

مسأله پریش ها

(از ریاضیات گسسته تا حسابان)

(derangement
problem)



● موشنگ شرقی

چرا هیچ کس سر جای خودش نیست؟

هیچ کس، حتی یک نفر سر جای خودش نایستاده بود! مربی برای یک لحظه، به شدت ناراحت شد و لجش گرفت؛ ولی ناگهان به فکر فرو رفت. چه قدر احتمال دارد که بچه‌ها همین جوری اتفاقی و بدون هماهنگی قبلی، این‌طور به صف ایستاده باشند؟

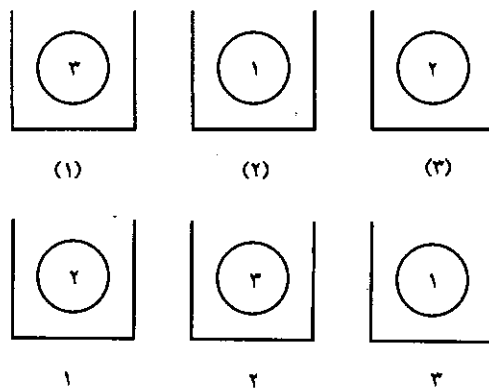
مسأله‌ای که می‌خواهیم به آن پردازیم، همین است؛ اگر n کودک در یک صف بایستند یا به طور کلی n شیء که هر یک جای به خصوص دارند، تصادفی جایگذاری شوند، چه قدر احتمال دارد که هیچ کدام سر جای خود نباشند؟ برای محاسبه احتمال یک پیشامد تصادفی، به خوبی می‌دانید که باید دو مقدار، یعنی تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد

آن صبح آفتابی در کودکستان، هیچ تفاوتی با روزهای قبل نداشت. اوّل صبح، طبق معمول، بچه‌ها به ترتیب قد از کوتاه تا بلند، با نظمی که ماه‌ها به آن عادت داشتند، به صف ایستادند و پس از خواندن سرود صبحگاهی، برای بازی و ورزش، در حیاط کودکستان و لابه‌لای درختان پراکنده شدند، اما هنگامی که خانم مربی در نیمه صبح، سر ساعت مقرر، زنگ دریافت خوراک صبح را به صدا درآورد تا بچه‌ها دوباره به صف بایستند، متوجه نکته عجیبی شد که نزدیک بود چشم‌هایش از حدقه دربیایند! به چهره‌های خندان و پرشیطنت بچه‌ها نگاه کرد؛ گویی همه با هم از قبل تباری کرده بودند تا خانم مربی را اذیت کنند و او را عصبانی کنند. آری

حال فرض کنید که به صورت مشابه، چهار توپ و چهار جعبه داریم. جایگذاری به چند طریق مختلف امکان پذیر است؟ باز هم از اصل ضرب کمک می گیریم. برای توپ شماره ۱، سه امکان مختلف وجود دارد. حال برای توپ شماره ۲ چند امکان مختلف وجود دارد؟ پاسخ در حالت های مختلف فرق می کند؛ اگر توپ (۱) در جعبه (۲) قرار گرفته باشد، برای توپ (۲) سه امکان مختلف وجود دارد؛ ولی اگر در یکی از جعبه های شماره ۳ یا ۴ قرار گرفته باشد، برای توپ (۲) دو امکان وجود خواهد داشت، البته با تفکیک این دو حالت، می توان پاسخ مسأله را به دست آورد؛ اما به نظر می رسد که به بیراهه می رویم؛ چرا که اگر تعداد توپ ها و جعبه ها بیشتر شود، کار از این هم سخت تر خواهد شد، باید روش دیگری را به کار ببریم. در بسیاری از مسائل آنالیز ترکیبی (شمارش) به جای شمارش مستقیم، از شمارش اعضای متمم مجموعه مورد نظر کمک می گیریم. شاید در این جا هم این روش کارساز باشد. متمم مجموعه حالت هایی که هیچ یک از توپ ها سر جای خودشان نیستند، کدام مجموعه حالت هاست؟ امیدوارم که مثل بسیاری از دانش آموزان عجول، فوری نگوئید مجموعه حالت هایی که همه توپ ها سر جای خودشان هستند؛ زیرا نقیض هیچ یک، همه نیست. یک مثال می زنیم؛ فرض کنید معلم شما در کلاس درس می گوید هیچ یک از دانش آموزان این کلاس درس خوان نیستند. شما که به حرف او معترض هستید، پاسخ او چه می گوئید؟ آیا می گوئید: نخیر، همه دانش آموزان کلاس درس خوان هستند؟ روشن است که چنین نیست؛ بلکه در پاسخ می گوئید: بعضی از دانش آموزان کلاس (حداقل یک نفر از آنها) درس خوان هستند؛ بنابراین متمم مجموعه حالت هایی که هیچ یک از توپ ها در جعبه هم شماره خودشان نیستند، می شود مجموعه حالت هایی که حداقل یکی از توپ ها سر جای خودش باشد. به عنوان مثال، در حالتی که سه توپ و سه جعبه داریم، اگر A مجموعه حالت هایی باشد که توپ (۱) در جعبه (۱) قرار دارد، و B و C مجموعه حالت هایی باشند که توپ های ۲ و ۳ سر جای خودشان باشند، هدف ما تعیین تعداد اعضای مجموعه

اعضای پیشامد تصادفی، مشخص شوند. در این گونه مسائل، تعداد اعضای فضای نمونه، به سادگی مشخص می شود، چرا که تعداد تمام جایگشت های n شیء در یک ردیف (به عنوان مثال، تعداد روش های مختلف ایستادن n کودک در یک صف) مساوی n! است. بنابراین اجازه دهید مسأله را اندکی محدودتر کنیم به این مسأله: به چند طریق می توان n شیء را در n مکان (هر یک از اشیای متعلق به یکی از مکان هاست) قرار داد؛ به قسمی که هیچ یک از اشیای سر جای خود نباشند؟ پاسخ به این سؤال را از حالت های خاص و ساده شروع کنیم. فرض کنیم دو توپ فوتبال با شماره های ۱ و ۲ داریم. به چند طریق می توان این دو توپ را در دو جعبه با شماره های ۱ و ۲ قرار داد؛ به قسمی که هیچ یک از دو توپ، سر جای خودشان (در جعبه هم شماره با خودشان) قرار نگیرند؟ پاسخ بسیار ساده است؛ یک طریق؛ یعنی توپ ۱ را در جعبه ۲ و توپ ۲ را در جعبه ۱ قرار می دهیم. حال اگر سه توپ با شماره های ۱، ۲ و ۳ و سه جعبه با همین شماره ها داشته باشیم به چند طریق می توانیم توپ ها را درون جعبه ها بگذاریم؛ به طوری که هیچ یک از سه توپ در جعبه هم شماره با آن قرار نگیرد؟ باز هم با کمی دقت و محاسبه، پاسخ به دست می آید. برای توپ شماره ۱ دو امکان وجود دارد، (زیرا می تواند در یکی از دو جعبه شماره ۲ یا ۳ قرار گیرد) حال اگر توپ ۱ را در یکی از این دو جعبه قرار دهیم، برای توپ های شماره ۲ و ۳ تنها یک امکان باقی می ماند. (چرا؟)

بنابراین طبق اصل ضرب، $2 \times 1 = 2$ طریق مختلف وجود دارد که در شکل های زیر مشخص شده اند:



AUBUC یا AUBUCn است. سپس تعداد تمام حالت‌ها (۳!) را از این عدد کم می‌کنیم تا تعداد حالت‌هایی به دست آید که هیچ یک از توپ‌ها سر جای خودشان نیستند. برای محاسبه تعداد اعضای اجتماع دو یا بیشتر مجموعه نیز از اصلی به نام اصل شمول و عدم شمول (اصل طرد - شمول) استفاده می‌کنیم. در این جا اشاره‌ای نیز به این اصل می‌کنیم. اصل شمول و عدم شمول - ماجرای کارمندی که از آقای رئیس مرخصی می‌خواست!

آن روز، آقای احمدی خیلی عجله داشت؛ با نگرانی و دلهره خود را به دفتر رئیس اداره رساند، در زده و پس از کسب اجازه وارد اتاق شد.

آقای احمدی: سلام آقای رئیس، اگر اجازه بفرمایید، عرض کوچکی داشتم!

رئیس: سلام جانم، خواهش می‌کنم بفرمایید.

آقای احمدی: قربان می‌خواستم اگر اجازه بدهید و امکان داشته باشد، یک روز مرخصی استحقاقی بگیرم. برگه درخواست آن را هم پر کرده‌ام.

رئیس: بله جانم! چی فرمودید؟! مرخصی! مگر شما کار هم می‌کنید که مرخصی می‌خواهید؟!

آقای احمدی (باتعجب): چرا قربان؟ مگر از من کوتاهی سرزده است؟

رئیس: نه جانم، ولی شما اصلاً کاری نمی‌کنید که مرخصی بخواهید! بگذارید با هم حساب کنیم، ببینیم شما چه قدر در این اداره کار می‌کنید. بگو ببینم تو در شبانه روز حداقل ۸ ساعت می‌خوابی، این طور نیست؟ (آقای احمدی: بله آقای رئیس) بسیار خوب، پس در هر سه شبانه روز، معادل ۲۴ ساعت یا یک شبانه روز می‌خوابی و در نتیجه اگر سال را ۳۶۰ روز به حساب آوریم، تو جمعاً ۱۲۰ روز آن را در خواب هستی! حالا می‌رسیم به ساعت‌هایی که صرف خوردن سه وعده غذای تو می‌شود؛ آن هم هیچ نباشد، ۳ ساعت وقت تو را در روز با حساب ساعت‌های قبل و بعد آن می‌گیرد، پس هر ۸ روز، دقیقاً معادل یک شبانه روز صرف خوردن غذا می‌شود؛ یعنی در یک سال ۴۵ روز نیز به این مهم

اختصاص دارد. اما ۵۲ جمعه را نیز نباید فراموش کرد و نیز تعطیلات نوروزی و ایام رسمی تعطیل که روی هم با نگاه به تقویم، ۴۳ روز است. اما ساعت‌های استراحت بعد از ظهر و ساعت‌هایی که با خانواده‌ات هستی هم باید حساب شود. تو دیگر ساعت ۵ بعد از ظهر به خانه می‌رسی که تا ساعت ۹ شب، یعنی هر روز ۴ ساعت در اختیار خانواده‌ات هستی که هر ۶ روز آن ۲۴ ساعت و معادل یک روز کامل است و با این حساب، در سال ۶۰ روز تو نیز صرف این موضوع می‌شود. فراموش نکنیم که تو یک ساعت صبح و یک ساعت بعد از ظهر هم در اتوبوس سرویس اداره می‌گذرانی که هر روز ۲ ساعت و هر ۱۲ روز، معادل یک روز کامل است، پس در ۳۶۰ روز، بگذار حساب کنم، ۳۶۰ تقسیم بر ۱۲ می‌شود... آها! ۳۰ روز! و یک چیز دیگر، تعطیلات تابستانی اداره را که صرف حسابرسی می‌شود، فراموش کرده بودم، آن هم ۹ روز است. دیگر چیزی نمانده است! جمع می‌کنیم:

$$۱۲۰ + ۴۵ + ۵۲ + ۴۳ + ۶۰ + ۳۰ + ۹ = ۳۵۹$$

خوب تمام شد، اگر این ۳۵۹ روز را از ۳۶۰ روز کم کنیم، می‌ماند یک روز! تو یک روز در سال کار می‌کنی، آن وقت آن را هم می‌خواهی مرخصی بگیری و بروی! برو جانم! تا عصبانی تر نشده‌ام...

از منطق بی‌بدیل (!) جناب رئیس که بگذریم، راستی مغالطه این استدلال کجاست؟! به یاد دارم که وقتی از تعدادی شاگردانم در یک کلاس، همین سؤال را پرسیدم، بعضی از آنها گفتند: خب، رئیس با ساعت‌های خارج از اداره کارمند خود چه کار دارد!

امیدوارم که پاسخ شما هم این گونه عوامانه نباشد و مرا ناامید نکند! اما با کمی دقت، ایراد استدلال بدیهی است. بسیاری از ساعت‌ها در محاسبه آقای رئیس، دوباره و سه باره (و گاهی چندباره) به حساب آمده‌اند. برای مثال، ساعت‌های خواب کارمند در ایام تعطیل نیز به حساب آمده‌اند و یک بار هم جداگانه حساب شده‌اند و... در واقع اگر قرار است همه ساعت‌ها با هم جمع شوند، باید ساعت‌های اضافه که چند بار حساب شده‌اند، حذف (طرد) شوند و این همان اصل

حل: اگر مجموعه دانش آموزان عینکی را با A و مجموعه دانش آموزان چپ دست را با B نمایش دهیم، با توجه به مفروضات مسأله داریم:

$$n(A) = 24 \text{ و } n(B) = 20 \text{ و } n(A \cup B) = 40 - 3 = 37$$

لازم به ذکر است که $A \cup B$ مجموعه دانش آموزانی است که عینک می‌زنند یا چپ دست هستند. اکنون هدف مسأله، تعیین تعداد اعضای مجموعه $A \cap B$ است. با توجه به دستور گفته شده داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$

$$37 = 24 + 20 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 7$$

یعنی، ۷ نفر هم عینک می‌زنند و هم چپ دست هستند.

مثال (۲): تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیرند، به دست آورید.

حل: اگر مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ که مضرب ۲ هستند (عددهای زوج) A و مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ را که بر ۳ بخش پذیرند، B و آنها را که بر ۵ بخش پذیرند، C بنامیم، منظور مسأله تعیین $n(A \cup B \cup C)$ است و داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

برای تعیین مفروضات مسأله، از این قضیه در تئوری اعداد کمک می‌گیریم.

«تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n که بر r»
($r \neq 0$) بخش پذیرند، برابر با $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ است.»

در قضیه فوق [] علامت جزء صحیح است. اکنون با توجه به این قضیه، می‌توان نوشت:

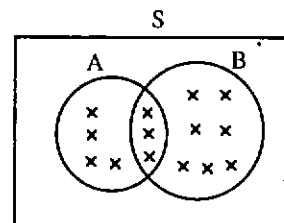
$$n(B) = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33 \text{ و } n(A) = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50$$

ولی برای محاسبه $n(A \cap B)$ باید به این موضوع توجه کنیم که عددهایی که بر ۲ و ۳ بخش پذیرند، بر ۶ بخش پذیرند (چرا؟) لذا می‌توان نوشت: $n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$ حال با استفاده از همین الگو، می‌توان نوشت:

$$n(A \cup B \cup C) = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$$

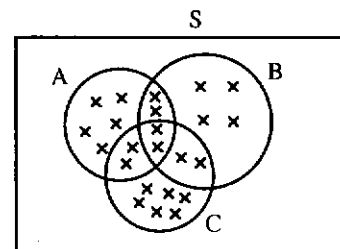
طرد و شمول است، فرض کنید بخواهیم تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ را به دست آوریم. به کمک یک نمودار ون (venn - diagram) این کار به سادگی انجام می‌شود. اگر تعداد اعضای مجموعه A ($n(A)$) را با تعداد اعضای مجموعه B ($n(B)$) جمع کنیم، تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه، دو بار به حساب می‌آیند (شمول)، لذا باید یک بار کم شوند (عدم شمول)؛ بنابراین داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



اگر همین عمل را برای سه مجموعه A، B و C انجام دهیم، مطابق شکل، اگر تعداد اعضای سه مجموعه A، B و C را با هم جمع کنیم، تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cap B$ ، $A \cap C$ و $B \cap C$ هر کدام دوبار محسوب می‌شوند و باید یک بار کم شوند؛ ولی ضمن این اعمال، تعداد اعضای مجموعه $A \cap B \cap C$ سه بار به حساب آمده و سه بار کم می‌شود. بنابراین یک بار دیگر باید به حساب آید. با این روش، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



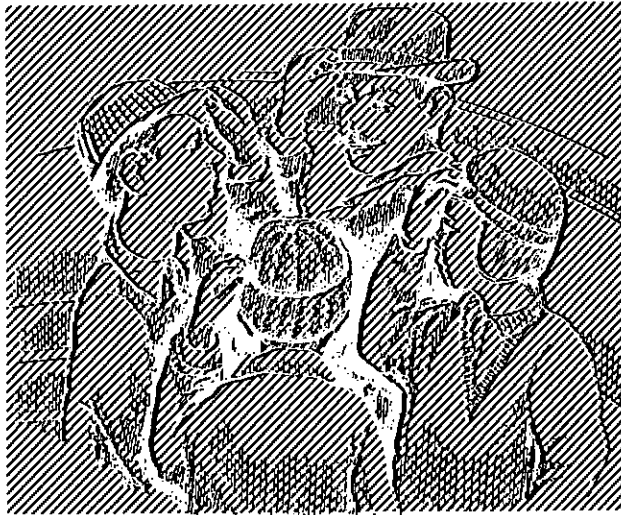
اجازه دهید چند مثال بیاوریم.

مثال (۱): در یک کلاس درس با ۴۰ نفر دانش آموز، ۲۴

نفر عینک می‌زنند و ۲۰ نفر هم چپ دست هستند، همچنین ۳ نفر نه عینک می‌زنند و نه چپ دست هستند. چند نفر هم عینک می‌زنند و هم چپ دست هستند؟

تعداد اعضای اشتراک دو به دوی مجموعه‌ها (که تعداد آنها $\binom{n}{2}$ است) کم می‌کنیم و با تعداد اعضای اشتراک سه به سه مجموعه‌ها (به تعداد $\binom{n}{3}$ است) جمع می‌کنیم و...

اکنون می‌توانیم به مسأله خودمان برگردیم. به چند طریق می‌توانیم سه توپ ۱، ۲ و ۳ را در سه جعبه ۱، ۲ و ۳ قرار دهیم که حداقل یک توپ در جای خودش باشد؟



اگر A مجموعه حالت‌هایی باشد که توپ (۱) در جای خودش (یعنی جعبه ۱) باشد، چون برای هر توپ دیگر هر کدام ۲ امکان وجود دارد، لذا $n(A) = 2!$ و به همین ترتیب، اگر B و C مجموعه حالت‌هایی باشد که توپ‌های (۲) و (۳) در جای خودشان باشند، $n(B) = n(C) = 2!$ و بدیهی است که $n(AB) = n(AC) = n(BC) = 1!$ و $n(ABC) = 1!$ آن جا داریم:

$$n(A \cup B \cup C) = 2! + 2! + 2! - 1! - 1! - 1! + 1! = 4$$

و از آن جا تعداد حالت‌هایی که هیچ کدام از سه توپ سر جای خودشان نباشند، برابر است با:

$$n(A \cup B \cup C)' = n(S) - n(A \cup B \cup C) = 3! - 4 = 2$$

و این همان پاسخی است که قبلاً با شمارش مستقیم به دست آوردیم. اکنون دیگر کار تمام است و الگوی ما برای شمارش حالت‌های دیگر همین است. فرض کنید ۴ توپ ۱، ۲، ۳ و ۴ را در چهار جعبه ۱، ۲، ۳ و ۴ قرار داده‌ایم. به چند طریق ممکن است هیچ یک از توپ‌ها در جعبه خودشان نباشند؟ ابتدا تعداد حالت‌هایی را می‌شماریم که حداقل یک توپ

یعنی ۷۴ عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیرند؛ متمم این مجموعه چند عضو دارد؟ پاسخ ساده است $100 - 74 = 26$ ، ولی این ۲۶ عدد چه ویژگی دارند؟ آری اینها عددهایی هستند که نه مضرب ۲، نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ هستند.

تمرین (۱): تعداد عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ را به دست آورید که نه بر ۱۱ و نه بر ۱۲ بخش پذیرند.

تمرین (۲): تعداد عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ را به دست آورید که نه مربع کامل و نه مکعب کامل باشند.

حال سعی می‌کنیم اصل شمول و عدم شمول را به چهار مجموعه و بیشتر تعمیم دهیم. برای این منظور، از قوانین جبر مجموعه‌ها به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C \cup D) &= n(A) + n(B) + n(C \cup D) - n(A \cap B) - \\ & n[A \cap (C \cup D)] - n[B \cap (C \cup D)] + n[A \cap B \cap (C \cup D)] = \\ & n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(C \cap D) - n(A \cap B) - \\ & n[(A \cap C) \cup (A \cap D)] - n[(B \cap C) \cup (B \cap D)] + \\ & n[(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap D)] = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - \\ & n(C \cap D) - n(A \cap B) - [n(A \cap C) + n(A \cap D) - n(A \cap C \cap D)] - \\ & [n(B \cap C) + n(B \cap D) - n(B \cap C \cap D)] + \\ & [n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)] = \\ & n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - \\ & n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + \\ & n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

و به این ترتیب، دستور محاسبه $n(A \cup B \cup C \cup D)$ به دست می‌آید.

تمرین: تعداد عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۴۰۰ را به دست آورید که مضرب ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷ باشند، اکنون می‌توانیم دستور محاسبه $n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ را حدس بزنیم:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum n(A_i) - \sum n(A_i \cap A_j) + \sum n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} n(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

یعنی ابتدا مجموع تعداد اعضای همه مجموعه‌ها (که تعداد آنها n تا است) را با هم جمع می‌کنیم، سپس این مجموع را از

نماد $D(n)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D(n) = n! - [n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \times \frac{n!}{n!}] \Rightarrow$$

$$D(n) = n! [1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^n \times \frac{1}{n!}]$$

به عنوان مثال داریم:

$$D(4) = 4! (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = 4! (\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24}) = 9$$

$$D(5) = 5! (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}) =$$

$$120 (\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}) = 44$$

اکنون به سؤال ابتدایی مقاله می‌توانیم پاسخ دهیم. به چند طریق ممکن است ۱۰ کودک که پس از پراکنده شدن دوباره به صف ایستاده‌اند، هیچ کدام سر جای خودشان نایستاده باشند؟

احتمال این اتفاق چه قدر است؟

$$D(10) = 10! [1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} +$$

$$\frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}] = 1334961$$

و احتمال این پیشامد برابر است با:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1334961}{10!} = \frac{16481}{44800} \approx 0.37$$

به طور کلی، هرگاه n شیء مختلف در n مکان مختلف قرار گیرند، احتمال بروز یک پریش برابر است با:

$$p = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \times \frac{1}{n!}$$

به عنوان مثال، اگر سه توپ را از سه جعبه برداشته و دوباره به طور تصادفی در جعبه‌ها قرار دهیم، احتمال آن که هیچ توپ در جعبه خود نشاند، برابر است با:

$$p = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$$

اما آیا روش مستقیم دیگری برای تعیین این احتمال وجود ندارد؟ نمی‌شود گفت احتمال آن که توپ ۱ در جعبه ۱ باشد، برابر $\frac{1}{3}$ و در نتیجه، احتمال متمم آن، یعنی احتمال آن که توپ (۱) در جعبه (۱) نباشد، مساوی $\frac{2}{3}$ است. به همین ترتیب، احتمال آن که توپ (۲) در جعبه خود نشاند و همین احتمال برای توپ (۳) مساوی $\frac{2}{3}$ است. بنابراین احتمال آن که هیچ یک از توپ‌ها در جعبه خودشان نباشند، طبق قاعده

سرجای خودش باشد:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = 3! + 3! + 3! + 3! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! - 2! + 1! + 1! + 1! + 1! - 1! = 15 \Rightarrow n(A \cup B \cup C \cup D)' = 4! - 15 = 9$$

یعنی به ۹ طریق مختلف این کار ممکن است. درباره تعداد عددها و نحوه محاسبه آنها فکر کنید. اکنون مسأله دیگری مشابه همین مسأله طرح می‌کنیم. پنج دوست با هم به یک میهمانی رفته و کلاه‌های خود را در یک جا گذاشته‌اند. ناگهان برق می‌رود! و در تاریکی هر کدام یکی از کلاه‌ها را تصادفی برداشته و بر سر می‌گذارند. به چند حالت ممکن است هیچ کدام کلاه خودش را بر سر نگذارند؟! چه قدر احتمال برای این پیشامد قائل هستید؟

در پاسخ باید گفت که اگر A, B, C, D و E به ترتیب مجموعه حالت‌هایی باشند که نفرات اول تا پنجم، کلاه خودشان را بر سر گذاشته باشند، هدف تعیین $n(A \cup B \cup C \cup D \cup E)'$ است، مانند مثال قبل می‌توان نوشت:

$$n(A \cup B \cup C \cup D \cup E) = \binom{5}{1} \times 4! - \binom{5}{2} \times 3! + \binom{5}{3} \times 2! -$$

$$\binom{5}{4} \times 1! + \binom{5}{5} \times 0! = 120 - 60 + 20 - 5 + 1 = 76 \Rightarrow$$

$$n(A \cup B \cup C \cup D \cup E)' = 5! - 76 = 120 - 76 = 44$$

و احتمال بروز این پیشامد نیز به راحتی به دست می‌آید:

$$p(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}$$

حال می‌توانیم دستور کلی مسأله را نیز استخراج کنیم.

فرض کنیم n شیء در n مکان به طور تصادفی قرار گیرند. به چند طریق ممکن است هیچ یک از اشیاء سر جای اصلی خود نباشند؟ ابتدا تعداد حالت‌هایی که حداقل یکی از اشیاء سر جای خود هستند، به دست می‌آوریم:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! -$$

$$\binom{n}{4}(n-4)! + \dots = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \dots +$$

$$(-1)^{n+1} \times \frac{n!}{n!}$$

و از آن جا تعداد حالت‌هایی که طی آنها هیچ شیء سر جای خودش نیست (یعنی تعداد پریش‌های n شیء) که آن را با

ضرب احتمال‌ها برابر است با:

$$p = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \neq \frac{1}{3}$$



توپ‌ها و جعبه‌ها نامتناهی باشد (یعنی به بی‌نهایت میل کند) آیا در این صورت، نمی‌توان گفت که پیشامد قرار داشتن (یا نداشتن) توپ n ام در جعبه n ام، تأثیری بر پیشامد قرار داشتن (یا نداشتن) توپ n ام در جعبه n ام ندارد؟ به نظر می‌رسد که همین طور باشد؛ زیرا تعداد جعبه‌ها و توپ‌ها بی‌شمار است و قرار داشتن یا نداشتن یک توپ در جعبه خودش، چندان تأثیری در افزایش یا کاهش شانس قرار داشتن یا نداشتن توپ دیگر در جعبه خودش، ندارد؛ بنابراین اگر $n \rightarrow \infty$ می‌توان نوشت:

$$P = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

ولی حد $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ وقتی که n به بی‌نهایت میل کند، برای ما آشناست؛ زیرا می‌دانیم $e^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$ که در این جا e عدد معروف اولر (پایه لگاریتم‌های نپری معروف به عدد نپری) است؛ بنابراین $\frac{1}{e} = e^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. حال اگر این حد را از دستور احتمال پریش به دست آوریم، نتیجه جالب توجهی به دست می‌آید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \right)$$

$$(-1)^n \left(\frac{1}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{k!}\right)^k$$

و از آن جا در می‌یابیم که سری $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ به عدد $\frac{1}{e}$ همگراست.

آیا این نتیجه را پیش از این نمی‌دانستید؟

تمرین: احتمال آن که هیچ یک از ۱۰ دانش‌آموز را که سر صف می‌ایستند، سر جای خودشان نایستاده باشند، قبلاً به دست آوردیم. این عدد را با عدد $\frac{1}{e}$ مقایسه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

تمرین: قرار است از طرف اداره آموزش و پرورش، تعداد صد عدد نامه به صد مدرسه فرستاده شود. نامه‌ها نوشته شده و نشانی مدارس روی یک صد پاکت نامه تایپ شده است، اگر نامه و پاکت‌ها به هم خورده شده و مستخدم بی‌سواد اداره، نامه‌ها را تصادفی درون پاکت‌ها قرار دهد و آنها را پست کند، چه قدر احتمال دارد که همه نامه‌ها به مقصد خودشان بروند؟ تقریباً چه قدر احتمال دارد که هیچ نامه‌ای به نشانی خودش نرود؟ این دو عدد را با هم مقایسه کنید؛ آیا نتیجه جالب نیست؟

ولی چرا این طور شد و چرا این دو احتمال برابر نیستند؟ برای خواننده‌ای که تعریف روشنی از استقلال پیشامدها دارد، علت این امر چندان پوشیده نیست. به سادگی می‌توان دریافت که پیشامدهای فوق، یعنی پیشامد قرار نداشتن توپ (۱) در جای خودش و پیشامد قرار نداشتن توپ (۲) یا توپ (۳) در جعبه‌های مربوط به خودشان، از یکدیگر مستقل نیستند، زیرا قرار داشتن (یا نداشتن) توپ (۱) در جعبه خودش، احتمال قرار داشتن (یا نداشتن) توپ (۲) در جعبه خودش را تغییر می‌دهد و بر آن مؤثر است (چرا؟). قانون ضرب احتمال‌ها فقط در مورد پیشامدهای مستقل برقرار است؛ یعنی اگر دو پیشامد A و B هیچ تأثیری بر یکدیگر نداشته باشند و وقوع یا عدم وقوع یکی بر وقوع یا عدم وقوع دیگری مؤثر نباشد، می‌توان نوشت:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

در این جا به نظر می‌رسد که کار تمام شده باشد و به آخر خط رسیده باشیم؛ ولی ما هنوز هم حرف‌هایی برای گفتن داریم! فرض کنید تعداد توپ‌ها و جعبه‌ها بیشتر و بیشتر شوند؛ برای مثال، هزار توپ و هزار جعبه، اصلاً تعداد