

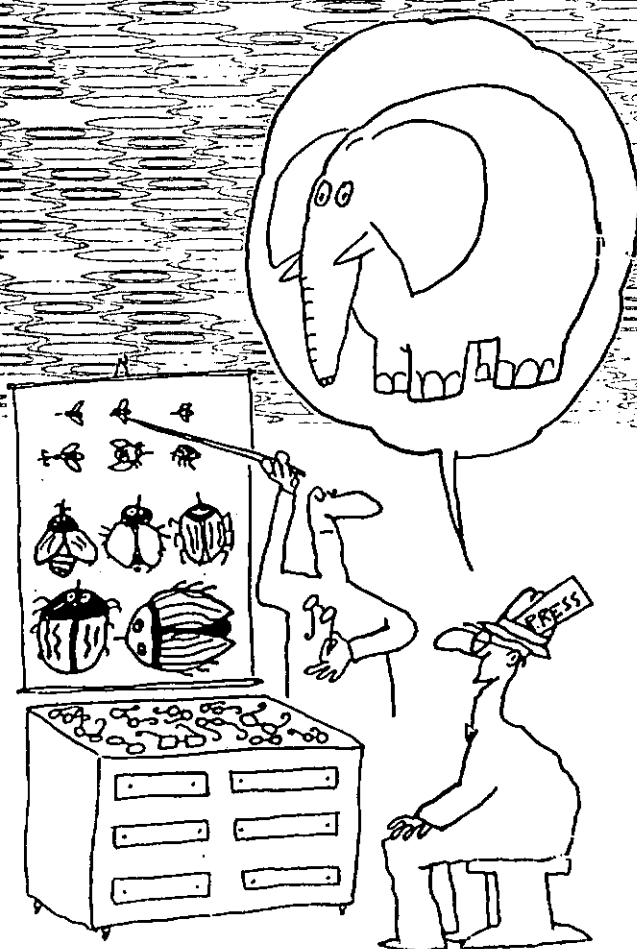
مسأله



حلّ مسأله‌های

ریاضی (۴)

• عبدالحسین مصحفی



پرسشهای چند گزینه‌ای

پرسشهای چهار یا پنج گزینه‌ای دو گونه‌اند؛ در یک گونه آنها بعضی از گزینه‌ها، که ممکن است هیچ کدام یا همه آنها نیز باشد، پذیرفتنی و بقیه آنها کنار گذاشتنی هستند؛ مانند:

دو نقطه A و B و همچنین دو نقطه C و D نسبت به خط Δ قرینه یکدیگرند و A و C در یک طرف Δ واقعند. اگر AC و BD در P، و AD و BC در Q برخورد کنند، در این صورت، از گزاره‌های:

الف) هریک از دو نقطه P و Q بر Δ واقع است.
ب) خط Δ نیمساز زاویه APB و همچنین نیمساز زاویه CQD است.

ج) هیچ یک از دو نقطه P و Q در هیچ حالتی نمی‌تواند مرکز تقارن دو پاره خط AC و BD باشد.

د) دو قطر چهارضلعی PCQD برهم عمودند.
ه) خطی که وسط AC را به وسط BD وصل می‌کند، در هر حالت، بر یکی از دو نقطه P یا Q می‌گذرد.

کدام یا کدامها نادرستند؟
در این گونه از پرسشهای چند گزینه‌ای، هریک از گزینه‌ها

بیش از چند دهه نیست که پرسشهای چند گزینه‌ای را در آزمون‌ها به کار می‌برند. بنابراین آن که آزمون برای چه کار باشد، آزمون‌دهندگان در چه پایه تحصیلی باشند و تعدادشان کم باشد یا زیاد، تعداد گزینه‌های هر پرسش می‌تواند یک، دو، چهار یا پنج باشد. پرسشهای تک گزینه‌ای از گونه همان پرسشهای معمولی‌اند که در برابر هر پرسش، باید پاسخ درست آن داده شود. در نمونه‌ای از این گونه پرسشها، هر پرسش به صورت جمله‌ای با یک جای خالی نموده می‌شود و آزمون‌دهنده باید آن جای خالی را با نوشتن پاسخی که به گمانش درست می‌نماید، پر کند؛ مانند:

«مجموع زاویه‌های هر n ضلعی کوز برابر با ... درجه است.»
در پرسشهای دو گزینه‌ای، هر پرسش با دو پاسخ همراه است و آزمون‌دهنده باید دریابد کدام یک از دو گزینه پذیرفتنی است و آن را نشانه بگذارد؛ مانند:

«اگر احتمال روی دادن یک پیشامد برابر با a باشد، احتمال روی ندادن آن پیشامد برابر با $1-a$ ، $0-a$ است.»

رو به رویی با پرسشهای چندگزینه‌ای

شناخت ساختار و ویژگیهای پرسشهای چندگزینه‌ای، چگونگی برخورد با آنها را به دست می‌دهد.

● سهم هر پرسش از مدت زمان نموده شده برای آزمون، معمولاً بیش از دو دقیقه نیست و پرسشها از هر گونه که باشند امتیاز برابر دارند. پراکندگی پرسشهای ساده و دشوار، ترتیب معین ندارد. از این رو، نخستین کار باید این باشد که پرسشها را سرعت از نظر گذراند و تنها آنهایی را نشانه زد که ذهن، پاسخشان را آماده دارد. با هر بار از سرگیری این روند کار، هم تعداد زیادی امتیاز به دست می‌آید و هم مقدار زیادی وقت برای پرسشهایی که فکر کردن یا محاسبه را لازم دارند، ذخیره می‌شود.

● پرسشهایی که با شیوه درست طرح شده باشند، هیچ کدامشان تلاش فکری سخت یا محاسبه‌ای پیچیده را لازم ندارد. اگر یک پرسش با چنین وضعی به نظر می‌رسد، یا به نکته‌ای از آن توجه نشده است و راه ساده‌ای دارد و یا این که آن را باید رها کرد و به پرسشهای دیگر پرداخت.

● در روبه‌رویی با هر پرسش، تنها کاری که ارزش دارد، یافتن گزینه پذیرفتنی آن است. چگونگی دستیابی به این گزینه، هیچ ارزشی ندارد. از این رو، برای پرسش با زمینه جبری، لازم نیست حتماً روش جبری را به کار برد. اگر روش هندسی ساده‌تر باشد و وقت کمتری را بگیرد، صرفه با آن است. برای پرسش با زمینه هندسی هم می‌توان روش جبری را به کار برد.

● چون از چهار گزینه، تنها یکی از آنها را باید پذیرفت، همین که آن گزینه معلوم شد، بررسی گزینه‌های دیگر لزومی ندارد و اگر با بررسی سه تا از گزینه‌ها معلوم شد که هیچ کدام پذیرفتنی نیست، دلیل بر پذیرفتنی بودن گزاره باقیمانده است و بررسی آن دیگر بی‌مورد است.

● هرگاه گزینه‌هایی از یک پرسش، هم‌ارز باشند، پذیرفتنی نیستند و بررسی آنها مورد ندارد.

● هرگاه پرسش عبارت از یک مسأله باشد، برای دستیابی به گزینه پذیرفتنی آن، می‌توان روش برهان مستقیم و روش برهان خلف را به کار برد. در روش برهان مستقیم، می‌توان پرسش را به صورت یک مسأله حل کرد و جواب آن را به دست آورد. در روش برهان خلف، معلوم می‌شود کدام گزینه‌ها نمی‌توانند جواب آن مسأله باشند و باید کنار گذاشته شوند.

باید جداگانه بررسی و معلوم شود پذیرفتنی است یا نه. در گونه دیگر پرسشهای چهار یا پنج گزینه‌ای، تنها یکی از گزینه‌ها پذیرفتنی است؛ مانند:

«هرگاه α اندازه یکی از زاویه‌های یک مثلث باشد، در کدام یک از حالت‌های:

$$\text{الف) } P = \cos \alpha + \cos^2 \alpha \quad \text{ب) } P = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cot \alpha$$

$$\text{ج) } P = \sin \alpha + \sin^2 \alpha \quad \text{د) } P = \sin \alpha - \sin^2 \alpha$$

مقدار P ممکن است عددی منفی باشد؟»

در این گونه از پرسشهای چندگزینه‌ای، همین که معلوم شود کدام گزینه را باید پذیرفت، کار پایان می‌یابد و بررسی گزینه‌های دیگر، لزومی ندارد. در ایران، چه در آزمونهای ورودی دانشگاه‌ها و چه در آزمونهای دیگر، پرسشهای چهار گزینه‌ای تک پذیره‌ای را به کار می‌برند. در این نوشتار هم از این پس، تنها این گونه پرسشها بررسی می‌شوند.

چگونگی طرح و توزیع پرسشها

طرح پرسشهای چندگزینه‌ای مربوط به یک آزمون، بررسیهایی همه‌جانبه را لازم دارد و مهارت و کارایی ویژه می‌خواهد. پرسشها نباید پیش پا افتاده باشند و نباید تلاش فکری سخت یا محاسبه‌هایی وقتگیر را ایجاد کنند. اگر مسأله‌ای را مطرح می‌کنند، باید کوچک و رام شدنی باشد. مجموعه پرسشهای هر آزمون باید دو جنبه اساسی را دارا باشند؛ نخست آن که پرسشها از نظر سادگی و دشواری در پنج گروه باشند: ساده، به نسبت ساده، متوسط، بالاتر از متوسط یا دشوار، و هر کدام از اینها درصد معینی از مجموع پرسشها را تشکیل دهند. دیگر آن که، پرسشها از نظر هدفهای آموزشی و پرورشی نیز به نسبت‌های معین توزیع شده باشند و هر کدام یکی از جنبه‌های یادگیری و یادآوری، فهم و درک صحیح مفهوما، توانایی کاربرد قاعده‌ها و فرمولها، تفکر استدلالی، داشتن استعدادها و ویژه و نیروی ابتکار و خلاقیت را مورد سنجش قرار دهد. چگونگی توزیع پرسشها چه از نظر سادگی و دشواری، و چه از نظر هدفهای آموزشی و پرورشی، بستگی به هدفی دارد که آزمون برای آن انجام می‌گیرد. پراکندگی پرسشهای دارای جنبه‌های مختلف، تصادفی است و این طور نیست که بترتیب، از ساده به دشوار، مرتب شده باشند.

● بنابر قانونهای احتمال، گردن شانسهای گزینه‌های پذیرفتنی سودی را در پی نخواهد داشت. اگر برای همه پرسشهای یک آزمون، شانس عمل شود، احتمال دارد امتیاز ناچیزی به دست آید. اما اگر روی پرسشهایی به شیوه درست عمل شود و روی بقیه پرسشها کار به شانس سپرده شود، آن امتیازهای به دست آمده هم تباه می‌شوند.

● در آزمون با پرسشهای چندگزینه‌ای، مانند هر آزمون دیگر، کامیابی با آن دسته از آزمون دهندگان است که در فراگیری درسها تنها به حفظ قاعده‌ها بسنده نکرده باشند؛ تعریفها و هر مفهوم دیگر را عمقی و با همه نکته‌های مربوط به آنها آموخته باشند و در حل مسأله‌ها و ورزیدگی لازم را به دست آورده باشند. دانش‌آموزانی با این گمان که پاسخ دادن به پرسشهای چندگزینه‌ای، روندی ویژه خود و بی‌ارتباط با حل مسأله‌ها را دارد، در زمینه حل مسأله‌ها آن گونه که شاید و باید تلاش نمی‌کنند. در صورتی که پرسشهای ساده و متوسط یک آزمون را اکثریت آزمون دهندگان، پاسخ درست می‌گویند و تنها آنان که بتوانند پاسخ دادن به پرسشهای بالاتر از متوسط و دشوار را نیز از عهده برآیند، از بقیه جلو می‌افتند. اینان آن دسته از آزمون دهندگان خواهند بود که در حل مسأله‌ها هم خود را ورزیده کرده باشند. اگر پایه درسی ضعیف باشد و چنانچه اندیشه برای حل مسأله به کار نرفته و ورزیده نشده باشد، به کامیابی در آزمونهای با پرسشهای چندگزینه‌ای هم امیدی نمی‌توان داشت.

● همراه با توانمندی بنیه درسی و ورزیدگی در حل مسأله‌ها، به دست آوردن هر چه بیشتر پرسشهای آزمونهای پیشتر، انجام گرفته و تمرین با آنها، همچنین شرکت در آزمونهای آزمایشی، از جمله عاملهای مؤثر برای کامیابی در چنین آزمونهایی محسوب می‌شوند. این فعالیتها هم آن گاه نتیجه‌ای مؤثر را به دنبال خواهند داشت که، در هر مورد از آنها ذهن به کار افتاده باشد. از این رو، لازم است که چنین تمرینهایی نیز با شیوه‌ای صحیح به کار روند. چنین شیوه‌ای، در نوشتاری دیگر یادآوری می‌شود.

چند نمونه از پرسشهای چهارگزینه‌ای

۱. اگر سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c چنان باشند که $a^2 = b^2 + c^2$ ، در این صورت از نابرابریهای:

$$a > b + c \quad (۱)$$

$$a < b + c \quad (۲)$$

$$a > |b - c| \quad (۳)$$

$$a < |b - c| \quad (۴)$$

کدام با کدامها همواره برقرار است؟

(الف) تنها (۱)

(ب) تنها (۴)

(ج) (۱) و (۴)

(د) (۲) و (۳)

این پرسش به نظر می‌رسد که در زمینه جبر است. اگر بخواهیم روش جبری را به کار ببریم، عملیاتی هر چند نه زیاد را به دنبال دارد. اما اگر به این نکته توجه کنیم که a ، b و c اندازه‌های سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند و به یاد آوریم که در هر مثلث، هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر، کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر است، بدون انجام دادن هیچ عمل و خیلی فوری درمی‌یابیم که گزینه (د) پاسخ درست است.

۲. دوجمله‌ای $x^4 + 1$ اگر تجزیه شود، کدام یک از عاملهای زیر را دربر خواهد داشت؟

(الف) $x^2 + 1$

(ب) $x^2 - 1$

(ج) $x^2 - x + 1$

(د) $x + 1$

در این پرسش، اگر بخواهیم روش مستقیم را به کار ببریم و $x^4 + 1$ را تجزیه کنیم، مدت زمانی را باید صرف آن کنیم. اما اگر به یاد داشته باشیم که یک چندجمله‌ای $P(x)$ تنها آن گاه بر $x^n + a$ بخش پذیر است که اگر در آن x^n را برابر با $-a$ بگیریم، حاصل صفر شود، می‌بینیم که در $P(x) = x^4 + 1$ اگر x^2 را برابر با -1 ، یا x^2 را برابر با 1 و یا x را برابر با -1 بگیریم، در هیچ حالت، $x^4 + 1$ برابر با صفر نمی‌شود. گزینه‌های (الف)، (ب) و (د) کنار گذاشته می‌شوند و گزینه (ج) پذیرفتنی است.

۳. به فرض $a \neq 0$ معادله:

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{4}{\frac{x}{a} + \frac{a}{x}}$$

(الف) جواب ندارد. (ب) یک ریشه مضاعف دارد.

(ج) دو ریشه مضاعف دارد. (د) چهار ریشه متمایز دارد.

معادله به سادگی، به دو معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{x}{a} + \frac{a}{x} = 2, \quad \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = -2$$

اکنون به نظر می‌رسد که باید هریک از این دو معادله را مرتب کرد و علامت مبین آن را به دست آورد. اما اگر به این ویژگی آشنا باشیم که «مجموع هر عدد و عکس آن از ۲ بزرگتر یا از ۲- کوچکتر و تنها آن گاه برابر با ± 2 است که آن عدد برابر با ± 1 باشد» بدون هیچ محاسبه، درمی‌یابیم که $x = a$ ریشه مضاعف

۵. بین اندازه‌های زاویه A ، دو ضلع bc ، d ، نیمساز زاویه

داخلی A و S مساحت مثلث ABC رابطه $(b+c)d = 2\sqrt{3}S$

برقرار است. زاویه A از این مثلث:

(الف) حاده است. (ب) منفرجه است.

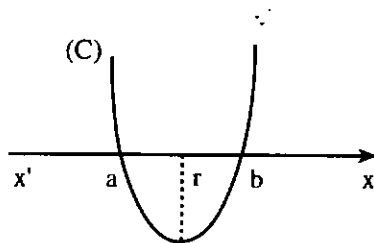
(ج) قائمه است. (د) قائمه نیست.

در این پرسش، گزینه‌ها با شیوه درست گزیده نشده‌اند؛ یکی از دو گزینه (الف) و (د) یا (ب) و (د) که درست فرض شود، دیگری نیز درست خواهد بود و این خلاف یکتا بودن گزینه پذیرفتنی در هر پرسش است. بنابراین، گزینه (ج) درست و پذیرفتنی است و کار روی رابطه داده شده، مورد ندارد.

۶. چند جمله‌ای $P(x)$ و مشتق آن $Q(x)$ ، دو تابع $y = P(x)$

و $y' = Q(x)$ را نشان می‌دهند. هرگاه منحنی C نمودار تابع

y' ، نسبت به محور طولها به شکل زیر باشد، نمودار تابع y :



(الف) در دو نقطه به طولهای a و b با محور طولها برخورد

می‌کند.

(ب) در نقطه به طول a ماکسیمم و در نقطه به طول b می‌نیم است.

(ج) در نقطه به طول a می‌نیم و در نقطه به طول b ماکسیمم است.

(د) در نقطه به طول r عطف و بر محور طولها مماس است. این پرسش ممکن است برای دانش‌آموزانی ناآشنا به نظر آید؛ اما اگر توجه کنند که منحنی C علامت مشتق را به دست می‌دهد (هرجا که منحنی بالای $x'x$ باشد، مشتق مثبت و هرجا که منحنی زیر $x'x$ باشد، مشتق منفی است) بسادگی خواهند داشت:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	$-$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$ M	$\searrow$ m	$+\infty$

و نتیجه می‌گیرند که گزینه (ب) درست و پذیرفتنی است. این نکته هم یادآوری می‌شود که بخش نخست گزینه (د) درست، اما بخش

معادله یکم و $x = -a$ ریشه مضاعف معادله دوم است و گزینه (ج) پذیرفتنی است.

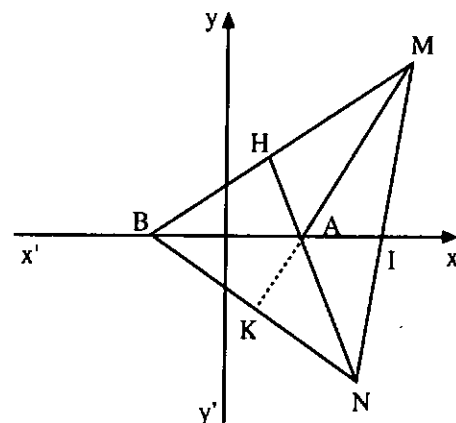
۴. در صفحه محورهای عمود برهم $x'x$ و $y'y$ دو نقطه ثابت

$A(1,0)$ و $B(-1,0)$ و نقطه متغیر $M(a,b)$ داده شده‌اند.

عمودی که در A بر BM و عمودی که در B بر AM رسم شود، با یکدیگر در $N(x,y)$ برخورد می‌کنند. دو مقدار x و y برابرند با:

(الف) $x = a+1, y = \frac{a^2-1}{b}$ (ب) $x = a, y = \frac{a^2-1}{b}$

(ج) $x = a-1, y = \frac{1-a^2}{b}$ (د) $x = a, y = \frac{1-a^2}{b}$



این پرسش در زمینه هندسه تحلیلی بیان شده است. اگر روش تحلیلی را به کار ببریم، باید ضریب زاویه‌ای دو خط AM و BN و پس از آن معادله‌های دو خط AH و BK را به دست آوریم و این دو معادله را با هم حل کنیم که این محاسبه‌ها مدتی از وقت ما را می‌گیرد. اگر شکل را به صورت هندسی آن در نظر بگیریم، می‌بینیم که نقطه برخورد دو ارتفاع از مثلث ABM است؛ پس MN ارتفاع سوم این مثلث و بر $x'x$ عمود است و بنابراین، طول نقطه N همان طول نقطه M و برابر با a است. اکنون مثلث BMN و ارتفاعهای آن را در نظر می‌گیریم و درمی‌یابیم دو مثلث IAM و IBN متشابهند و به دست خواهیم آورد که $IM \cdot IN$ با $IA \cdot IB$

برابر است و عرض نقطه N برابر با $\frac{1-a^2}{b}$ به دست می‌آید.

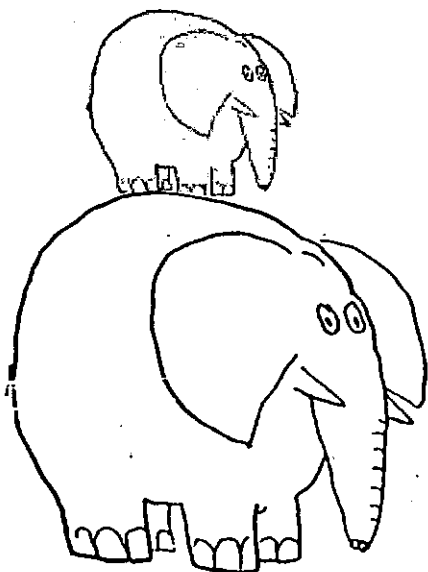
این نکته یادآوری می‌شود که در روش هندسی حل یک مسأله، آن گاه وقتی کمتر از روش تحلیلی صرف می‌شود که برای حل مسأله‌های هندسه، کارایی و آمادگی ذهنی وجود داشته باشد.

انها با هم برابر نیست، که مسأله‌ای نادرست است.
 بیان صحیح مسأله: برای آن که $A=B=C$ لازم و کافی
 است که $A \subset B$ و $B \subset C$ و $C \subset A$.

۳. خلاف مسأله می‌شود: «اگر a و b نسبت به هم اول باشند،
 دو عدد $p = ab$ و $s = a + b$ مقسوم‌علیهی مشترک بزرگتر از
 یک دارند». اگر k این مقسوم علیه مشترک باشد، p بر k بخش پذیر
 است و چون a و b نسبت به هم اولند، پس یکی از دو عدد a یا b
 مثلاً a بر k بخش پذیر است. در این صورت، $s = a + b$ هر دو
 بر k بخش پذیرند و نتیجه می‌شود b نیز بر k بخش پذیر است و
 نسبت به a اول نیست که خلاف فرض است. بنابراین، خلاف
 مسأله نادرست و خود مسأله درست است.

۴. شعاع دایره برابر است با $CM = \sqrt{AC \cdot BC}$ و مسأله
 عبارت می‌شود از رسم پاره خطی که واسطه هندسی دو پاره خط
 AC و BC باشد. رسم این پاره خط را از راه‌های گوناگون می‌توان
 انجام داد. یک راه آن چنین است: نیم‌دایره به قطر AC و عمودی
 که در B بر AC رسم شود، در نقطه T برخورد می‌کنند و CT
 واسطه هندسی AC و BC و برابر با شعاع دایره است.
 نقطه B داخل دایره مکان M واقع می‌شود؛ زیرا شعاع دایره
 که واسطه هندسی CB و CA است، از CB بزرگتر و از CA
 کوچکتر است.

۵. در مسأله (الف) چهار ضلعی به رأسهای C, B, P و Q
 محاطی است و این مسأله، بیان دیگری از مسأله (ب) است. مسأله
 را به صورت‌های دیگر هم می‌توان بیان کرد.



دوم آن نادرست است. منحنی نمودار تابع y دارای نقطه عطف به
 طول t است؛ اما در این نقطه، موازی با $x \cdot x$ (یا واقع بر آن)
 نمی‌تواند باشد.

پاسخهای تمرین (۳)

۱. فرض مسأله می‌شود $ab = P$ و حکم آن می‌شود $t = u$.
 اگر فرض درست باشد، یعنی عمل ضرب بدرستی انجام گرفته
 باشد، حکم $t = u$ نیز درست است.

عکس مسأله: اگر $t = u$ ، آن گاه $ab = P$ که معتبر نیست؛
 اگر در عمل ضرب، این اشتباه روی داده باشد که مضربی از ۹ به
 P افزوده یا از آن کم شده باشد، باز هم $t = u$ ، اما $ab \neq P$ خواهد
 بود.

عکس نقیض مسأله: اگر $t \neq u$ ، آن گاه $ab \neq P$ ، که درست
 است.

متقابل مسأله: اگر $ab \neq P$ ، آن گاه $t \neq u$ ، که در حالت کلی
 درست نیست.

خلاف مسأله: اگر $ab \neq P$ ، آن گاه $t = u$. یا این که اگر
 $t \neq u$ ، آن گاه $ab = P$ ، که نادرست است.

۲. فرض مسأله: $A \subset B$ و $B \subset C$ ، $C \subset A$:
 حکم مسأله: $A = B = C$

برهان مسأله: از دو رابطه $A \subset B$ و $B \subset C$ ، نتیجه می‌شود
 $A \subset C$ و از این رابطه و رابطه $C \subset A$ ، نتیجه می‌شود $A = C$.
 در این صورت داریم $B \subset A$ و از این رابطه و رابطه $A \subset B$ ،
 به دست می‌آید $A = B$ ؛ بنابراین $A = B = C$.

عکس مسأله: اگر $A = B = C$ ، آن گاه $C \subset A$ ، $B \subset C$ و
 $A \subset B$ که درست است؛ زیرا از دو مجموعه برابر، هر کدام
 زیر مجموعه دیگری است.

عکس نقیض مسأله: اگر از سه مجموعه A ، B و C هیچ دو تایی
 آنها با هم برابر نباشند، آن گاه هریک از این سه مجموعه، زیر مجموعه
 هریک از دو تایی دیگر نمی‌تواند باشد، که درست است.

متقابل مسأله: اگر هریک از سه مجموعه A ، B و C ،
 زیر مجموعه هریک از دو تایی دیگر نباشد، آن گاه هیچ دو تایی آنها
 با هم برابر نیست، که درست است.

خلاف مسأله: اگر هریک از سه مجموعه A ، B و C ،
 زیر مجموعه هریک از دو تایی دیگر باشد، آن گاه هیچ دو تایی از