

سرآغاز

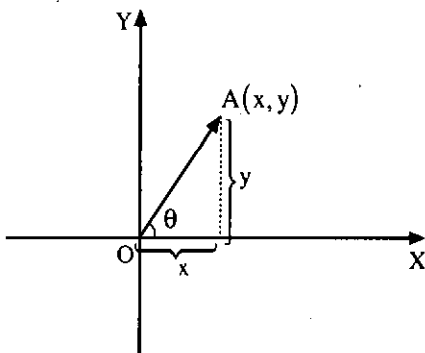
در این مقاله، علاوه بر معرفی مختصاتی جدید با عنوان «مختصات زاویه‌ای برای نقاط دکارتی» که به صورت زوج مرتب نمایش داده می‌شوند، در ابتدا برای هر زوج مرتب، برحسب طول بردار تولید شده و زاویه‌ای که با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، مختصات زاویه‌ای معرفی شده است. سپس ارتباط بین مختصات قطبی و دکارتی آمده است. در ادامه، از ویژگی‌های اساسی مختصات قطبی، به خصوص داشتن نمایش‌های متفاوت برای یک نقطه، سخن به میان آمده است.

مختصات قطبی و رسم نمودارها

$$x = |\vec{OA}| \cos \theta$$

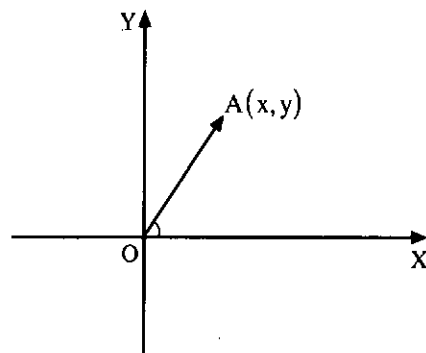
بگیریم، می‌توان نوشت:

$$y = |\vec{OA}| \sin \theta$$



مختصات زاویه‌ای یا قطبی

هر نقطه در فضای دکارتی را با دو مؤلفه‌ی x به عنوان طول و y به عنوان عرض معرفی می‌کنیم. هر زوج مرتب (x, y) در دستگاه مختصات دکارتی، برداری با ابتدای O (مبدأ دستگاه دکارتی) تولید می‌کند.



که در آن $|\vec{OA}|$ اندازه‌ی بردار $\vec{OA}$ است. با فرض

$$r = |\vec{OA}| \quad \text{داریم:} \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{به راحتی می‌توان نشان داد}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arc tan } \frac{y}{x} \end{cases} \quad \text{که بنابراین می‌توان به زوج مرتب } (x, y) \text{ زوج}$$

بردار $\vec{OA} \rightarrow$ زوج مرتب (x, y)

اگر زاویه‌ای را که بردار $\vec{OA}$ با جهت مثبت محور طول‌ها و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌سازد θ در نظر

مثال ۲. فرم دکارتی $(\sqrt{2}, \frac{4\pi}{3})$ را محاسبه کنید.

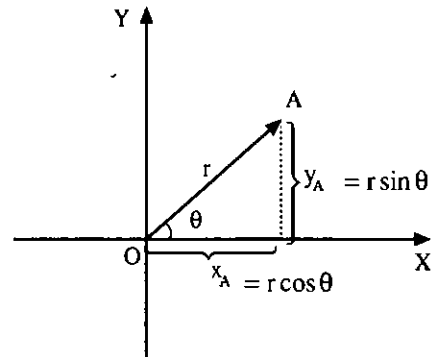
حل:

$$x = \sqrt{2} \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}}{2})$$

$$y = \sqrt{2} \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{6}}{2}$$

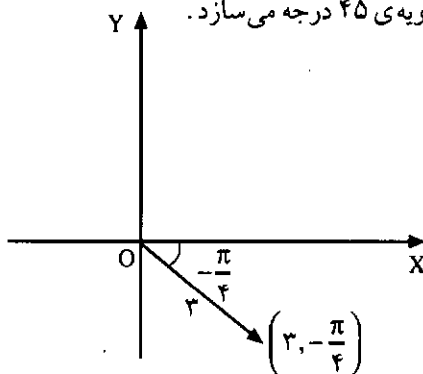
همان طور که قبلاً ذکر شد، θ زاویه‌ای است که در جهت مثبت محور طول‌ها و خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود. θ می‌تواند منفی هم باشد. علامت منفی θ نشان دهنده‌ی آن است که زاویه‌ی در نظر گرفته شده، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت تولید شده است. برای مثال،

مرتب جدید (r, θ) را نسبت داد که در آن r طول برداری است که زوج مرتب با ابتدای مبدأ مختصات ایجاد کرده و θ زاویه‌ای است که این بردار با جهت مثبت محور طول‌ها و خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌سازد.



هر مختصات دکارتی یک مختصات قطبی دارد و برعکس، مختصات قطبی هر نقطه نیز یک مختصات دکارتی دارد

نقطه‌ی قطبی $(3, -\frac{\pi}{4})$ نشان می‌دهد که نقطه‌ای در ربع چهارم دستگاه دکارتی، برداری به طول ۳ تولید می‌کند که با محور طول‌ها زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد.



$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (x, y) \longrightarrow (r, \theta) \\ \theta = \text{Arc tan } \frac{y}{x} \\ x = r \cos \theta \\ (r, \theta) \longrightarrow (x, y) \\ y = r \sin \theta \end{array} \right.$$

تعریف: برای هر زوج مرتب (x, y) در دستگاه دکارتی با

فرض $\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arc tan } \frac{y}{x} \end{array} \right.$ زوج مرتب (r, θ) را «مختصات

زاویه‌ای» یا قطبی زوج مرتب (x, y) می‌نامیم.

از آن‌چه بیان شد نتیجه می‌گیریم، هر مختصات دکارتی یک مختصات قطبی دارد و برعکس، مختصات قطبی هر نقطه نیز یک مختصات دکارتی دارد.

مثال ۱. فرم قطبی زوج مرتب $(3, -3)$ را بنویسید.

حل:

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\theta = \text{Arc tan } \frac{-3}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow (3\sqrt{2}, 2\pi - \frac{\pi}{4})$$

بنابراین، فرم قطبی $(3, -3)$ با $(3\sqrt{2}, 2\pi - \frac{\pi}{4})$ برابر

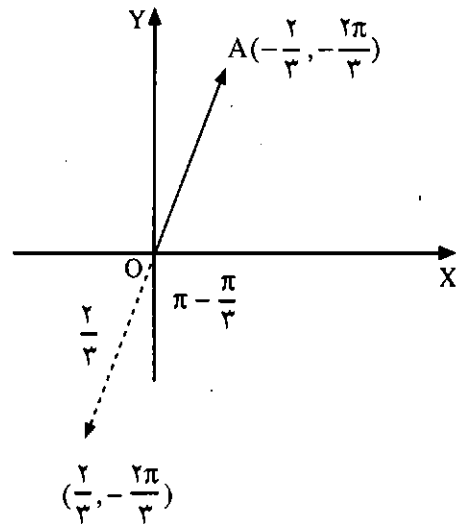
است.

از آن‌جا که $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ مشخص کننده‌ی طول بردار است، همواره مقداری مثبت است. اما می‌تواند علامت منفی نیز داشته باشد. $-r$ نشان دهنده‌ی برداری است با طول r ولی خلاف جهت بردار اصلی. در حقیقت، نقطه‌ی $(-r, \theta)$ را به این صورت ترسیم می‌کنیم. ابتدا نقطه‌ی (r, θ) را مشخص و سپس برداری هم اندازه و قرینه‌ی بردار (r, θ) رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی $(-r, \theta)$ ایجاد شود. برای مثال، نقطه‌ی $(-2, \frac{\pi}{5})$ را در نظر بگیرید. ابتدا $(2, \frac{\pi}{5})$ را در دستگاه رسم می‌کنیم و سپس قرینه‌ی بردار تولید شده را رسم می‌کنیم.

مثال ۳. الف) نقطه ی $(-\frac{2}{3}, -\frac{2\pi}{3})$ را دستگاه دکارتی نشان

دهید.

حل:



ب) فرم دکارتی نقطه را بنویسید.

حل:

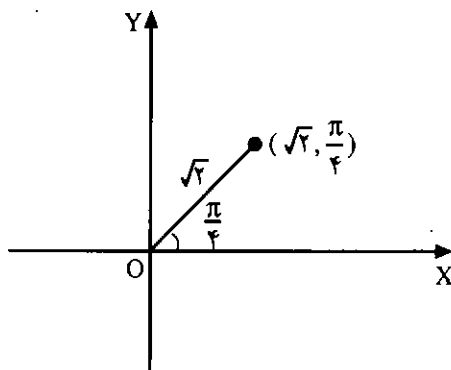
$$x = r \cos \theta = (-\frac{2}{3}) \cos(-(\pi - \frac{\pi}{3})) = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$y = r \sin \theta = (-\frac{2}{3}) \sin(-(\pi - \frac{\pi}{3})) = \frac{2}{4}$$

صورت‌های مختلف فرم قطبی یک نقطه

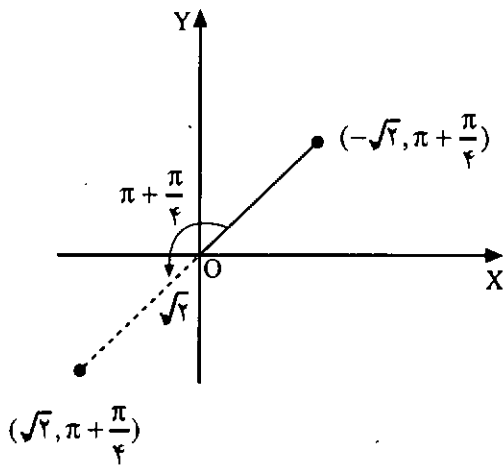
نقاط در دستگاه مختصات دکارتی نمایش منحصر به فرد (x, y) را دارند. مؤلفه ی اول مقدار طول و مؤلفه ی دوم مقدار عرض نقاط را مشخص می‌کند. با تغییر مقدار یا علامت x, y نقطه ی جدیدی تولید می‌شود که با نقطه ی اولیه تفاوت دارد. اما به دلیل آن‌که r, θ می‌توانند علامت منفی داشته باشند و این علامت منفی جایگاه نقاط را تغییر می‌دهد، برای فرم قطبی نقاط، نمایش منحصر به فرد نداریم. برای مثال، نقطه ی

$(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ را در نظر بگیرید:



حال نقطه ی $(-\sqrt{2}, \pi + \frac{\pi}{4})$ را در دستگاه دکارتی رسم

کنید.



به روشنی آشکار است، نقطه ی $(-\sqrt{2}, \pi + \frac{\pi}{4})$ همان

جایگاه $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ را در دستگاه دارد. اما هر کدام به صورتی

کاملاً متفاوت نمایش داده می‌شود. اگر نقاط $(\sqrt{2}, 2\pi + \frac{\pi}{4})$ ،

$(-\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$ و $(\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{4})$ را نیز ترسیم کنید، همگی

جایگاه $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ را خواهند داشت.

یک نقطه و پنج حالت متفاوت نمایش، ویژگی جالب فرم

قطبی یک نقطه است. شما می‌توانید باز هم برای $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ فرم

قطبی با r, θ های دیگری ارائه دهید. به طور کلی، برای نقطه ی

$p(r, \theta)$ نمایش های کلی $p(r, 2k\pi + \theta)$ ، $p(r, -2k\pi - \theta)$ ،

$p(-r, (2k+1)\pi + \theta)$ و $p(-r, -(2k+1)\pi + \theta)$ وجود دارد.

مثال ۴. نمودار قطبی $r^2 \cos 2\theta = 1$ را رسم کنید.

حل: چون طرف اول عبارت مثبت است، باید $\cos 2\theta \geq 0$.

بنابراین $2\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و لذا $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. هم چنین

$r^2 = \frac{1}{\cos 2\theta}$ و این کسر برای تعریف شدن باید مخرجی مخالف

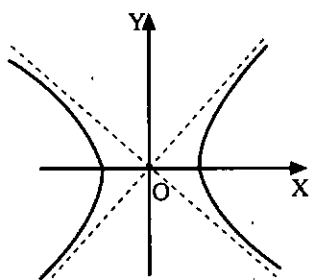
صفر داشته باشد. در یک دوره ی تناوب، ریشه های مخرج

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ هستند. از توضیحات بالا نتیجه می‌شود

که $\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

● آیا همیشه استفاده از مختصات قطبی ترسیم را آسان می‌کند؟

باید دقت کرد، هر چند استفاده از مختصات قطبی یک نمودار برای ترسیم روابط ضمنی مزایای زیادی دارد، اما در برخی موارد استفاده از فرم دکارتی برای ترسیم، مراحل کار را کمتر و ترسیم را راحت‌تر خواهد کرد. برای نمونه، می‌توان به مثال بالا اشاره کرد. با تبدیل فرم قطبی نمودار بالا به فرم دکارتی درمی‌یابیم که فرم قطبی بالا هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ با دو مجانب $y = \pm x$ است که ترسیم آن با استفاده از مباحث هندسه‌ی تحلیلی بسیار آسان‌تر است.



باید دقت کرد، هر چند استفاده از مختصات قطبی یک نمودار برای ترسیم روابط ضمنی مزایای زیادی دارد، اما در برخی موارد استفاده از فرم دکارتی برای ترسیم، مراحل کار را کمتر و ترسیم را راحت‌تر خواهد کرد

تقارن نسبت به محور طول‌ها:

$$(r, \theta) \rightarrow (r, -\theta)$$

معادله تغییر نکرده است $r^2 = \frac{1}{\cos^2(-\theta)} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ نمودار نسبت به محور طول‌ها متقارن است، بنابراین $\theta \in [0, \pi]$

تقارن نسبت به محور عرض‌ها:

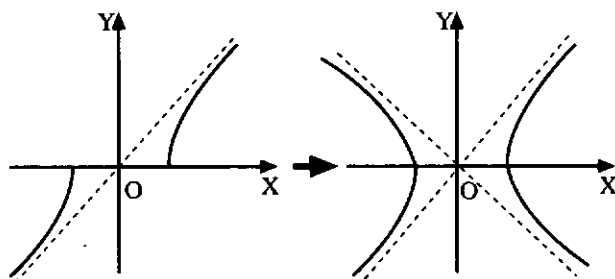
$$(r, \theta) \rightarrow (-r, -\theta)$$

معادله تغییر نکرده است $(-r)^2 = \frac{1}{\cos^2(-\theta)} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ نمودار نسبت به محور عرض‌ها متقارن است و این موجب می‌شود که $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

با اشتراک گرفتن بین شرایط موجود، برای θ خواهیم داشت $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. از طرف دیگر، به راحتی می‌توان نشان داد

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\theta} = +\infty$$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
r	± 1	± 1.1	$+\infty$



تمرین

۱. نمودار $\sqrt{(x^2 + y^2)^3} - 6xy = 0$ را رسم کنید (راهنمایی: $x = \rho \cos \theta$)

۲. نمودار رابطه‌ی ضمنی $x^2 + y^2 = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ را رسم کنید (راهنمایی: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$)

- پی‌نوشت.....
۱. $\pi - \frac{\pi}{4}$ نیز می‌تواند جواب θ باشد، اما از آن‌جا که زوج مرتب ما در ربع چهارم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد، جواب درست $2\pi - \frac{\pi}{4}$ است.
- منابع.....
۱. لویی لیت هولدر. حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده.
۲. جرج توماس و راس ال فینی. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی علی‌اکبر عالم‌زاده و داریوش بهمدی.