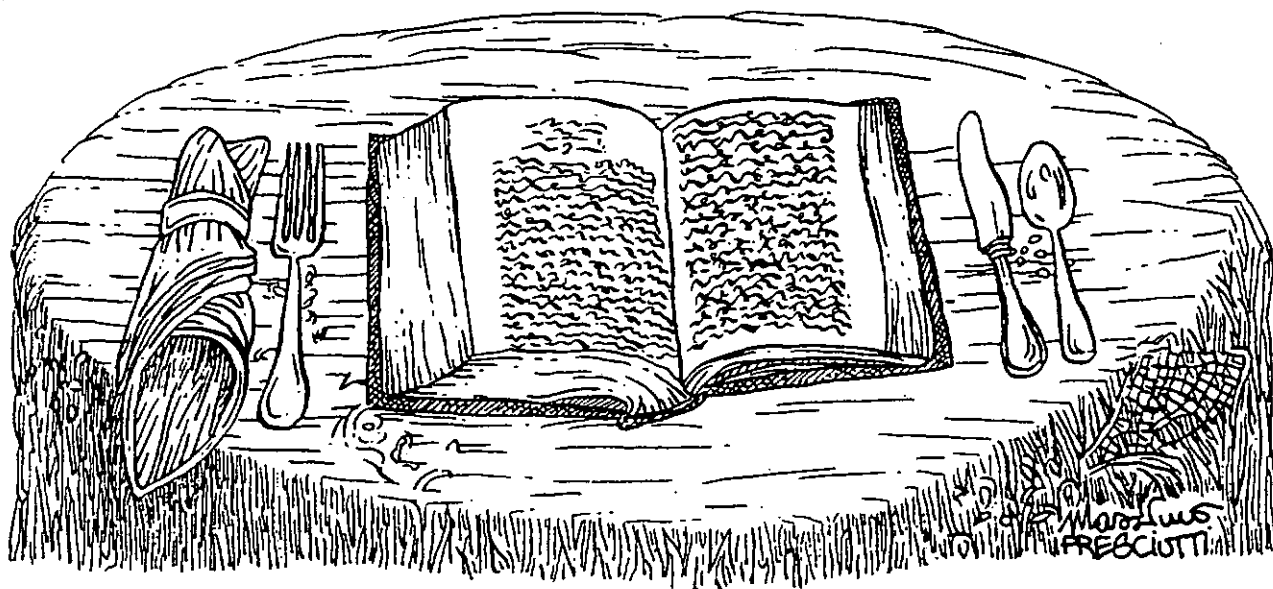




مسأله حلّ مسأله های ریاضی (۵)

● عبدالحسین مصحفی

تمرین آزمونهای با پرسشهای چندگزینه ای

پرسشهایی را که پاسخ درست نداده اید، به چه علت بوده است و چه نکته یا نکته هایی را متوجه نبوده اید. پس از این مرحله، بار دیگر مرحله خودآزمایی را تکرار می کنید و این بار معلوم می کنید چند امتیاز بیشتر از بار قبل به دست می آورید. فرایند دو مرحله ای خودآزمایی و خودورزی را اگر لازم بدانید، تکرار می کنید تا این که امتیازی را در خودآزمایی به دست آورید که خوشایندتان باشد.

خودآزمایی

برای هر مجموعه، پرسشهای ریاضی (یا درسی دیگر) از آزمونهای انجام گرفته که در دسترس دارید، به ترتیب زیر عمل کنید:

۱. جدولی به شکل صفحه بعد را، که آن را جدول ارزشیابی می نامیم، رسم کنید و آماده داشته باشید:
- تعداد پرسشها برابر با ۶۰ فرض شده است.
۲. یک ساعت را روبه روی خود بگذارید، فرض کنید در

به کامیابی در یک آزمون، آن گاه می توانید امیدوار باشید که برای آن هم مجهز شده و هم خود را ورزیده کرده باشید. آنچه را آموخته اید، بویژه با توجه به نکته های درآمیخته با آنها را، اگر خوب فهمیده و خوب به خاطر سپرده باشید، و مسأله هایی هر چه بیشتر را در زمینه آن آموخته ها اگر حل کرده باشید، خود را مجهز کرده اید. برای آن که ورزیده هم باشید، یک روش نتیجه بخش آن است که آزمونهای همسان آن آزمون را که بناست در آن شرکت کنید، تمرین کنید. این تمرین را از هر راه که انجام دهید، آن گاه ورزیدگی شما را در بی خواهد داشت که ذهن شما را به کنشها و واکنشهای لازم وادارد. برای این کار، لازم است که هر تمرین در دو مرحله خودآزمایی و خودورزی انجام گیرد. در مرحله خودآزمایی، به سان آن که در جلسه آزمون هستید، عمل می کنید و جمع امتیازی را که به دست می آورید، حساب می کنید. در مرحله خودورزی، با مراجعه به کتابهای درسی و کمک درسی، و به یادداشتهایی که در آن زمینه ها داشته اید، معلوم می کنید آن

درست داده باشید، ۱۴ پرسش را با پاسخ نادرست داده‌اید یا اصلاً پاسخ نداده‌اید و درصد امتیاز شما می‌شود :

$$\frac{(36 \times 3 - 14) \times 100}{180} = 52/22 \rightarrow 52/22\%$$

خودورزی

امتیازی را که به دست آورده‌اید، خوشایند نمی‌یابید؛ دلیلی است بر این که به گونه شایسته و بایسته آمادگی نداشته‌اید و برای بهتر آماده شدن، باید تلاش کنید. پرسشهای آزمون آزمایشی، بویژه آنهایی که نمره مثبت نیاورده‌اند، راهنمای خوبی برای جهت دادن به تلاش شما و ابزار کارآمدی برای فراهم کردن آمادگی شما به شمار می‌آیند. در هر فرصت مناسب و در هر موقع که خسته نباشید و فکرتان به چیزی دیگر مشغول نباشد، پرسشها را از آغاز و بترتیب، یکی یکی انتخاب کنید. پرسش انتخابی یا سؤالی درباره یک موضوع از متن یکی از درسهاست یا یک مسأله ساده به نظر می‌رسد و یا می‌توان آن را به صورت یک مسأله ساده بیان کرد. این مسأله هم در زمینه یکی از موضوعهای درسی است؛ بنابراین، با انتخاب هر پرسش، دست کم با یکی از موضوعهای درسی سروکار خواهید داشت. در کتابهای درسی و کمک درسی، و در یادداشتهایی که دارید، آن موضوع درسی را بیابید، آن را با دقت مطالعه کنید، تمرینها و مسأله‌های مربوط به آن و حل آنها را از نظر بگذرانید و سرانجام معلوم کنید پاسخ پرسش انتخابی چیست یا چگونه به دست می‌آید و آن را به دست آورید. این کار، گونه‌ای بازآموزی و بازشناخت درسها برای شما خواهد بود و برای آن که هم در ذهنتان بماند و هم در هر بار دیگر بتوانید به آن مراجعه کنید، در یک دفترچه پس از نوشتن شماره پرسش، پاسخ و راه حل آن را یادداشت کنید. درباره هر پرسش دیگر هم به همین گونه عمل کنید.

در زمینه آمادگی برای آزمونهای با پرسشهای چند گزینه‌ای، کلاسهای حضوری یا مکاتبه‌ای نیز وجود دارد. استفاده از این کلاسها آن گاه اثربخش است که کارشان به آزمونهای آزمایشی و محاسبه امتیازها محدود نباشد؛ بلکه درباره موضوع هر پرسش و چگونگی دستیابی به پاسخ درست آن نیز توضیح کافی بدهند. یادداشت کردن این توضیحات و کار دوباره با آنها در خانه نیز،

شماره پرسش	گزینه‌ها				ارزش	
	الف	ب	ج	د	درست	نادرست
۱						
۲						
۵۹						
۶۰						
جمع ارزشها:						

جلسه آزمون هستید، زمانی را که ساعت نشان می‌دهد، در نظر بگیرید و کار را آغاز کنید.

۳. پرسشها را بترتیب و بدقت از نظر بگذرانید و هر کدام را که می‌بینید جوابش ساده است و آن را می‌دانید، در جدول آماده شده در برابر شماره آن پرسش و در ستون گزینه‌ها زیر کد آن پرسش (الف، ب، ج یا د) یک نشانه بگذارید. خود را روی هیچ یک از پرسشها زیاد معطل نکنید. به آخرین پرسش که رسیدید، به آغاز آنها برگردید و آنهایی را که پاسخ نداده‌اید، باز هم هر کدامشان را که آسانتر می‌یابید، بار دیگر مرور کنید و گزینه پذیرفتنی آن را که شناختید، در جدول نشانه بگذارید. این فرایند را تکرار کنید و آن گاه که لحظه پایان مدت زمان آن آزمون (که اگر ۲ ساعت باشد، لحظه پایان ۲ ساعت) فرا رسید، دست از کار بکشید.

۴. جدول خود را با جدول پاسخنامه آزمون بسنجید و در برابر شماره هر پرسش، بنابر آن که انتخاب شما درست باشد یا نادرست، در ستون ارزش، زیر درست یا نادرست نشانه بگذارید. به آخرین شماره که رسیدید، در هر یک از ستونهای درست و نادرست، تعداد نشانه‌ها را بشمارید و عدد به دست آمده را زیر آن ستون یادداشت کنید.

۵. تعداد پاسخهای درست را در ۳ ضرب کنید و از حاصلضرب، تعداد پاسخهای نادرست را کم کنید. عدد به دست آمده، اگر صفر یا منفی باشد، به معنای آن است که هیچ امتیازی به دست نیاورده‌اید، و اگر مثبت باشد، آن را در ۱۰۰ ضرب و بر ۱۸۰ تقسیم کنید. حاصل برابر است با درصد امتیازی که در این خودآزمایی به دست آورده‌اید. برای مثال، اگر ۳۶ پرسش را پاسخ

$a-1$ است، که باید مثبت باشد و مبین معادله هم $\Delta' = b^2 + a - 1$

است، که باید منفی باشد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} a-1 > 0 \\ b^2 + a - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow a > 1, b^2 + a < 1$$

و گزینه (ج) پذیرفتنی است.

$x=2$ برابر با چه مقدار باشد تا کسر زیر، برابر با صفر شود:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x^2 + 6x - 3}$$

الف) $x=1$ یا $x=2$ (ب) تنها آن گاه که $x=2$

ج) تنها آن گاه که $x=1$ (د) $x=-1$ یا $x=-2$

در روبه رویی با این پرسش، بر این باور بوده‌اید که یک کسر آن گاه برابر با صفر است که صورت آن صفر باشد. پس سه جمله‌ای صورت کسر را برابر صفر قرار داده و معادله را حل کرده، جوابهای $x=1$ و $x=2$ را به دست آورده‌اید و بر پایه آن، گزینه (الف) را نشانه زده‌اید. اما هنگام کنترل جوابها در پاسخنامه دیده‌اید که گزینه (ب) پذیرفتنی اعلام شده است. در کتابهای درسی هم که موضوع حل معادله‌های کسری را یافته و بررسی کرده‌اید، به علت اختلاف پی نبرده‌اید.

در این باره، به یک نکته توجه نداشته‌اید؛ یک کسر اگر معین باشد، آن گاه برابر صفر است که صورتش صفر باشد و هرگاه مخرج یک کسر صفر باشد، آن کسر نامعین است. در کسر داده شده در پرسش بالا، آن گاه که $x=1$ هم صورت و هم مخرج صفر می‌شوند و کسر نامعین است و از این رو $x=1$ پذیرفته نیست و آن گاه که $x=2$ ، صورت کسر صفر می‌شود؛ اما مخرج کسر صفر نمی‌شود و کسر معین است. بنابراین $x=2$ پذیرفته است.

۳- هرگاه α زاویه‌ای باشد که اندازه‌اش بین صفر و 90° درجه است، کدام یک از برابریهای زیر می‌تواند درست باشد:

الف) $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ب) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = -2$

ج) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = -1$

د) $\sin \alpha + \cos \alpha = 2$

در این پرسش، برابریها را معادله‌هایی دانسته‌اید که باید حل شوند و چون دیده‌اید و قتیگر است، پرسش را رها کرده‌اید و به

گونه‌ای خودورزی است.

در بررسی پرسشهایی که در آزمون آزمایشی از آنها نمره مثبت نیاورده‌اید، گاه به پرسشهایی برخورد می‌کنید که باز هم گمان می‌کنید بدرستی پاسخ داده‌اید و از این که در مراجعه به پاسخنامه پاسخ خود را نادرست می‌یابید، تعجب می‌کنید؛ بویژه که پس از مراجعه به کتاب درسی و مطالعه موضوع آن پرسش، باز هم نمی‌فهمید چرا پاسخ شما نادرست است. در این گونه پرسشها، نکته یا نکته‌هایی در کار است که ممکن است در کتاب درسی در جایی دیگر، و بیشتر در تعریفها، به آن اشاره شده باشد. از این رو، در مراجعه به کتابهای درسی در زمینه یک موضوع، به مطالعه قاعده‌ها و فرمولها بسنده نکنید؛ بلکه تعریفها و یادآوریهای مربوط به آن موضوع را نیز با دقت مطالعه و بررسی کنید.

چند مثال

۱- برای آن که سه جمله‌ای درجه دوم

$$(a-1)x^2 - 2bx - 1$$

به ازای هر مقدار x ، برابر با مقداری مثبت باشد، لازم است که:

الف) $b^2 + a > 1, a < 1$

ب) $b^2 + a > 1, a > 1$

ج) $b^2 + a < 1, a > 1$

د) $b^2 + a < 1, a < 1$

این پرسش را نخست به صورت یک مسأله بیان می‌کنید: در سه جمله‌ای داده شده، ضریبهای a و b چگونه باشند تا مقدار سه جمله‌ای همواره مثبت باشد؟ این را می‌دانید که این موضوع، از آن درسهایی است که سالهای پیش آموخته‌اید. پس به کتابهای درسی آن سالها مراجعه کنید و در فهرست یکی از آنها به عنوان «علامت سه جمله‌ای درجه دوم» برمی‌خورید؛ عنوان را در متن کتاب می‌یابید و از نظر می‌گذرانید. می‌بینید برای علامت سه جمله‌ای درجه دوم، سه حالت بیان شده است. این سه حالت را در دفتر یادداشت‌های خود می‌نویسید تا به خاطر داشته باشید و در ضمن، درمی‌یابید برای آن که سه جمله‌ای همواره مثبت باشد، باید جواب نداشته باشد و ضریب جمله درجه دوم آن مثبت باشد. در سه جمله‌ای داده شده در پرسش، ضریب جمله درجه دوم برابر

پذیرفتنی هر پرسش بی بردید و همه را بترتیب یادداشت کردید، توبت تکرار خودآزمایی است. همان خودآزمایی قبلی را با همان مجموعه پرسشها و به همان گونه انجام می دهید؛ تنها با این تفاوت که مدت آزمون را سه چهارم مدت دفعه قبل می گیرید؛ اگر آن بار دو ساعت بوده است، این بار یک ساعت و نیم باشد. پس از پایان مدت، این بار هم درصد امتیاز خود را حساب می کنید. هر چند ممکن است بعضی پرسشها را که آن بار پاسخ درست داده بودید، این بار غیر از آن باشد؛ اما خواهید دید که امتیاز به دست آمده، افزایش چشمگیر داشته است. این امتیاز، خوشایندتان باشد یا نباشد، یک بار دیگر خودورزی و پس از آن باز هم خودآزمایی را با همان شیوه انجام دهید. خودورزی این بار، مطالعه یادداشتهایی خواهد بود که در دفعه قبل فراهم آورده اید. این از سرگیری دوباره، هم موجب می شود آن نکته های تازه ای را که دریافته اید، بخوبی در ذهنتان جای گیرند و هم این که برای سرعت در عمل تمرین کرده اید.

فرایندهای خودآزمایی و خودورزی را می توانید به همین شیوه که یادآوری شد، روی هر مجموعه پرسشها به کار ببرید و آمادگی و ورزیدگی همه جانبه ای را برای کامیابی در آزمون که در پیش دارید، فراهم آورید.

تمرین سرعت عمل

مدت زمان هر آزمون محدود است و سرعت در عمل، یکی از عاملهای تضمین کننده کامیابی، بویژه در آزمونهای با پرسشهای چند گزینه ای محسوب می شود. خیلی از پرسشهای چنین آزمونهایی، مسأله های ساده ای هستند که فوری می شود به آنها پاسخ داد. هر کدام از آنها نکته ای را دربردارد و به یک ویژگی یا یک تعریف مربوط می شود و کافی است دانستنیهای شما آن اندازه باشند که بتوانید به آن نکته و ویژگی پی ببرید یا آن تعریف را باز شناسید. پرسشهای زیر از این گونه اند.

سعی کنید هر پرسش را فوری پاسخ دهید

۱- معادله $(x-r)(x-s)=0$ چه موقع ریشه دوگانه (=ریشه

مضاعف) دارد؟

پرسشهای دیگر پرداخته اید. در مراجعه به متن مثلثات و به موضوع حل معادله های مثلثاتی، به جایی نرسیده اید. اما اگر تعریف هر یک از تابعهای $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ و $\cot x$ و تغییرهای آنها را در متن کتاب می یافتید و می خواندید، و بار دیگر به یاد می آوردید که اگر زاویه ای حاده باشد، هر یک از تابعهای مثلثاتی چهارگانه بالا مثبت است و همچنین باز به یاد می آوردید که $\sin$ یک زاویه حاده و $\cos$ آن بین صفر و یک واقعند، متوجه می شدید که در گزینه های (ب) و (ج) طرف اول برابری مثبت است و نمی تواند با یک مقدار منفی برابر باشد. در گزینه (د) هم، چون $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ هر دو نمی توانند یک باشند، مجموع آنها از ۲ کوچکتر است و نمی تواند برابر ۲ باشد. بدون آن که محاسبه ای یا حل معادله ای لازم باشد، سه گزینه (ب)، (ج) و (د) رد می شوند و گزینه (الف) پذیرفته است.

همیاری و پرس و جو

خودورزی، که لازم است کامل و صحیح انجام گیرد، در موردی لنگ می ماند؛ از راه مراجعه به کتابهای درسی و به یادداشتهایی که داشته اید، به نکته های مربوط به چندتایی از پرسشها نمی توانید پی ببرید. برای چاره جویی، چند راه در پیش دارید:

- کتاب یا جزوه ای را به دست آورید که راهنمای حل و پاسخگویی به آن پرسشهایی را در برداشته باشد که درباره آنها مشکل دارید.

- در کلاسی شرکت کنید که آن پرسشها و پاسخهایشان تشریح و موشکافی می شوند.

- درباره آن پرسشها و پاسخ درست آنها، از دوستان، همکلاسیها و دبیر ریاضی خود پرس و جو کنید و راهنمایی بخواهید.

- خودورزی را با همکاری و همیاری یکی یا دو نفر از همکلاسیها انجام دهید؛ نه به گونه ای که یکی گوینده و دیگری شنونده باشد؛ بلکه روی هر پرسش بحث و تبادل نظر داشته باشید. با این روش، در وقت هم صرفه جویی کرده اید و نتیجه ای بهتر را به دست می آورید.

خودآزمایی مرحله دوم

خودورزی را که به پایان رساندید و به چون و چرای گزینه

۱۰- هرگاه $P(x)$ یک چند جمله‌ای و k یک عدد ثابت مخالف صفر باشد، دو معادله $P(x) + k = 0$ و $P(x) - k = 0$ ریشه مشترک دارند یا نه؟

۱۱- به فرض آن که x' و x'' ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، نابرابری زیر، چه موقع برقرار است؟
 $b^2 - 4ac \neq a^2(x' - x'')^2$

۱۲- نمودار تابع $y = \sin x$ چند مرکز تقارن و چند محور تقارن دارد؟

۱۳- تعداد جایگشت‌های حرف‌های واژه «کنکور» برابر با چه عددی است؟

۱۴- در صفحه دو محور عمود برهم $x'x$ و $y'y$ ، دایره به معادله

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

از مبدأ مختصها می‌گذرد و با دو محور، بترتیب در A و B برخورد می‌کند. درازای پاره خط AB برابر با چه عددی است؟

۱۵- در صفحه دو محور عمود برهم $x'x$ و $y'y$ دو منحنی C و C' نسبت به محور $y'y$ قرینه‌اند. اگر منحنی C نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ باشد، منحنی C' نمودار کدام تابع است؟

۱۶- چهار مهره سفید، سه مهره قرمز و پنج مهره آبی درون کیسه‌ای ریخته می‌شوند. پس از آن که این مهره‌ها را خوب به هم می‌زنند، یکی از آنها را از کیسه بیرون می‌کشند. احتمال آن که این مهره سفید نباشد، چه قدر است؟

۱۷- عدد حقیقی a چگونه باشد تا معادله $\cos x \cdot \cos(-x) = -a^2$ جواب داشته باشد؟

۱۸- نقطه M در کجای صفحه دایره‌ای داده شده واقع باشد تا از آن بتوان بیش از یک خط را عمود بر دایره رسم کرد؟

۱۹- طول کمانی از دایره به شعاع ۷ سانتیمتر که اندازه اش $\frac{\pi}{9}$ رادیان باشد، چند سانتیمتر است؟

۲۰- ده برابر کدام عدد را چون در پایه ۲ لگاریتم بگیرد، عدد ۵ به دست می‌آید؟

۲۱- هرگاه داشته باشید:

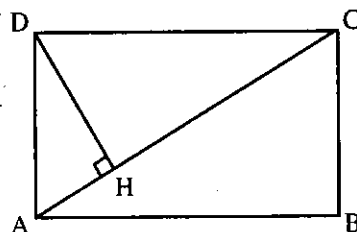
$$P(x) = x(2x-1)^2(3x-2)^3(4x-3)^4 \dots [nx - (n-1)]^n$$

و $P(x)$ را به صورت یک چند جمله‌ای مرتب کنید، مجموع ضریب‌های همه جمله‌های آن، برابر با چه عددی می‌شود؟

۲- گنجایش مخزن B لتری دو برابر مخزن A لتری، و گنجایش مخزن C لتری برابر با مجموع گنجایش‌های مخزن‌های B لتری و A لتری است. مجموع گنجایش‌های این سه مخزن، برابر با 1402250 لتری می‌تواند باشد یا نه؟

۳- متمم مجموعه A را با A' نشان می‌دهیم. هرگاه عضو a وجود داشته باشد که: $a \in B \cap A'$ ، آیا مجموعه B می‌تواند زیر مجموعه A باشد یا نه؟ چرا؟

۴- در مستطیل $ABCD$ ، عمود DH بر قطر AC رسم شده است. دو حاصلضرب $AB \cdot BC$ و $AC \cdot DH$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

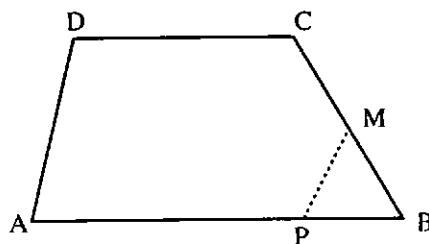


۵- دو نقطه A به طول r و B به طول $-r$ روی محور $x'x$ واقعند و r عددی حقیقی و مخالف صفر است. جهت از A به B آیا در جهت مثبت محور است یا در جهت منفی آن؟

۶- معادله $\sin x \cdot \cos 2x = \sqrt{2}$ جواب دارد یا نه؟

۷- در صفحه دو محور عمود برهم، فاصله دو نقطه $M(a, k)$ و $N(b, k)$ از یکدیگر چه مقدار است؟

۸- در چهارضلعی $ABCD$ دو ضلع AB و CD با هم موازی‌اند. از M وسط BC ، خطی موازی با AD رسم شده که با AB در P برخورد کرده است. اگر $AB = a$ و $CD = b$ و $AP = x$ ، بین x و a و b چه رابطه‌ای برقرار است؟



۹- به فرض $x \neq 0$ کدام نقطه از محور $x'x$ به طول $\frac{|x|}{x}$ است؟

۲۱- $x = k\pi$ و به عرض صفر، مرکز تقارن منحنی و هر خط به معادله $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، محور تقارن منحنی است.

۱۳- واژه کنکور دارای پنج حرف است که دو تای آنها «ک» - تکراری است و تعداد جایگشتها می شود:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

۱۴- زاویه AOB قائمه، AB قطر دایره و برابر با ۱۰ است.

۱۵- در تابع $y = ax^2 + bx + c$ چون x به $-x$ تبدیل شود، تابع $y = ax^2 - bx + c$ به دست می آید.

۱۶- تعداد همه مهره ها ۱۲ و تعداد مهره هایی که سفید نیستند ۸ و احتمال خواسته شده $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ است.

۱۷- طرف اول معادله $\cos^2 a$ و مثبت است و طرف دوم نامنفی است و معادله آن گاه ممکن است که $a = 0$.

۱۸- یک خط آن گاه بر دایره عمود است که از مرکز آن بگذرد. بر نقطه M و مرکز دایره، تنها یک خط می گذرد؛ مگر آن که M بر مرکز دایره واقع باشد.

۱۹- محیط دایره که به اندازه 2π رادیان است، به درازای

14π سانتیمتر است، پس کمان به اندازه $\frac{\pi}{4}$ رادیان به درازای π سانتیمتر است.

۲۰- از معادله $\log_7^{1-x} = 5$ به دست می آید $1-x = 7^5$ و

$$x = \frac{32}{10} = 3\frac{2}{5}$$

۲۱- مجموع ضریبهای چندجمله ای $P(x)$ به این ترتیب به دست

می آید که در آن x با عدد یک جانشین شود. در عبارت داده شده، اگر $x = 1$ ، حاصل عبارت برابر $1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$ می شود.

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} &= \frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{c^2}{abc} \\ &= \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \end{aligned} \quad 22-$$

۲۳- بنابر رابطه داده شده: $f(1) = f(0) + 4 = 4$.

۲۲- حاصل جمع کدام سه کسر برابر است با $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}$ ؟

۲۳- به فرض $f(x) = f(x-1) + 4x^2$ و $f(0) = 0$ ، مقدار $f(1)$ با چه عددی برابر است؟

پاسخها

۱- آن گاه که $r = s$.

۲- مجموع گنجایشهای سه مخزن مضرری از ۶ است و عدد داده شده، این ویژگی را دارد.

۳- مجموعه B نمی تواند زیر مجموعه A باشد؛ زیرا a که عضو B هست، عضو A نیست.

۴- دو حاصلضرب با هم برابرند؛ زیرا هر کدام با مساحت مستطیل برابر است.

۵- اگر r مثبت باشد، جهت از A به B، مخالف جهت مثبت محور است و اگر r منفی باشد، جهت از A به B، همان جهت مثبت محور است.

۶- زاویه x هر اندازه که باشد $-1 \leq \sin x \leq 1$ و $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ و طرف نخست معادله، عددی کوچکتر از یک است و با $\sqrt{2}$ برابر نیست و معادله جواب ندارد.

۷- فاصله دو نقطه برابر است با $|a - b|$ و نوشتن آن به یکی از دو صورت $a - b$ یا $b - a$ اشتباه است؛ مگر آن که بترتیب با قید $a > b$ و $a < b$ همراه باشند.

۸- اگر N وسط AD باشد، AP با MN و با $\frac{a+b}{2}$ برابر است.

۹- بنابر آن که $x \geq 0$ یا $x < 1$ طول نقطه ۱ یا -۱ است.

۱۰- ریشه مشترک دو معادله، ریشه معادله حاصل از تفاضل و همچنین مجموع دو معادله نیز هست. تفاضل دو معادله داده شده $2k = 0$ است و چون k مخالف صفر فرض شده، رابطه ای ناممکن است و جواب ندارد. بنابرین، دو معادله نمی توانند ریشه مشترک داشته باشند.

۱۱- آن گاه که معادله جواب حقیقی نداشته باشد، در این صورت، طرف نخست، رابطه منفی است و با مقدار نامنفی طرف دوم برابر نیست.

۱۲- دامنه تابع همه محور $x'x$ است و هر نقطه به طول

