

مرتبه‌ی ماتریس‌های پوچ توان

● حسین کریمی

دو سؤال زیر پاسخ دهیم:

۱. چه رابطه‌ای بین m (مرتبه‌ی پوچ توانی A) و n (مرتبه‌ی A)

وجود دارد؟

۲. چگونه یک ماتریس پوچ توان را بسازیم؟

برای پاسخ به سؤالات بالا، این مطلب مهم را به عنوان پیش نیاز مطرح می‌کنیم: تمام ماتریس‌های مربعی $n \times n$ در یک معادله‌ی خاصی صدق می‌کنند که آن را «معادله‌ی سرشت‌نمایی» و یا «معادله‌ی مشخصه» گویند.

$$A^n = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})A^{n-1}$$

$$- \dots + (-1)^n (A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn})A + (-1)^{n-1} |A|I$$

مثلاً تمام ماتریس‌های 2×2 مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در معادله‌ی

$$A^2 = (a+d)A - |A|I$$

$$A^2 = (A_{11} + A_{22})A - |A|I \quad \text{یا} \quad A^2 = (a_{11} + a_{22})A - |A|I$$

ماتریس مربعی غیر صفر $A_{n \times n}$ را پوچ توان گوئیم، هرگاه عدد

طبیعی m یافت شود که $A^m = O$ باشد، اگر m کوچک‌ترین عدد

طبیعی باشد که در رابطه‌ی فوق صدق کند، گوئیم ماتریس A پوچ

توان از مرتبه‌ی m است.

مثال ۱: $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ که در آن داریم $A^2 = O$. در نتیجه

A پوچ توان از مرتبه‌ی ۲ است.

مثال ۲: $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ که در آن داریم $A^2 = O$.

در نتیجه A پوچ توان از مرتبه‌ی ۲ است.

مثال ۳: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$ که در آن داریم $A^3 = O$.

در نتیجه A پوچ توان را مرتبه‌ی ۳ است. در این مقاله می‌خواهیم به

ممکن است تمام ماتریس های 3×3 مانند $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ در معادله ی

$$A^T = (a+e+i)A^T - \left(\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ g & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} \right) A + |A|I$$

صدق می کنند. به عبارت دیگر:

$$A^T = (a_{11} + a_{22} + a_{33})A^T - (A_{11} + A_{22} + A_{33})A + |A|I$$

و نیز تمام ماتریس های 4×4 مانند $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$ در

معادله ی زیر صدق می کنند.

$$A^T = (a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})A^T - \left(\begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ i & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & d \\ m & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f & g \\ j & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f & h \\ n & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & l \\ o & p \end{bmatrix} \right) A^T + (A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44})A - |A|I$$

هر یک از ضرایب A^T ، در میان ماتریس هایی هستند که از حذف دو سطر و دو ستون هم مکان حاصل می شوند. برای مثال، اگر سطرها و ستون های سوم و چهارم را حذف کنیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix}$$

اکنون به سئوالات مطرح شده درباره ی ماتریس های 2×2 و سپس در مورد ماتریس های 3×3 پاسخ می دهیم و در نهایت به بیان حالت کلی می پردازیم.

اگر در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داشته باشیم: $|A| = 0$ و

$a + d = 0$ ، با توجه به معادله ی مشخصه ی ماتریس های 2×2

داریم: $A^T = 0$ و اگر برای ماتریس غیر صفر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داشته

باشیم: $A^T = 0$ ، آن گاه با توجه به معادله ی مشخصه ی ماتریس های 2×2 و پوچ توان بودن A که حاکی از $|A| = 0$ است، داریم: $O = (a+d)A - O$ که نشان می دهد: $a + d = 0$ پس

بدین ترتیب، $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ پوچ توان از مرتبه ی ۲ است، اگر و فقط

$$a + d = 0 \text{ و } |A| = 0$$

حال فرض کنیم ماتریس غیر صفر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ پوچ توان از

مرتبه ی m باشد ($m > 2$ ، $A^m = O$ ، $|A| = 0$). اگر طرفین

معادله ی $A^T = (a+d)A - |A|I$ را در A^{m-2} ضرب کنیم،

داریم: $A^m = (a+d)A^{m-1} - |A|A^{m-2}$ که با توجه به شرایط

فوق داریم: $O = (a+d)A^{m-1} - O$ و در نتیجه $a + d = 0$.

این دو شرط یعنی $|A| = 0$ و $a + d = 0$ همان شرایط پوچ توانی

A از مرتبه ی ۲ است. پس شرط $m > 2$ باطل است، یعنی $m = 2$

و به عبارت دیگر $m = n$ است.

با توجه به شرایط ذکر شده، می توان به سهولت ماتریس پوچ توان

2×2 را ساخت. کافی است عدد دل خواه A و عدد دل خواه غیر صفر

$$K \text{ را در نظر بگیریم و بنویسیم: } A = \begin{bmatrix} a & \frac{a^T}{k} \\ -k & -a \end{bmatrix} \text{ مانند:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

اکنون فرض کنیم برای ماتریس غیر صفر $A_{3 \times 3}$ ($n = 3$) داشته

باشیم $A^T = O$ (پوچ توان از مرتبه ی ۲ است و $m = 2$).

بنابراین $A^T = O$ و $|A| = 0$ که با قرار دادن آن ها در معادله ی

مشخصه ی ماتریس های 3×3 داریم:

$$O = (a_{11} + a_{22} + a_{33})O - (A_{11} + A_{22} + A_{33})A + |A|I$$

بنابراین:

$$A_{3 \times 3} \neq O \text{ و } A^T = O \Rightarrow |A| = 0 \text{ و } A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$$

اما عکس ترکیب شرطی فوق برقرار نیست. یعنی اگر $|A| = 0$ و

$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ ، آن گاه الزاماً رابطه ی $A^T = O$ برقرار

نخواهد بود و A^T و توان های بعدی، مضرب هایی از A^T خواهند

بود (در این صورت می گویم ماتریس A ، تناوب از مرتبه ی ۲ است).

مثال: فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ و A^2 و A^3 و A^T

A^n را تعیین کنید.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ و } A^2 = \begin{bmatrix} 40 & 50 & 60 \\ 20 & 25 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} = 5A^T$$

$$A^2 = A^T \cdot A = (5A^T) \cdot A = 5A^T \cdot A = 5(5A^T) = 25A^T$$

$$\text{و } A^n = 5^{n-2} \cdot A^T$$

توجه داشته باشید که در مثال بالا، هم $|A| = 0$ و هم

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0 \text{ در حالتی که } A^T \neq O$$

سؤال: چه شرطی برای ماتریس غیر صفر $A_{3 \times 3}$ در نظر بگیریم

تا $A^T = O$ باشد؟

$$\text{فرض کنیم برای ماتریس } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ داشته باشیم}$$

$A^T = O$ (البته لازم است که $|A| = 0$ و $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ که با توجه به مثال قبل، می دانیم کافی نیست).

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0 \Rightarrow ei - fh + ai - gc + ae - bd = 0 \quad (1)$$

$$A^T = O \Rightarrow (A^T \text{ ستون اول}) \times (A^T \text{ سطر اول}) = 0 \Rightarrow a^2 + bd + cg = 0 \quad (2)$$

$$(A^T \text{ ستون دوم}) \times (A^T \text{ سطر دوم}) = 0 \Rightarrow bd + e^2 + fh = 0 \quad (3)$$

$$(A^T \text{ ستون سوم}) \times (A^T \text{ سطر سوم}) = 0 \Rightarrow gc + fh + i^2 = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (1), (2), (3), (4) &\rightarrow a^2 + e^2 + i^2 + 2ae + 2ai + 2ei = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{a + e + i = 0} \end{aligned} \quad (5)$$

$$(1), (2) \rightarrow ei - fh + ai + ae + a^2 = 0 \xrightarrow{(5)} ei - fh = 0 \Rightarrow \boxed{A_{11} = 0}$$

$$(1), (3) \rightarrow ai - gc + ei + ae + e^2 = 0 \xrightarrow{(5)} ai - gc = 0 \Rightarrow \boxed{A_{22} = 0}$$

$$(1), (4) \rightarrow ae - bd + ei + ai + i^2 = 0 \xrightarrow{(5)} ae - bd = 0 \Rightarrow \boxed{A_{33} = 0}$$

بنابراین ماتریس غیر صفر $A_{3 \times 3}$ پوچ توان از مرتبه ی ۲ است،

اگر و فقط اگر سه شرط بسالارا دارا باشد: $|A| = 0$ و

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0 \text{ و } a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

با توجه به معادله ی مشخصه ی ماتریس های 3×3 ، اگر $|A| = 0$ و $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ و $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ ، آن گاه $A^T = O$

اگر فرض کنیم ماتریس غیر صفر $A_{3 \times 3}$ پوچ توان از مرتبه ی ۳ باشد، بدیهی است که $|A| = 0$ و $A \neq O$ و $A^T \neq O$ که با توجه به معادله ی مشخصه داریم:

$$O = A^T = (a_{11} + a_{22} + a_{33})A^T - (A_{11} + A_{22} + A_{33})A + O$$

$$\Rightarrow (a_{11} + a_{22} + a_{33})A^T = (A_{11} + A_{22} + A_{33})A \quad (I)$$

با توجه به غیر صفر بودن A و A^T ، یکی از دو حالت زیر رخ می دهد:

(الف) $A_{11} + A_{22} + A_{33} \neq 0$ و $a_{11} + a_{22} + a_{33} \neq 0$ از ضرب طرفین تساوی (I) در A داریم: $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ و این خلاف فرض است.

(ب) $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ و $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ بنابراین ماتریس غیر صفر $A_{3 \times 3}$ پوچ توان از مرتبه ی ۳ است، اگر و فقط اگر سه شرط زیر را دارا باشد: $|A| = 0$ و

$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ و $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ مسئله: نشان دهید اگر ماتریس $A_{3 \times 3}$ پوچ توان از مرتبه ی m باشد، آن گاه $m \leq 3$.

حل: نشان می دهیم شرط $m > 3$ برقرار نیست:

با توجه به $|A| = 0$ و $A^m = O$ و ضرب طرفین معادله ی مشخصه در A^{m-2} داریم:

$$O = A^m = (a_{11} + a_{22} + a_{33})A^{m-1} - (A_{11} + A_{22} + A_{33})A^{m-2} + O \cdot A^{m-3}$$

$$\Rightarrow (a_{11} + a_{22} + a_{33})A^{m-1} = (A_{11} + A_{22} + A_{33})A^{m-2}$$

که با توجه به غیر صفر بودن A^{m-1} و A^{m-2} به مانند مطالب فوق، دو حالت پیش می آید که به همان ترتیب عمل می کنیم و خواهیم داشت: $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ و $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ که با توجه به $|A| = 0$ ، همان شرایط پوچ توانی A از مرتبه ی ۳ خواهد بود و شرط $m > 3$ باطل است.

$$\text{اکنون برای نمونه، ماتریس } A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ را چنان تعیین}$$

می کنیم که $A^T = O$ باشد.

می‌کنیم؛ مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & c \\ 2 & 4 & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

با توجه به $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ داریم: $i = -5$ ، بنابراین:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & c \\ 2 & 4 & f \\ g & h & -5 \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $A_{22} = 0$ (و یا هر عدد دیگر) پس: $gc = -5$.

مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & f \\ 5 & h & -5 \end{bmatrix}$$

ستون سوم A را مضربی از ستون اول فرض می‌کنیم تا $|A| = 0$

برقرار شود:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & h & -5 \end{bmatrix}$$

با توجه به $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ داریم $A_{33} = 2$ ، بنابراین

پس: $h = 11$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

بدیهی است که اگر A^T را محاسبه کنیم، خواهیم دید که

$$A^T = O$$

توجه داشته باشید که در هر دو نمونه‌ی فوق، صفر بودن $|A|$

مهم است و نه چگونگی صفر شدن $|A|$.

مسئله: نشان دهید اگر ماتریس $A_{4 \times 4}$ پوچ توان از مرتبه‌ی m

باشد، آن‌گاه: $m \leq 4$. با توجه به معادله‌ی سرشت‌نمایی

ماتریس‌های 4×4 ، یعنی $A^4 = B_1 A^3 - B_2 A^2 + B_3 A - |A|I$

ابتدا سه عدد را که مجموع آن‌ها صفر است، در قطر اصلی قرار

می‌دهیم؛ مانند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ d & -4 & f \\ g & h & 3 \end{bmatrix}$$

از $A_{33} = 0$ نتیجه می‌گیریم: $bd = -4$ ، فرض کنیم $b = 2$

و $d = -2$ باشد، پس:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & c \\ -2 & -4 & f \\ g & h & 3 \end{bmatrix}$$

از $A_{22} = 0$ نتیجه می‌گیریم: $gc = 3$ ، فرض کنیم $c = 3$ و

$g = 1$ باشد، پس:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & f \\ 1 & h & 3 \end{bmatrix}$$

فرض کنیم، سطر دوم A مضربی از سطر اول باشد تا $|A| = 0$

برقرار شود. پس:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & h & 3 \end{bmatrix}$$

از $A_{11} = 0$ نتیجه می‌گیریم: $-6h = -12$ ، بنابراین $h = 2$ و

داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

بدیهی است اگر A^T را محاسبه کنیم، خواهیم دید که

$$A^T = O$$

حال برای نمونه، ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را چنان تعیین

می‌کنیم تا پوچ توان از مرتبه‌ی ۳ باشد.

ابتدا چهار عدد دل‌خواه را به عنوان a و b و d و e انتخاب

اگر شرایط زیر برقرار باشند، گوئیم $A^T = O$.

می گیریم:

$$A^n = B_1 \cdot A^{n-1} - B_2 \cdot A^{n-2} + \dots + (-1)^n \cdot B_{n-1} \cdot A + (-1)^{n-1} \cdot B_n \cdot I$$

که در آن $B_1 = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ و $B_2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2$ و ... و $B_n = |A|$ و بدیهی است با فرض $B_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ماتریس A پوچ توان از مرتبه n خواهد بود. اکنون فرض کنیم A پوچ توان از مرتبه m باشد ($m > n$)، یعنی $A^m = O$ و $B_n = |A| = 0$ برای هر عدد طبیعی مانند k ، ($k < m$) داشته باشیم $A^k \neq O$. از ضرب طرفین معادله‌ی مشخصه در A^{m-2} داریم:

$$A^{m+n-2} = B_1 \cdot A^{m+n-3} - B_2 \cdot A^{m+n-4} + \dots + (-1)^n \cdot B_{n-2} \cdot A^{m+1} + (-1)^{n-1} \cdot B_{n-1} \cdot A^m + (-1)^n \cdot B_n \cdot A^{m-1} + (-1)^{n-1} \cdot B_n \cdot A^{m-2}$$

که با توجه به $B_n = |A| = 0$ داریم: $B_{n-1} = 0$. حال با در نظر گرفتن دو تساوی اخیر، اگر طرفین معادله‌ی مشخصه را در A^{m-2} ضرب کنیم، داریم $B_{n-2} = 0$ و در نهایت با ضرب طرفین معادله‌ی مشخصه در A^{m-n} داریم: $B_1 = 0$. و این شرایط، نشان دهنده‌ی پوچ توانی A از مرتبه‌ی n است. به همین دلیل، شرط $m > n$ باطل است و داریم: $m \leq n$.

نتایج

۱. اگر $|A_{2 \times 2}| = 0$ ، آن گاه A متناوب خواهد بود و داریم: $A^n = (a_{11} + a_{22})^{n-1} \cdot A$.
۲. اگر $|A_{2 \times 2}| = 0$ و $a_{11} + a_{22} = 0$ ، آن گاه $A^2 = O$.
۳. اگر $|A_{2 \times 2}| = 0$ و $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ ، آن گاه متناوب از مرتبه‌ی ۲ خواهد بود و داریم: $A^n = (a_{11} + a_{22} + a_{33})^{n-2} \cdot A^2$.
۴. اگر $|A_{2 \times 2}| = 0$ و $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ ، آن گاه $A^2 = O$.
۵. اگر $|A_{2 \times 2}| = 0$ و $A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$ ، آن گاه $A^2 = O$.
۶. اگر $A_{n \times n}$ پوچ توان از مرتبه‌ی m باشد، آن گاه: $m \leq n$.

$$B_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 0$$

$$|A| = 0, B_2 = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} = 0$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

فرض کنیم $A_{4 \times 4}$ پوچ توان از مرتبه‌ی m باشد ($m > 4$). بنابراین: $A^m = O$ و $|A| = 0$. با ضرب طرفین معادله‌ی مشخصه در A^{m-2} داریم:

$$O = A^m = B_1 A^{m-1} - B_2 A^{m-2} + B_3 A^{m-3} - \dots + A^{m-4} \Rightarrow B_1 A^{m-1} = B_2 A^{m-2} + B_3 A^{m-3}$$

توجه داشته باشید که اگر $B_1 = B_2 = B_3 = 0$ باشد، آن گاه پوچ توان از مرتبه‌ی ۴ و شرط $m > 4$ مردود است.

$$\Rightarrow B_1 A^m = B_2 A^{m-1} - B_3 A^{m-2} \Rightarrow B_2 A^{m-1} = B_3 A^{m-2}$$

چون A^{m-1} و A^{m-2} ماتریس‌های غیر صفر هستند، پس یکی از دو حالت زیر رخ می دهد:

الف) $B_2 \neq 0$ و $B_3 \neq 0$: از $B_2 A^{m-1} = B_3 A^{m-2}$ و $B_2 A^m = B_3 A^{m-1}$ نتیجه می گیریم $B_3 = 0$ و این خلاف فرض است.

ب) $B_2 = 0$ و $B_3 = 0$: از $O = A^m = B_1 A^{m-1} - \dots + A^{m-4}$ داریم $B_1 = 0$. در نتیجه $A^4 = O$ و شرط $m > 4$ باطل است.

پس اگر $A_{4 \times 4}$ ماتریس پوچ توان از مرتبه‌ی m باشد، داریم: $m \leq 4$.

مسئله: نشان دهید اگر ماتریس غیر صفر $A_{n \times n}$ پوچ توان از مرتبه‌ی m باشد، آن گاه: $m \leq n$.

حل: معادله‌ی مشخصه‌ی $A_{n \times n}$ را به صورت ذیل در نظر