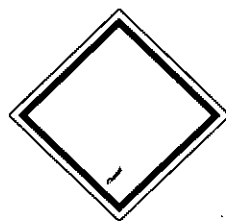


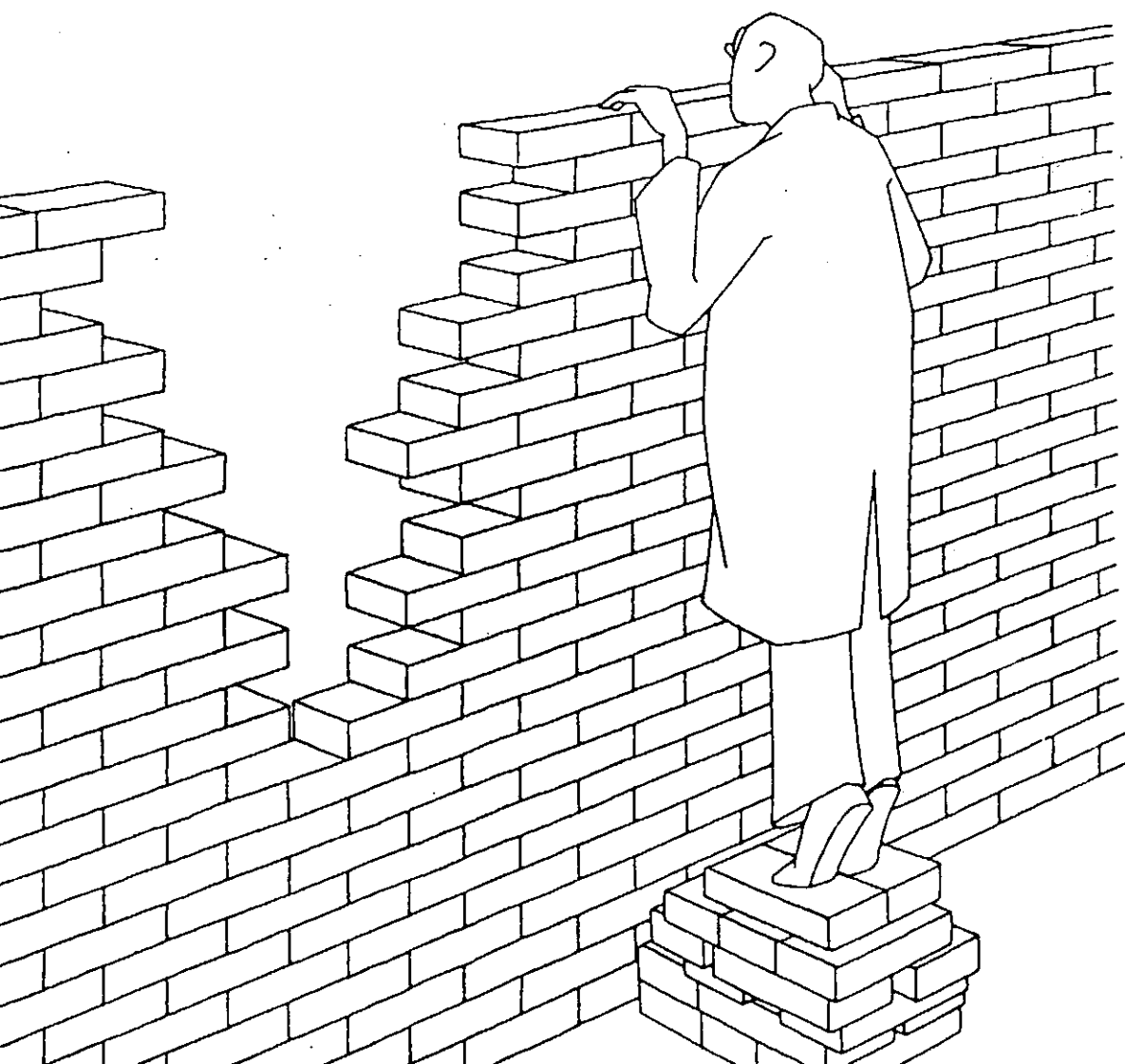
مسئله حل مسائل ریاضی (قسمت دوم)



• عبدالحسین مصحفی

سرمایه گذاری

دستیازی به هرکاری، یک سرمایه می خواهد و کامیابی و پیشرفت در آن کار، به کارایی در درست به کار بردن آن سرمایه بستگی دارد. کارایی که باشد، همراه با پیشرفت کار، سرمایه هم افزایش می یابد و بهره دهی بیشتر را به دنبال می آورد. حل مسأله های ریاضی هم یک کار است. سرمایه این کار چیست، از چه راه می توان آن را افزایش داد و کارایی در آن چگونه به دست می آید؟ شاید بگویید که سرمایه مورد نیاز برای حل مسأله ها، مجموعه درس هایی است که آموخته اید و آنچه این سرمایه را افزایش می دهد، درس هایی است که خواهید آموخت. اگر در آموختن درس ها ذهن خود را به گونه فعال به کار نینداخته و تنها به حفظ کردن آنها (آن هم تا زمان امتحان) بسنده کرده باشید، باید گفت که از این راه هیچ سرمایه ای را که به کار آید، فراهم نیاورده اید. اگر هم آموخته های



پرسش برخوردیده اید : معادله

$$\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 1$$

چند جواب دارد؟

- (الف) دو جواب
(ب) بیش از دو جواب
(ج) تنها یک جواب
(د) هیچ جواب

به این نکته توجه دارید که $\sqrt{a^2}$ برابر با $|a|$ و در حالت نامنفی بودن a برابر با a و در حالت منفی بودن a برابر با $-a$ است، پس می‌نویسید :

$$|x+1| + |x-1| = 1 \quad (1)$$

و چنین استدلال می‌کنید : هر یک از دو جمله‌ایهای $x+1$ و $x-1$ می‌تواند نامنفی یا منفی باشد. اگر هر دو نامنفی باشند، خواهیم داشت :

$$(x+1) + (x-1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

اگر هر دو منفی باشند، داریم :

$$(-x-1) + (-x+1) = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

و اگر یکی از آنها نامنفی و دیگری منفی باشد، x حذف می‌شود و معادله به یک برابری ناممکن تبدیل می‌شود و جواب ندارد.

از استدلالی که به کار برده‌اید، نتیجه می‌گیرید که معادله داده شده دو جواب می‌تواند داشته باشد. اما به پاسخنامه که مراجعه می‌کنید، می‌بینید که گزینه (د) را درست دانسته است. راه حل خود را باز می‌نگرید و می‌بینید که استدلالتان درست است. به این فکر می‌افتید که نکند در پاسخنامه، اشتباه چاپی روی داده است. برای آن که بفهمید این فکرتان بجاست یا نه، برآن می‌شوید که جوابهای به دست آمده را در معادله امتحان کنید. با این کار درمی‌یابید که هیچ کدام در معادله صدق نمی‌کنند. بی‌می‌برید که خودتان درجایی اشتباه کرده‌اید. در جست و جوی این اشتباه متوجه می‌شوید که اگر دو جمله‌ایها هردو نامنفی باشند :

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

و از این رو، جواب $x = \frac{1}{2}$ پذیرفته نیست و اگر دو جمله‌ایها هردو منفی باشند :

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow x < -1$$

شما با ژرف‌نگری و همراه با فعالیت ذهنی فراهم آمده‌باشند، باز هم باید گفت که تنها بخشی از سرمایه لازم را تشکیل می‌دهند. بخش اصلی سرمایه لازم برای حل مسأله‌های ریاضی را مسأله‌هایی تشکیل می‌دهند که آنها را با به کار بردن اندیشه خودتان حل کرده‌باشید. هر مسأله‌ای را هم که به همین گونه حل کنید، افزوده‌ای بر سرمایه به‌شمار می‌آید و این افزوده، آن‌گاه چندین برابر خواهد بود، که پس از دستیابی به راه حل یک مسأله و به دست آوردن جواب آن، کار را پایان یافته ندانید. بررسی راه حل انجام یافته دستیابی به راه حل‌های گوناگون آن مسأله و سنجش آنها با هم، بی‌بردن به مسأله‌های خوشاوند با آن مسأله، تعمیم مسأله، و سرانجام کاربردهای آن در حل مسأله‌های دیگر، کارهایی هستند که اگر پس از حل هر مسأله، آنها را انجام دهید، کارایی و ورزیدگی شما را در حل مسأله‌ها در پی خواهد داشت.

بهره‌وری از سرمایه

برای آن که مسأله‌هایی هرچه بیشتر را حل کنید، باید در پی آن باشید تا به مسأله‌های بیشتری دست یابید. دسترسی به کتابهای درسی از دور خارج شده و از مؤلفان مختلف، به کتابها و جزوه‌های گوناگون حل مسأله، به مجله‌های ریاضی، و بویژه به کتابهایی که مسأله‌های تاریخی را شرح می‌دهند، از جمله راه‌های دستیابی شما به مسأله‌های گوناگون است. نکته‌ای مهم که باید به آن توجه داشته باشید، این است که به هر مسأله‌ای دست می‌یابید، اگر با حل آن همراه است، آن راه حل را نادیده بگیرید و بکشید تا آن مسأله را با فکر خودتان حل کنید. اگر چنین نکنید و برآن باشید تا راه حل مسأله‌ها را با خواندن از روی کتاب یاد بگیرید، ذهن خود را تنبل بار می‌آورید و ورزیدگی و توانایی برای حل مسأله‌ها را به دست نخواهید آورد. پس از آن که به راه حل مسأله و جواب آن دست یافتید، آن‌گاه راه حلی را که خودتان به کار برده‌اید و راه حلی را که در کتاب به کار رفته است، با هم بسنجید. اگر راه حلها متفاوتند، مشخص کنید که کدام یک ساده‌تر است و وقت کمتری را می‌برد، و اگر جوابهای به دست آمده یکی نیستند، راه حلها را بررسی و مشخص کنید که در کدام یک و کجا اشتباه شده است. در کتابها و جزوه‌ها اشتباه‌های چاپی و غیر آن پیش می‌آید. اگر آن مسأله را در جاهایی دیگر هم بیابید و راه حل‌های گوناگون آن را با هم بسنجید، برای ورزیدگی ذهنی شما تأثیر بهتری خواهد داشت. مثال ۱. در مجموعه‌ای از پرسشهای چند گزینه‌ای، به این

پس این سه جمله ای جواب ندارد و جواب معادله (۱) عبارت است از:

$$2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

راه حلی طولانی را به کار برده اید؛ اما خوشنودید که به جواب دست یافته اید. اما پس از آن که شماره بعدی مجله به دستتان می رسد با تعجب می بینید که این مسأله هم راه حلی ساده تر دارد. معادله (۱) چنین نوشته می شود:

$$(8a^3 + 192a - 315) + (48a^2 - 108)\sqrt{2} = 0$$

حاصل جمع یک مقدار گویا با یک مقدار گنگ، تنها آن گاه برابر صفر است که هر یک از آن دو مقدار، صفر باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} 8a^3 + 192a - 315 = 0 & (2) \\ 48a^2 - 108 = 0 & (3) \end{cases}$$

از معادله (۳) داریم:

$$48a^2 - 108 = 12(2a - 3)(2a + 3)$$

$$2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

معادله (۲) نمی تواند جواب منفی داشته باشد (زیرا حاصل جمع سه عدد منفی نمی تواند صفر باشد) و جواب $a = -\frac{3}{2}$ پذیرفته

نیست. جواب $a = \frac{3}{2}$ را هم در معادله (۲) امتحان می کنیم که در آن صدق می کند؛ بنابراین، معادله (۱) جواب یکتای $a = \frac{3}{2}$ دارد.

مسأله ای را با فکر خودتان حل کرده اید، از این رو، راه حل دیگری را که برای آن یافته اید، با علاقه و دقت از نظر می گذرانید، و چون درمی یابید این راه حل بر پایه یک ویژگی مهم انجام گرفته است، که تاکنون یا بر آن آگاهی نداشته اید، یا به اهمیت آن پی نبرده بودید، شادمان می شوید و این ویژگی در خاطرتان پابرجا می ماند. یادآوری. کاربرد این مسأله در تجزیه رادیکالهای مرکب با فرجه ۳ است:

$$\sqrt{315 + 236\sqrt{2}} = 2\left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{2}\right) = 3 + 4\sqrt{2}$$

سنجش راه حلهای یک مسأله

برای ورزیده شدن در حل مسأله های ریاضی، نباید به دستیابی

و جواب $x = -\frac{1}{4}$ هم پذیرفته نیست. می پذیرید که معادله بدون

جواب است. این بار به راهنمای حل مسأله مراجعه می کنید. با شگفتی می بینید که راه حل مسأله خیلی ساده تر از راهی است که شما به کار برده اید: در معادله (۱)، اگر x نامنفی باشد، مقدار $|x+1|$ نا کوچکتر از ۱ است و چون با مقدار مثبت $|x-1|$ جمع شود، حاصل از ۱ بزرگتر می شود. پس اگر x نامنفی باشد، معادله جواب ندارد. اگر هم x منفی باشد، مقدار $|x-1|$ بزرگتر از ۱ است و با مقدار مثبت $|x+1|$ هم که جمع شود، باز بزرگتر از ۱ است و باز هم معادله جواب ندارد.

مثال ۲. در یک مجله ریاضی، با این مسأله روبه رو می شوید: اگر a عددی گویا باشد، مقدار آن را از رابطه زیر به دست آورید:

$$8(a + 2\sqrt{2})^3 = 315 + 236\sqrt{2}$$

این رابطه را بسط می دهید، نسبت به a مرتب می کنید و به دست می آورید:

$$8a^3 + 48\sqrt{2}a^2 + 192a - 108\sqrt{2} - 315 = 0 \quad (1)$$

و بر آن می شوید تا عبارت معادله را تجزیه کنید. روشهای گوناگون تجزیه را به کار می برید و سرانجام به دست می آورید:

$$12\sqrt{2}(4a^2 - 9) + 8a^3 + 192a - 315 = 0$$

$$12\sqrt{2}(2a + 3)(2a - 3) + 8a^3 + 192a - 315 = 0$$

اگر بتوانید یکی از دو عامل $2a + 3$ یا $2a - 3$ را از سه جمله ای درجه سوم استخراج کنید، به تجزیه عبارت دست می یابید. پس چنین عمل می کنید:

$$\begin{aligned} 8a^3 + 192a - 315 &= 8a^3 - 27 + 27 + 192a - 315 \\ &= 8a^3 - 27 + 192a - 288 \\ &= (2a - 3)(4a^2 + 6a + 9) + 96(2a - 3) \\ &= (2a - 3)(4a^2 + 6a + 105) \end{aligned}$$

و رابطه داده شده به صورت زیر درمی آید:

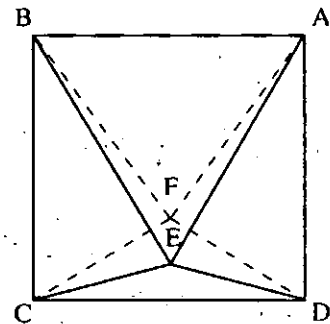
$$(2a - 3)[4a^2 + 6(4\sqrt{2} + 1)a + 36\sqrt{2} + 105] = 0$$

عبارت داخل کروشه نسبت به a از درجه دوم است و مبین آن را حساب می کنید و خواهید داشت:

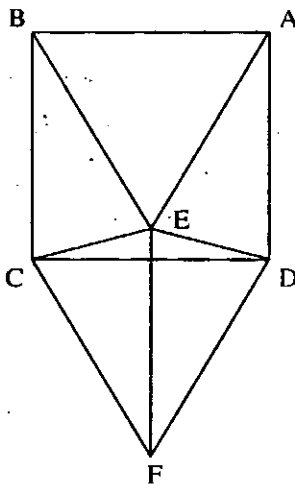
$$\begin{aligned} \Delta' &= 9(4\sqrt{2} + 1)^2 - 4(36\sqrt{2} + 105) \\ &= -123 - 72\sqrt{2} < 0 \end{aligned}$$

به راه حل یک مسأله بسنده کنید. سعی کنید نه تنها خودتان آن را از راه یا راه‌های دیگری هم حل کنید؛ بلکه از جاهای گوناگون هم راه‌حلهایی را که برای آن به کار رفته است، به دست آورید. پس از آن، این راه‌حلها را باهم بسنجید و ببینید هر کدام از آنها چه امتیازی دارد.

مثال ۳. در داخل مربع $ABCD$ نقطه E چنان به دست آمده که مثلث ECD متساوی الساقین و هر زاویه مجاور به CD از آن برابر با 15° درجه است. ثابت کنید: زاویه AEB به اندازه 60° درجه است.



(۲) در یک کتاب دیگر: مثلث متساوی الاضلاع CDF مطابق با شکل رسم می‌شود. پاره خط EF که عمود منصف CD است، با AD موازی است و دو مثلث ADE و FDE باهم برابرند؛ زیرا FD که با CD برابر است، با AD نیز برابر است و دو زاویه EDF و EDA که هردو به اندازه 75° درجه‌اند، باهم برابرند و ضلع DE در هر دو مثلث مشترک است. از برابری این دو مثلث، به دست می‌آید که دو زاویه FED و AED باهم برابر و هر کدام به اندازه 75° درجه‌اند. بنابراین، مثلث ADE متساوی الساقین است و AE با AD و در نتیجه با AB برابر است و مثلث ABE متساوی الاضلاع است.



(۴) در یک مجله ریاضی، مثلث BCF برابر با مثلث CDE مطابق با شکل رسم می‌شود. از برابری CF با CE و از این که هر یک از زاویه‌های BCF و DCE به اندازه 15° درجه است، به دست می‌آید که زاویه ECF به اندازه 60° درجه و مثلث CEF متساوی الاضلاع و EF با BF برابر است. از این که زاویه‌های BFC و CFE به ترتیب به اندازه‌های

(۱) بسادگی درمی‌یابید که AE با BE برابر و مثلث AEB متساوی الساقین است و کافی است ثابت کنید این مثلث متساوی الاضلاع است. پس چنین استدلال می‌کنید؛ چون هر یک از دو مثلث AEB و CED به رأس E متساوی الساقین است، نقطه E بر عمود منصف دو ضلع AB و CD از مربع واقع است. اگر مثلث AEB متساوی الاضلاع نباشد، نقطه F بر عمود منصف دو ضلع AB و CD وجود خواهد داشت، که مثلث ABF متساوی الاضلاع باشد. در این صورت، هر یک از زاویه‌های ABF و BAF برابر 60° درجه و هر یک از زاویه‌های FAD و FBC برابر 30° درجه است. از برابری AF و همچنین BF با AB نتیجه می‌شود AD با AF و BC با BF برابر است. مثلثهای ADF و BCF متساوی الساقین‌اند و هر یک از زاویه‌های ADF و BCF برابر 75° درجه و هر یک از زاویه‌های FDC و FCD برابر با 15° درجه و مثلث FCD همان مثلث ECD است و F بر E واقع و مثلث AEB متساوی الاضلاع است.

(۲) در یک کتاب می‌بینید که برای حل این مسأله، پس از اثبات برابری AE با BE چنین استدلال شده است: اگر AE با AB برابر نباشد، یا از آن بزرگتر یا از آن کوچکتر است. در حالت $AB > AE$ ،

صرف می‌شود، آیا بر نکته‌ها و ویژگیهای تازه‌ای آگاهی یافته‌اید؟ آیا نکته‌ها و ویژگیهایی را فراموش کرده بودید و اکنون به یادتان آمد؟ آیا راه حل تازه‌ای از مسئله به نظرتان رسیده است؟ و سرانجام آن که، کدام مسئله ساده، در حالت عکس، به این مسئله تبدیل شده است؟

تمرین ۲:

۱- از دو رابطه زیر که نسبت به a و b از درجه دومند، رابطه یا رابطه‌هایی را بین a و b به دست آورید که نسبت به a و b از درجه یکم باشند. راه‌حلهایی گوناگون را می‌توانید به کار ببرید. در هر حال، جوابها را امتحان کنید.

$$\begin{cases} 3a^2 - 7ab + 2b^2 = 8 \\ a^2 + 2ab - 8b^2 = 7 \end{cases}$$

۲- کدام عبارت جبری است که نسبت به x و y از درجه دوم، متقارن و متجانس (=همگن) باشد و اگر $x = y$ حاصل عبارت صفر شود و اگر

$$x = \sqrt{\frac{y-4\sqrt{3}}{y+4\sqrt{3}}} \text{ و } y = \sqrt{\frac{y+4\sqrt{3}}{y-4\sqrt{3}}}$$

حاصل عبارت برابر با ۲۴ شود.

۳- ثابت کنید اگر $x + y + z = a$ ، آن گاه:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2}{3}$$

۴- به فرض $-1 \leq y \leq 1$ و $y \neq 0$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}$$

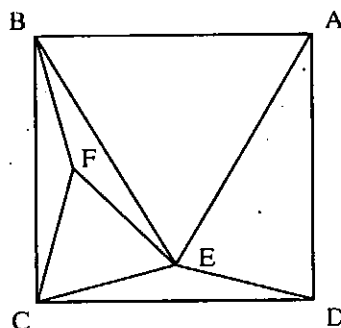
y را به صورت تابعی از x و به ساده‌ترین صورت به دست آورید.

۵- کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که اگر رقم سمت راست آن به سمت چپ آن برده شود، عددی یک و نیم برابر آن عدد به دست آید.

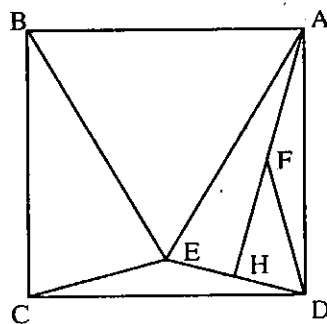
۶- مستطیل ABCD که دو قطر آن در I باهم برخورد می‌کنند و باهم زاویه 60° درجه می‌سازند، مطابق با شکل صفحه بعد داده شده است. نخست انتقالی روی آن انجام می‌گیرد که نقطه I را روی نقطه B می‌برد. آن گاه تقارن آن نسبت به رأس D به دست می‌آید. سرانجام به مرکز D و به زاویه α درجه در جهت عکس

150° و 60° درجه‌اند. نتیجه می‌شود، زاویه BFE به اندازه

150° است و دو مثلث BFE و BFC باهم برابرند و بنابراین، BE با BC و با AB برابر است و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است.



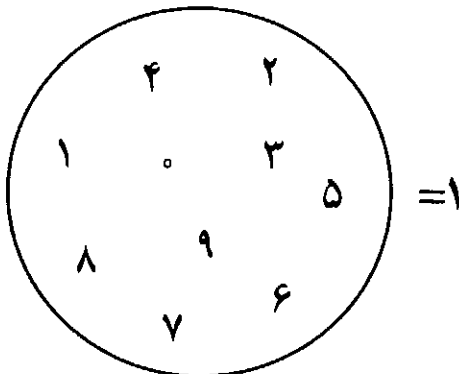
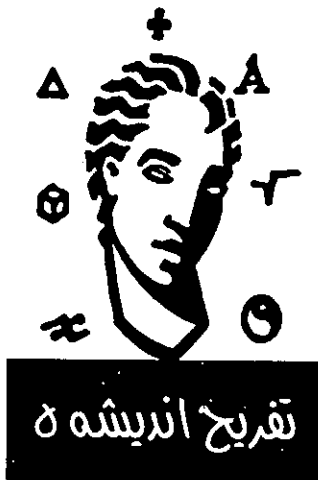
(۵) در همان مجله: مطابق با شکل، مثلث AFD برابر با مثلث CDE رسم می‌شود و AF امتداد می‌یابد تا در H با DE برخورد کند. از این که هریک از دو زاویه FAD و FDA به اندازه 15° درجه‌اند، نتیجه می‌شود که زاویه FDH به اندازه 60° درجه و زاویه DFH به اندازه 30° درجه است. زاویه H از مثلث DFH به اندازه 90° درجه می‌شود و در این مثلث قائم‌الزاویه، ضلع DH نصف ضلع DF و بنابراین، نصف ضلع DE است. AH عمود-منصف DE است و AE با AD و با AB برابر و مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است.



از مقایسه راه حلی که خودتان به کار برده‌اید، با چهار راه حل دیگری که به آنها دست یافته‌اید، چه نتیجه‌هایی را به دست می‌آورید؟ غیر از آن که درمی‌یابید از این راه‌حلهای، کدام ساده‌تر درک می‌شود، کدام با برهان مستقیم و کدام با برهان غیرمستقیم یا برهان خلف ثابت شده است، برای توضیح دادن کدام یک مدت زمان کمتری

$$\begin{cases} g = a \cdot k^6 = \frac{b^6}{a^6} \\ g = 9a \end{cases} \Rightarrow \frac{b^6}{a^6} = 9, \frac{b}{a} = \sqrt[6]{9}$$

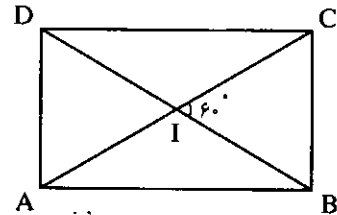
۶- عمود MK بر AB رسم می‌شود. ارتفاع CH چه بیرون و چه درون مثلث باشد، MK برابر با نصف CH و در نتیجه، برابر با نصف AM است. اما MK ارتفاع مثلث AMB است و نصف AM که باشد، بنابراین آنچه در مثال ۹ ثابت شد، زاویه MAB یا ۳۰ درجه یا ۱۵۰ درجه است.



با چند عمل ساده حسابی و فقط یک بار استفاده از ارقام ۰ تا ۹، می‌تواند حاصل، عدد ۱ باشد؟

جواب در صفحه ۸۸

حرکت عقربه‌های ساعت دوران می‌یابد که در این حالت، رأس A در جای نخستین خود واقع می‌شود. زاویه α چند درجه است؟ آخرین وضع مستطیل چگونه است؟ برابند سه تبدیل یاد شده، چه تبدیلی است؟



حل مسأله‌های تمرین ۱:

۱- باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1$$

اما در حالت $x = \pm 1$ معادله به رابطه ناممکن $0 = 2$ تبدیل می‌شود. پس مجموعه جواب معادله، تهی است.
۲- میانگین حسابی دو عدد مثبت نابرابر از میانگین هندسی آنها بزرگتر است؛ زیرا:

$$(a - b)^2 > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab > 0$$

$$a^2 + b^2 + 2ab > 4ab \Rightarrow (a + b)^2 > 4ab$$

$$a + b > 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

از این رو پاره خط MN به قاعده بزرگ دوزنقه نزدیکتر است و $a > b$.

۳- دو مجموعه باهم برابرند.

۴- دو مثلث BCD و BCM متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow BM = \frac{b^2}{a}$$

$$AM = AB - BM = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$$

۵- جمله هفتم از تصاعد هندسی با جمله اول A و با قدر

نسبت $k = \frac{b}{a}$ است.