

مربعهای فوق جادویی

● ترجمه: مهناز پاک خصال

مرجع:

نشریه SCIENTIFIC AMERICAN, Jan 1997

۱۶	۳	۲	۱۳
۵	۱۰	۱۱	۸
۹	۶	۷	۱۲
۴	۱۵	۱۴	۱

ممکن است به نظر برسد که تاکنون تمام مسائل مربوط به ساخت یک چنین مربعهایی بیان شده است و دیگر مسأله جدیدی وجود ندارد؛ ولی در جواب باید گفت که همین ده سال پیش، آقای «لی سالوز» (Lee Sallows) دیدگاه کاملاً جدیدی را دربارهٔ مربعهای جادویی کشف کرد. او متخصص بازی با حروف و متبخر در تلفیق کلمات با ریاضیات تفریحی است.

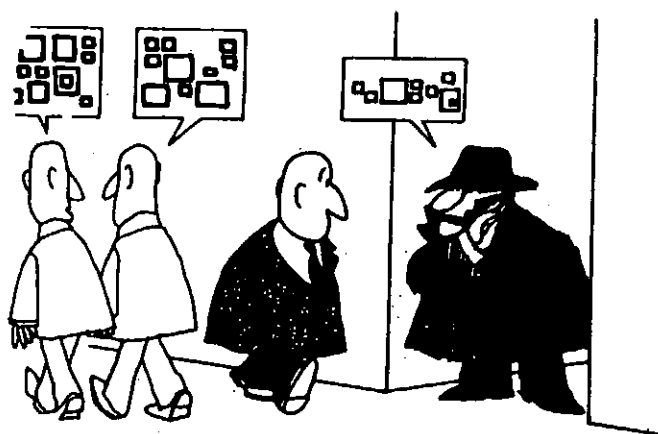
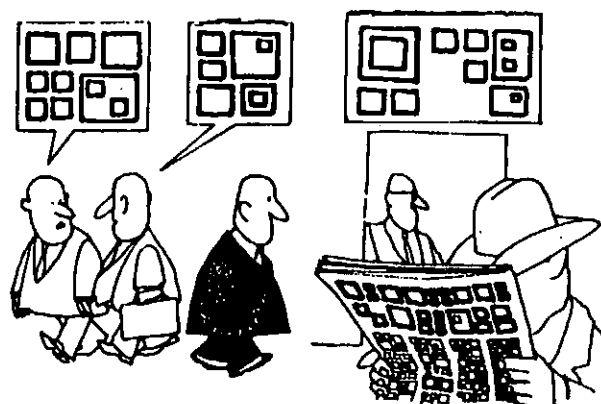
آقای سالوز در کتاب «مسیر نورانی تر ریاضیات (چاپ انجمن ریاضی آمریکا ۱۹۹۴)» دو مقاله نوشته است که از آنها در این جا استفاده می شود. دیدگاه جدید او کمی پیچیده است؛ برای مثال به جدول زیر توجه کنید:

۵	۲۲	۱۸
۲۸	۱۵	۲
۱۲	۸	۲۵

↔

five	twenty two	eighteen
twentyeight	fifteen	two
twelve	eight	twenty five

شکل ۱



در اصطلاح، به مربعهایی که مجموع سطرهای آن با مجموع ستونها یا قطرهای برابر باشد، مربعهای جادویی گفته می شود و در طی سالیان سال، به عنوان یکی از تفریحات ریاضی محسوب می شده است. طبق افسانه های چینی، ساده ترین مربعها به صورت زیر بوده است که امپراتور یو (Yü) در پشت یک لاک پشت در قرن ۲۳ پیش از میلاد حک کرده است:

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

در این مربع جادویی، مجموع اعداد، ۱۵ بوده و مربع از مرتبه سوم می باشد. مربعهای با مرتبه بالاتر نیز وجود دارد و حتی مکعب، هشت ضلعی، ده ضلعی و دایره های جادویی نیز وجود دارد.

مجموع سطرها و ستونهای یک چنین مربعی، برابر $3a$ خواهد بود. این فرمول، برای تمامی مقادیر a ، b و c و هر نوع مربع از مرتبه ۳ برقرار می باشد. با دقت در قطرهای مربع فوق، می توان دریافت که سه عدد، یک تصاعد حسابی تشکیل می دهند؛ یعنی اعداد با اختلاف یکسان، در پشت سرهم قرار گرفته اند. بنابراین، یک استراتژی خوب برای یافتن مربعهای فوق جادویی، جست و جوی اعدادی است که به صورت سه تایی مرتب بوده و یک سری حسابی را تشکیل می دهند.

البته باید این سه تایی ها را به نحوی قرار داد که مربع حاصله نیز دارای منطق مورد نظر باشد. به عنوان مثال، می توان عدد ۱۵ را در مرکز مربع قرار داد (چون از قبل می دانیم که حداقل یکی از این مربعها وجود دارد). با توجه به جدول لوگوریتم مربوطه، پنج دسته عدد سه تایی مناسب می توان یافت: $(2, 15, 28)$ و $(5, 15, 25)$ و $(8, 15, 22)$ و $(11, 15, 19)$ و $(12, 15, 18)$ که مجموع حروف انگلیسی آنها سه برابر مجموع حروف fifteen است. حال می توان دو دسته را انتخاب کرده و به صورت قطری آنها را قرار داد. مثلاً برای دو دسته اول خواهیم داشت:

۲	۲۵
	۱۵
۵	۲۸

با توجه به فرمول لوکاس، می دانیم که مجموع سطرها یا ستونها باید سه برابر ۱۵ باشد و بنابراین، جدول فوق به صورت زیر در می آید:

۲	۱۸	۲۵
۳۸	۱۵	-۸
۵	۱۲	۲۸

مربع فوق به دو دلیل قابل قبول نیست، اول آن که عدد منفی قابل قبول نیست و دیگر این که حتی اگر -۸ پذیرفته شود، باید آن را به صورت minus eight نوشت، که تعداد حروف (لوگوریتم) آن برابر ۱۰ است و اگر مشتق لوگوریتمی را ترتیب دهیم، خواهیم دید که جدول حاصله، جادویی نیست:

۳	۸	۱۰
۱۱	۷	۱۰
۴	۶	۱۱

اگر اعداد فوق به صورت رقم نوشته شود، مربع فوق، به یک مربع جادویی معمولی بدل می گردد، که مجموع آن ۴۵ است؛ ولی جالبتر آن است که اگر تعداد حروف (در زبان انگلیسی) اعداد فوق شمارش و نوشته شود نیز یک مربع جادویی حاصل می گردد که به صورت زیر است و مجموع اعداد آن، ۲۱ خواهد شد. اصطلاحاً به یک چنین مربعهایی، مربعهای فوق جادویی گفته می شود.

۴	۹	۸
۱۱	۷	۳
۶	۵	۱۰

آقای سالوز یک تئوری کلی برای این گونه مربعها ارائه کرده است. او تئوری خود را با تعریف «لوگوریتم x » ($\logarithm x$) یعنی تعداد حروف یک عدد (که با حروف نوشته شده باشد) آغاز می کند. البته با کمی دقت، می توان دریافت که در زبانهای مختلف، هر عدد دارای لوگوریتم خاصی است؛ ولی در این مقاله، تأکید بر زبان انگلیسی است (می توان در زبان فارسی نیز لوگوریتم های اعداد را یافت). باید دقت داشت که این مفهوم، با لگاریتم اشتباه نشود.

سؤال بعدی نیز آن است که آیا می توان یک چنین مربع های دیگری نیز یافت؟ جواب مثبت است؛ مثلاً اگر جلوی هر یک از ارقام شکل ۱، عبارت one million قرار داده شود، مجموع سطرها یا ستونها، سه میلیون افزایش می یابد. هنگامی که هر عدد با لوگوریتم خود جایگزین می شود، مربع حاصل را مشتق لوگوریتم گویند. مجموع سطرها و ستونهای این مربع نیز به اندازه سه برابر تعداد حروف موجود در عبارت one million افزایش خواهد یافت ($3 \times 10 = 30$). با توجه به این موضوع، می توان دریافت که در مربعهای 3×3 می توان بی نهایت از این سری مربعهای فوق جادویی یافت. آقای سالوز این مربعها را به عنوان «همسازهای» مربع اصلی معرفی می کند.

آیا تغییرات جالبتر دیگری نیز وجود دارد؟ در قرن نوزدهم، «ادوارد لوکاس» ریاضیدان فرانسوی، یک فرمول جالب برای مربع های 3×3 یافت که به صورت زیر است:

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b-c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

به هر یک از این مربعها، «مربع لاتینی» گویند؛ یعنی هر سه عدد، در سطرها و ستونهای مختلف وجود دارند و خود این موضوع نیز اندکی شگفت‌انگیز است. به علاوه، قطرها نیز شگفت‌آورند. از آن جایی که تعداد حروف هر یک از اعداد جدول ابتدایی، ۱۴ است، شگفتی نیز بیشتر می‌شود.

مربعهای بزرگتر چه وضعیتی دارند؟ برای این کار، می‌توان براحتی از مربعهای لاتینی متعامد، به خوبی استفاده کرد. برای مثال، در زبان انگلیسی، مربع چهارتایی زیر، فوق جادویی است:

۳۱	۲۳	۸	۱۵
۱۷	۵	۲۱	۳۴
۳۶	۳۸	۱۳	۰
۳	۱۱	۳۵	۲۸

آقای سالوز، از گروهی از این مربعها به عنوان «شبه طلا» یاد می‌کند؛ چون دستیابی به آنها آسان است و معتقد است که برای طلای واقعی، باید زحمت بیشتری کشید که نمونه آن نیز در ادامه ذکر شده است:

۳۶	۳۷	۴۸	۵۹
۴۹	۵۸	۲۷	۳۶
۵۷	۴۶	۳۹	۲۸
۳۸	۲۹	۵۶	۴۷

جواب سؤال داخل متن:

۸	۱۹	۱۸
۲۵	۱۵	۵
۱۲	۱۱	۲۲



حال می‌توان دسته‌های دیگر را نیز امتحان کرد تا جواب صحیح به دست آید (جواب در انتهای مقاله ذکر شده است).

آیا مربعهای دیگری وجود دارد که عدد وسط آن غیر از ۱۵ باشد. آقای سالوز برای یافتن مربعهای جادویی 3×3 یک برنامه کامپیوتری نوشته است و مربعهای زیادی نیز یافته است. یک نمونه دیگر از آنها نیز در زیر ذکر شده است:

۱۵	۷۲	۴۸
۷۸	۴۵	۱۲
۴۲	۱۸	۷۵

این بازی را برای زبانهای دیگری غیر از انگلیسی نیز می‌توان انجام داد. آقای سالوز برای اعداد تا ۱۰۰، مربعهای فوق جادویی را برای ۱۹ زبان یافته است.

در زبان فرانسه، برای اعداد تا ۲۰۰، فقط یک مربع فوق جادویی وجود دارد، ولی اگر اعداد تا ۳۰۰ افزایش یابند، می‌توان ۲۲۵ مربع دیگر نیز یافت، که یکی از آنها در زیر نشان داده شده است:

۱۵	۲۰۶	۱۱۵
۲۱۲	۱۱۲	۱۲
۱۰۹	۱۸	۲۰۹

در زبان آلمانی، با استفاده از اعداد کمتر از ۱۰۰، حدود ۲۲۱ مربع فوق جادویی وجود دارد که یکی از آنها در زیر نشان داده شده است. البته باید تعداد حروف «zig» و «und» را نیز در نظر گرفت.

۴۵	۶۲	۵۸
۶۸	۵۵	۴۲
۵۲	۴۸	۶۵

حال اگر رقم دهگان اعداد جدول فوق را در یک جدول، و رقم یکان را در جدول دیگری بنویسیم، خواهیم داشت:

۴	۶	۵
۶	۵	۴
۵	۴	۶

۵	۲	۸
۸	۵	۲
۲	۸	۵