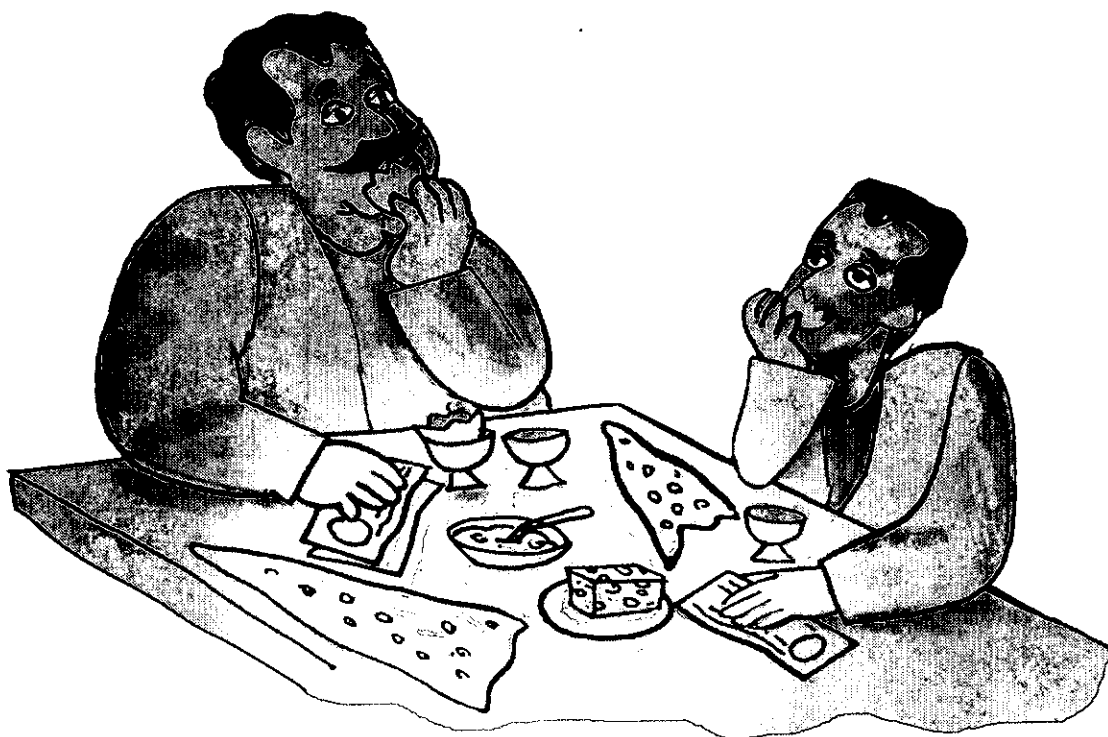




مدل سازی مقدماتی ریاضی

تابع و مدل های ریاضی

ترجمه: میرشهرام صدر

برای دانش آموزان سال های دوم و سوم

شماره ۲۸

دانش آموزان دوره متوسطه

و پنیر است و قیمت صبحانه براساس تعداد تخم مرغ هایی که مشتری سفارش می دهد، محاسبه می شود. در زیر جدول قیمت گذاری صبحانه در این رستوران آمده است:

تعداد تخم مرغ ها	قیمت صبحانه
۱	۱۲۴۰۰ ریال
۲	۱۶۰۰۰ ریال
۳	۱۸۸۰۰ ریال
۴	۲۱۲۰۰ ریال

جدول (۱)

ورود به مطلب

نمره درس تاریخ شما، تابعی از مدت زمانی است که مطالعه کرده اید. یا درآمد شما می تواند تابعی از سطح تحصیلاتتان باشد. در هر یک از حالت های ذکر شده، متوجه می شویم که یک وابستگی بین کمیت اولی و دومی وجود دارد. در این مقاله، ابتدا با مفهوم ریاضی یک تابع آشنا می شویم. سپس تابع را به عنوان یک مدل ریاضی بین متغیرهای زندگی روزمره (دنیای واقعی) بررسی خواهیم کرد.

تابع ها و مدل های ریاضی

در یک رستوران، صبحانه شامل تخم مرغ، نان، مربا

بیش تر کاربردهای ریاضی مستلزم استفاده از عددها و متغیرهاست. به طوری که آن‌ها کمیت‌های دنیای واقعی را بیان می‌کنند. با توجه به جدول بالا، فرض کنید n ، تعداد تخم مرغ‌های سفارش داده شده و p قیمت صبحانه باشد. در این صورت، جدول (۱) رابطه‌ای را بین n و p بیان می‌کند. این رابطه، نمونه‌ای از توابع ریاضی است. زیرا برای هر n (تعداد تخم مرغ‌های سفارش داده شده) یک قیمت متناظر p وجود دارد که برای صرف صبحانه پرداخت می‌شود. در این جا، مفهوم کلیدی این است که هر تعداد تخم مرغ مشخص، فقط یک قیمت دارد. در حقیقت، فهرست (منوی) غذایی، قاعده‌ای برای مشخص کردن قیمت صبحانه در اختیار ما قرار می‌دهد. اگر شما تعداد تخم مرغ‌های صبحانه خود را بدانید، در این صورت قیمت صبحانه خود را می‌دانید. اگر شما و دوستان هر کدام یک تخم مرغ سفارش دهید، در این صورت هر دوی شما توقع دارید که مبلغ یکسانی را پرداخت کنید. به راستی اگر به یکی از شما بگویند، برای صرف صبحانه بیش از ۱۲۴۰۰ ریال پرداخت کنید، به طور قطع اعتراض خواهید کرد.

تعریف تابع

تابع f ، قاعده‌ای است که روی مجموعه D تعریف می‌شود؛ به طوری که به هر عدد $x \in D$ ، یک عدد مشخص $f(x)$ را نسبت می‌دهد.

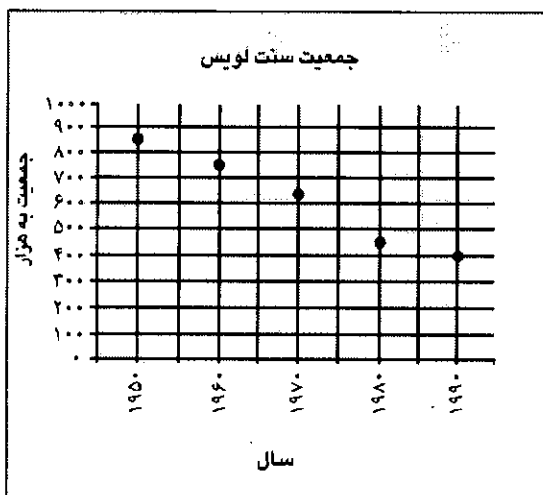
عدد $f(x)$ که خوانده می‌شود: «اف x » - مقدار تابع f به ازای عدد x نامیده می‌شود. کلمه «قاعده» که در تعریف تابع به آن اشاره شد، می‌تواند با یک جدول، یک فرمول یا نمودار یا حتی با یک جمله مشخص شود. به طوری که با استفاده از آن، مقدار $f(x)$ به ازای عدد x داده شده مشخص می‌شود. معمولاً از x برای نشان دادن متغیر و از f برای نشان دادن تابع استفاده می‌کنیم. همچنین می‌توانیم، از حرف دیگری که دوست داریم یا در یک وضعیت خاص مناسب تر است، استفاده کنیم.

مثال ۱. در تابع رستوران که ذکر کردیم، مجموعه D از همه مقادیر ممکن برای تعداد تخم مرغ‌ها تشکیل شده

است؛ مجموعه اعداد: $\{1, 2, 3, 4\}$. در این جا آن‌ها را با n (ترجیحاً با x) مشخص می‌کنیم. با معلوم بودن عدد n در ستون اول جدول، به راحتی قیمت متناظر $p(n)$ را از ستون دوم جدول پیدا می‌کنیم. برای مثال: $p(3) = 18800$ ؛ زیرا ۱۸۸۰۰ ریال قیمت صبحانه با ۳ تخم مرغ است.

مثال ۲. شکل ۱ جمعیت شهر سنت لویس را در سرشماری‌های بین سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۹۰ نشان می‌دهد. این نمودار (به طور تقریبی) تابع p را توصیف می‌کند که برای هر یک از سال‌های ۱۹۵۰، ۱۹۶۰، ۱۹۷۰، ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ تعریف شده است. زیرا برای هر یک از این سال‌ها، فقط یک جمعیت وجود دارد که با یک نقطه در نمودار مشخص شده است. برای مثال، واضح است که در سال ۱۹۹۰ جمعیت سنت لویس تقریباً ۴۰۰ هزار نفر بود. بنابراین داریم:

$$P(1990) = 400 \text{ (هزار نفر)}$$



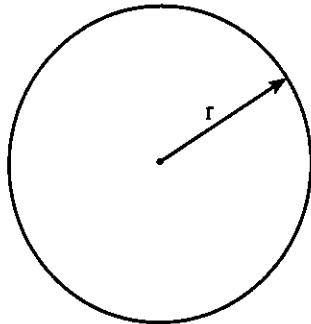
شکل ۱

مثال ۳. اگر در هر سال، سپرده حساب پس انداز شما ۴٪ سود داشته باشد، منفعت I (سود سالیانه) از روی مبلغ A که در حساب پس انداز شما موجود است، به کمک فرمول $I = 0.04A$ محاسبه می‌شود. این فرمول مشخص

می‌کند که I تابعی از A است. بنابراین اگر مبلغ حساب شما ۵۰۰۰۰ ریال باشد، در این صورت افزایش حساب شما پس از یک سال $2000 = (50000)(0.04)$ ریال خواهد بود.

مثال‌های ۱ تا ۳ نشان می‌دهند که توابع، رابطه‌هایی را بین متغیرهای زندگی روزمره (زندگی واقعی) نشان می‌دهند. ریاضیات، راه‌حلی برای تجزیه و تحلیل وضعیت‌های گوناگون زندگی روزمره در اختیار ما قرار می‌دهد که اغلب به شناسایی رابطه‌های بین متغیرهایی منجر می‌شود که وضعیت‌ها را توصیف می‌کنند. در زیر مثال‌هایی از توابعی آمده‌اند که با یک فرمول مشخص می‌شوند و ممکن است آن‌ها را در درس ریاضی یا فیزیک از قبل مطالعه کرده باشید.

مثال ۴. مساحت (A) دایره‌ای به شعاع r (شکل ۲) از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$A = \pi r^2$$

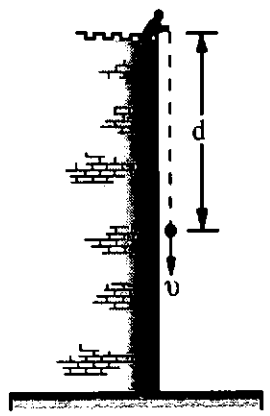
$$(\pi \approx 3.1416)$$

شکل ۲

به طور معمول این فرمول را با نماد تابعی به صورت $A(r) = \pi r^2$ می‌نویسیم تا مشخص شود، مساحت یعنی A ، وابسته به شعاع یعنی r است. r را متغیر مستقل و A را متغیر وابسته می‌گوییم.

مثال ۵. اگر یک سنگ‌ریزه از بالای یک برج (شکل ۳) به طرف پائین رها شود و شتاب جاذبه زمین 32 ft/Sec^2 باشد، در این صورت سرعت (به طرف پائین) V بعد از t ثانیه و فاصله پیموده شده d از موقع رها

شدن پس از t ثانیه، از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:



$$V(t) = 32t$$

$$d(t) = 16t^2$$

شکل ۳

همان طور که ملاحظه می‌کنید، V و d هر دو تابع‌هایی از t هستند. بنابراین در این دو تابع، t متغیر مستقل و V و d هر دو متغیرهای وابسته به t هستند.

مثال ۶. اگر دمای یک نمونه ۳ گرمی دی‌اکسید کربن 27° باشد، در این صورت، حجم آن (V) بر حسب لیتر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$V(p) = \frac{168}{p}$$

که در آن p فشار گاز بر حسب اتمسفر است. در این تابع، p متغیر مستقل و V متغیر وابسته است.

دامنه و برد تابع

وقتی تابع با یک رابطه بین متغیرها تعریف می‌شود، این مطلب خیلی مهم است که بدانیم، چه عددی می‌تواند جایگزین متغیرها شوند.

تعریف دامنه

مجموعه همه عددهایی را که به ازای آن‌ها $f(x)$ تعریف می‌شود، دامنه تعریف تابع f می‌نامیم و آن را با نماد D مشخص می‌کنیم.

مثال ۷. دامنه تابع حجم $V(p)$ در مثال ۶، مجموعه همه عددهای حقیقی مثبت است. زیرا فشار گاز می‌تواند هر عدد مثبتی بر حسب اتمسفر باشد و این بی‌معنی است که

بگوییم، فشار عددی منفی یا حتی صفر است. (طبیعت با خلأ سنجیتی ندارد).

مثال ۸. دامنه تابع معکوس $f(x) = \frac{1}{x}$ ، مجموعه همه عددهای حقیقی غیر صفر است؛ یعنی مجموعه همه عددها به غیر از صفر. چون با جایگزینی هر عدد غیر صفر به جای x ، یک مقدار عددی برای $f(x)$ به دست می آید.

تعریف برد

مجموعه همه مقادیر ممکن برای $y = f(x)$ ، برد تابع f نامیده می شود که آن را با نماد R مشخص می کنیم.

مثال ۹. فرض کنید هزینه کل چاپ (c) برای تولید n نسخه کتاب دیوان حافظ، ۴/۰۰۰/۰۰۰ ریال برای کار با ماشین چاپ به اضافه ۱۵/۰۰۰ ریال برای چاپ هر کتاب باشد. در این صورت، c تابعی از n است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$C = 4000000 + 15000n$$

دامنه تابع هزینه C ، مجموعه $\{1, 2, 3, \dots\}$ از همه عددهای صحیح مثبت است. زیرا این بی معنی است که بگوییم، تعداد کتاب های چاپ شده عددی منفی یا عددی گویا است.

آیا برد تابع C تمام عددهای مشخص شده در لیست زیر است؟

$$R = \{4015000, 4030000, 4045000, 4060000, \dots\}$$

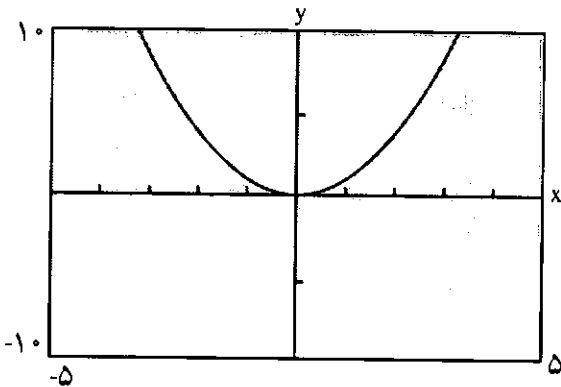
مثال ۱۰. برد تابع معکوس $f(x) = \frac{1}{x}$ (مانند دامنه اش) مجموعه همه عددهای حقیقی غیر صفر است. زیرا عبارت $\frac{1}{x}$ می تواند هر مقدار غیر از صفر را به خود بگیرد.

مثال ۱۱. تابع مجذور (مربع) با ضابطه $f(x) = x^2$

مشخص می شود.

این تابع به هر عدد x ، مربع آن یعنی x^2 را نسبت می دهد. زیرا هر عدد می تواند، مربع (مجذور) داشته باشد. دامنه تابع f مجموعه عددهای حقیقی $\mathbb{R}$ است؛ اما هر عدد غیر منفی، مربع (مجذور) یک عدد حقیقی است. بنابراین، برد تابع f مجموعه همه عددهای غیر منفی است. یعنی:

شکل ۴. نمودار تابع $y = x^2$ را به وسیله ماشین حساب نشان می دهد. همان طور که ملاحظه می کنید، ماشین حساب فقط قسمتی از نمودار تابع را نشان می دهد که در نمایش پنجره ای استاندارد قرار دارد (روی محور x ها بین ۵ و ۵- و روی محور y ها بین ۱۰ و ۱۰- است). نمودار نشان می دهد که برد تابع f عددهای غیر منفی هستند.



شکل ۴. نمودار تابع $f(x) = x^2$ با ماشین حساب

مثال های ۹ تا ۱۱ روند پیدا کردن برد یک تابع را توضیح می دهند. با وجود این، اغلب، دامنه تابع بیش تر از برد تابع مورد نظر است. زیرا برای ما بسیار مهم است که بدانیم چه عددی را می توانیم جایگزین متغیر x کنیم تا به طور محسوس (شهودی) مقدار $f(x)$ را به دست آوریم.

تمرین

در تمرین های ۱ تا ۶، ضابطه های توابعی داده شده اند. متغیر وابسته و متغیر مستقل را در هر کدام از آن ها مشخص کنید:

۱. $y = x^2 - 8$

در تمرین های ۱۶ تا ۱۹، مقادیری از a را به دست آورید که در رابطه $g(a) = 13$ صدق می کنند.

۱۶. $g(x) = 3x + 4$

۱۷. $g(x) = \frac{12}{1-x}$

۱۸. $g(x) = \sqrt{5x+4}$

۱۹. $g(x) = x^2 - 36$

در تمرین های ۲۰ تا ۲۷، دامنه توابع را بیابید (به یاد داشته باشید که زیر رادیکال با فرجه زوج نمی تواند عدد منفی قرار بگیرد و مخرج هر کسر، مخالف با صفر است).

۲۰. $f(x) = 2x - 7$

۲۱. $f(x) = x^2 - 7$

۲۲. $h(x) = \sqrt{x-3}$

۲۳. $h(x) = \sqrt{x+2}$

۲۴. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

۲۵. $g(t) = \frac{1}{t^2+1}$

۲۶. $g(t) = \frac{1}{t^2-4}$

۲۷. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}}$

در تمرین های ۲۸ تا ۳۳ برد توابع داده شده را بیابید.

۲۸. تابع قیمت کل (C) برای چاپ n نسخه از کتاب به صورت $C(n) = 2500000 + 195n$ است.

۲۹. مساحت دایره با شعاع r به صورت $A(r) = \pi r^2$ است.

۳۰. $f(x) = 10 - x$

۳۱. $f(x) = 3x - 1$

۳۲. $f(x) = 8 + x^2$

۳۳. $f(x) = \sqrt{x} - 6$

۲. $x = (t+1)^2$

۳. $V = 8\sqrt{h}$

۴. $T = 4u - v$

۵. $C = 2\pi r$

۶. $V = S^2$

در تمرین های ۷ تا ۱۱، y تابعی از x تعریف شده است. این توابع را با ضابطه (فرمول) یا جدول مشخص کنید.

۷. بالاترین درجه حرارت (y) را در تهران برای هر ماه (x) از سال یادداشت کنید.

۸. قیمت درخت کریسمس (y) براساس طول قد (x) است. اگر:

الف) یک درخت ۶ فوتی باشد، قیمت آن بین ۲۰/۰۰۰ ریال و ۵۰/۰۰۰ ریال است.

ب) یک درخت ۸ فوتی باشد، قیمت آن بین ۲۵/۰۰۰ ریال و ۷۵/۰۰۰ ریال است.

ج) یک درخت ۱۱ فوتی باشد، قیمت آن بین ۱۰۰/۰۰۰ ریال و ۲۰۰/۰۰۰ ریال است.

د) یک درخت ۱۳ فوتی باشد، قیمت آن ۳۰۰/۰۰۰ ریال یا بیش تر است.

۹. $y = x^2$

۱۰. $x = y^2$

۱۱. $4x - 3y = 8$

در تمرین های ۱۲ تا ۱۵، مقدار ساده شده $f(-1)$ ، $f(a^2)$ ، $f(\sqrt{2})$ ، $f(0/5)$ و $f(2-a)$ را در هریک از تابع های زیر به دست آورید.

۱۲. $f(x) = 2x + 3$

۱۳. $f(x) = x^2 + 1$

۱۴. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

۱۵. $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

منبع