

مقدمه

آیا تاکنون با شکلی هندسی برخورد کرده‌اید که محیط یا مساحت آن به بی‌نهایت میل کند؟ دانش‌آموزان سال سوم رشته‌ی ریاضی، در فصل اول کتاب هندسه‌ی ۲، با شکلی آشنا می‌شوند که به «برف دانه‌ی کخ» معروف است. این شکل شباهت زیادی به بلورهای برف دارد و از این رو انتخاب این نام برایش بسیار مناسب است. لازم به ذکر است، مراحل ساخت آن در کتاب توضیح داده شده است و دانش‌آموزان خود می‌توانند تا هر مرحله‌ای که می‌خواهند، شکل را رسم کنند. البته رسم شکل در مراحل بالاتر، کمی مشکل، اما جالب است. هدف از معرفی این شکل، استفاده از روش استقرایی برای بررسی یک یا دو ویژگی از آن است. اما این شکل برای مراحل بالاتر و وقتی $n \rightarrow +\infty$ میل می‌کند، ویژگی‌های جالب دیگری نیز دارد که ممکن است از نظر دانش‌آموزان پوشیده بماند. در این مقاله سعی شده است، برخی از این ویژگی‌ها بررسی و روش‌های اثبات و توجیه مناسب و قابل استفاده، برای دانش‌آموزان دبیرستانی آورده شود. در انتها نیز زیباترین نکته که همانا محاسبه‌ی محیط و مساحت برف دانه است، اثبات خواهد شد.

محیط و مساحت برف دانه‌ی کخ

● صدیقه بابایی

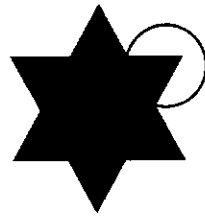
برف دانه‌ی کخ چگونه ترسیم می‌شود؟

یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a رسم و هر ضلع آن را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. روی قسمت‌های میانی هر ضلع، مثلث متساوی الاضلاعی با طول ضلع $\frac{a}{3}$ ایجاد و سپس پاره خط‌های میانی را حذف می‌کنیم.

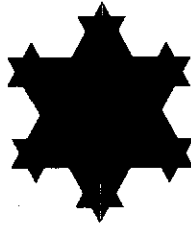


همان‌طور که مشاهده می‌کنید، شش مثلث متساوی الاضلاع

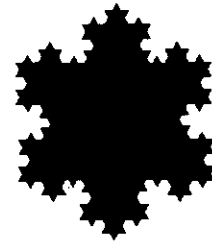
کوچک با طول ضلع $\frac{a}{3}$ تولید شده است:



حال عمل بالا را روی اضلاع هر شش مثلث تکرار می‌کنیم تا به این شکل برسیم:



دوباره روی اضلاع کوچک جدید ایجاد شده، عمل بالا را تکرار می‌کنیم تا برف‌دانه کامل‌تر شود:^۱



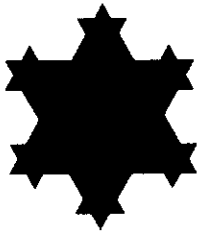
ویژگی‌های برف‌دانه‌ی کخ

تعداد پاره خط‌های موجود در برف‌دانه

مثلث متساوی‌الاضلاع ابتدایی را مرحله‌ی صفر در نظر می‌گیریم. در این صورت در این مرحله سه پاره خط وجود دارد. در مرحله‌ی اول به راحتی می‌توان دید که شکل تولید شده ۱۲ پاره خط دارد. در حقیقت هر ضلع مثلث اولیه، چهار پاره خط جدید ایجاد کرده است.



در مرحله‌ی دوم، هر یک از ۱۲ پاره خط ایجاد شده به چهار خط جدید تبدیل می‌شود. لذا 4×12 یا $4 \times 4 \times 3$ پاره خط در شکل وجود دارد.

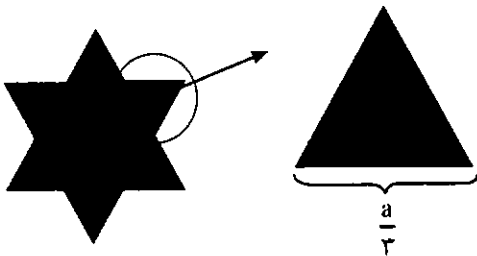


در مرحله‌ی سوم، دوباره هر یک از 3×4^2 پاره خط تولید شده در مرحله‌ی پیش، به چهار پاره خط جدید تقسیم می‌شود. بنابراین در مرحله‌ی سوم 3×4^3 پاره خط داریم. در هر مرحله، هر یک از پاره خط‌های موجود در مرحله‌ی قبل، چهار پاره خط جدید تولید می‌کنند. به این ترتیب، پاره خط‌های موجود در مرحله‌ی کنونی، چهار برابر تعداد پاره خط‌های مرحله‌ی قبلی است. لذا با استفاده از روش استقرایی می‌توان جدول زیر را تهیه کرد.^۲

مرحله	۰	۱	۲	...	n
تعداد پاره خط	۳	۱۲	۴۸	...	
فرمول محاسبه شده	3×4^0	3×4^1	3×4^2	...	3×4^n

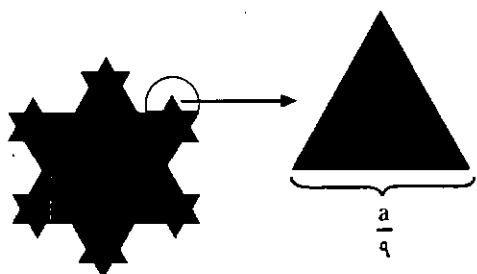
طول پاره خط‌های موجود در برف‌دانه

برف‌دانه از مثلث متساوی‌الاضلاع با طول a ساخته شد. در مرحله‌ی اول، پاره خطی به طول a که ضلع مثلث را ساخته بود، به سه قسمت مساوی تقسیم شد. لذا کلیه‌ی پاره خط‌های طولی برابر $\frac{a}{3}$ دارند.

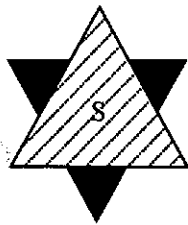


در مرحله‌ی دوم نیز هر پاره خط دوباره به سه قسمت تقسیم می‌شود. بنابراین طول پاره خط‌های موجود برابر $\frac{a}{9}$ یا

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 a \text{ خواهد بود.}$$

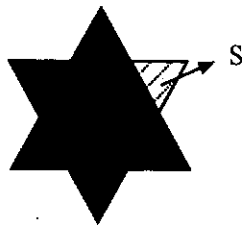


داریم $s_n = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ برای محاسبه‌ی مساحت شکل در مرحله‌ی بعد، باید به این نکته دقت کرد که مساحت شکل حاصل برابر است با مساحت شکل قبلی به علاوه‌ی مساحت سه مثلث کوچک با طول ضلع $\frac{a}{3}$ ، که در این مرحله تولید شده‌اند.



اگر مساحت یکی از این مثلث‌های کوچک را s' بنامیم، طبق شکل زیر خواهیم داشت: $s_1 = s_0 + 3s'$

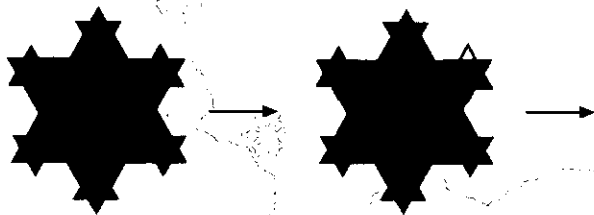
$$s_1 = s_0 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{a}{3}\right)^2 = s_0 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{a^2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \left(1 + \frac{1}{3}\right)$$



حال به مرحله‌ی دوم می‌رویم. در این مرحله نیز ۱۲ مثلث کوچک به شکل اضافه شده‌اند که مساحت آن‌ها به مساحت شکل قبلی افزوده می‌شود.

$$s_2 = s_1 + 12s' = s_1 + 12 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{a}{9}\right)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3}\right)$$



با کمی دقت می‌توان دریافت، در هر مرحله، هر پاره خط، یک

در هر مرحله، پاره خط مرحله‌ی قبل سه قسمت خواهد شد. لذا طول هر پاره خط $\frac{1}{3}$ طول پاره خط مرحله‌ی قبل خواهد بود. به عبارت دیگر داریم:

طول پاره خط مرحله‌ی $(i-1)$ $\times \frac{1}{3}$ = طول پاره خط مرحله‌ی i ام.

بنابراین طول پاره خط مرحله‌ی n ام برابر است با $\left(\frac{1}{3}\right)^n \times a$

مرحله	۰	۱	۲	...	n
طول پاره خط‌های موجود در برف دانه	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 a$	$\left(\frac{1}{3}\right)^1 a$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 a$	...	$\left(\frac{1}{3}\right)^n a$

محیط برف دانه‌ی کخ

محیط یک شکل، مجموع طول اضلاع تشکیل دهنده‌ی آن است. بنابراین با در دست داشتن تعداد پاره خط‌ها و طول آن‌ها در هر مرحله، به راحتی می‌توان محیط شکل تولید شده در هر مرحله را به دست آورد. برای مثال، محیط شکل در مرحله‌ی n ام برابر است با: تعداد پاره خط‌های مرحله‌ی i ام $\times$ طول پاره خط مرحله‌ی i ام. بنابراین:

$$\text{محیط شکل تولید شده در مرحله‌ی } i \text{ ام} = (3 \times 4^i) \times \left(\left(\frac{1}{3}\right)^i \times a\right)$$

مرحله	۰	۱	۲	...	n
محیط شکل تولید شده	$3a$	$3 \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times a$	$3 \times 3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times a$	...	$3 \times 3^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times a$
فرمول محاسبه شده	$\left(\frac{4}{3}\right)^0 \times 3a$	$\left(\frac{4}{3}\right)^1 \times 3a$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \times 3a$	...	$\left(\frac{4}{3}\right)^n \times 3a$

همان‌طور که قبلاً بیان شده بود، هر چه n بزرگ‌تر شود، شکل حاصل به برف دانه‌ی کخ نزدیک‌تر خواهد شد. وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر شود یا به عبارت دیگر به ∞ میل کند، محیط شکل ایجاد شده، به محیط برف دانه نزدیک‌تر خواهد شد. بنابراین خواهیم داشت:

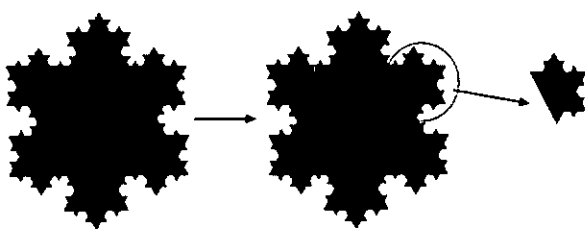
$$\text{محیط برف دانه‌ی کخ} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \times 3a$$

واضح است که محیط برف دانه با افزایش n به ∞ میل خواهد کرد.

مساحت برف دانه‌ی کخ

اگر مساحت مثلث متساوی الاضلاع اولیه را با s_0 نشان دهیم،

مثلت در مرحله ی بعد تولید می کند که باید در محاسبه ی مساحت شکل بعد در نظر گرفته شود. برای مثال، در مرحله ی دوم از ترسیم، ما ۴۸ پاره خط داریم. بنابراین در محاسبه ی مساحت شکل در مرحله ی سوم، ۴۸ مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع $\frac{a}{27}$ داریم که به مساحت شکل مرحله ی دوم افزوده می شود. در شکل نیز می توانید درستی این مدعا را ببینید.



بنابراین:

$$s_3 = s_2 + 48 \times s' = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^2}\right) + 48 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{a}{27}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{4^2}{3^5}\right)$$

از نکته ای که در بالا ذکر شد، استفاده و ادعا می کنیم،

$$s_n = s_{n-1} + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

حال به استقرا، فرمول بالا را اثبات می کنیم.

فرض استقرا برای $n=1$ قبلاً توضیح داده شده است. حال فرض کنیم فرمول بالا برای n برقرار باشد. باید نشان دهیم رابطه برای $n+1$ نیز برقرار است. طبق آن چه قبلاً توضیح داده شده است، مساحت در هر مرحله برابر است با مساحت شکل در مرحله ی قبل به علاوه ی مجموع مساحت های مثلث های کوچک و جدیدی که روی هر یک از اضلاع شکل مرحله ی قبل تولید می شود. بنابراین داریم:

$$s_{n+1} = s_n + (\text{تعداد پاره خط های مرحله ی } n) \times (\text{مساحت مثلثی با طول ضلع } \frac{a}{3^{n+1}})$$

$$s_{n+1} = s_n + 3 \times 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{a}{3^{n+1}}\right)^2 = s_n + \frac{4^n}{3^{2n+1}} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

در این مرحله، باید فرمولی مستقل برای مساحت برف دانه

به دست آورد. لذا در عبارت $s_n = s_{n-1} + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ مقدار s_{n-1} را قرار می دهیم. این یک رابطه ی بازگشتی است که باید در مرحله ی بعد مقدار s_{n-2} را قرار داد و این عمل تا s_1 و s_0 ادامه می یابد و با جای گذاری مقادیر خواهیم داشت:

$$s = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{1}{3} + \frac{4}{3^2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{4^2}{3^5} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \dots + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{4^{i-1}}{3^{2i-1}}\right)$$

تا این مرحله توانستیم یک سری برای محاسبه ی مساحت برف دانه محاسبه کنیم. از طرف دیگر، وقتی n بزرگ تر شود، می توان مقدار واقعی مساحت برف دانه را یافت. بنابراین حد زیر، مقدار واقعی مساحت برف دانه خواهد بود.

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{4^{i-1}}{3^{2i-1}}\right)$$

حال هم گرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}$ را بررسی می کنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{2n}} \times \frac{3}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \times \frac{4^n}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

واضح است که سری بالا یک سری هندسی است که به $\frac{3}{5}$

هم گراست. بنابراین می توان گفت، مساحت برف دانه ی کخ برابر

$$\text{است با } \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2$$

زیرنویس

۱. لازم به ذکر است، وقتی تعداد مراحل انجام کار بالاتر می رود و در حقیقت تعداد این اعمال تا بی نهایت ادامه پیدا می کند، به شکل حاصل، برف دانه ی کخ می گویند.
۲. با توجه به مراحل بیان شده می توان به راحتی با استفاده از استدلال استقرایی فرمول مرحله ی n را اثبات کرد.
۳. با توجه به مراحل بیان شده می توان به راحتی با استفاده از استدلال استقرایی فرمول مرحله ی n را اثبات کرد.