نشر ریاضی، سال ۹ شمارهٔ ۱، صص ۵ـ۱۹

شهودگرایی براؤری

محمد اردشیر*

تقدیم به دیرک وان دالن به مناسبت شصت و پنجمین سالگرد تولدش.

شهودگرایی به‌عنوان یک برنامهٔ عملی ریاضیات ساختی[1] با براؤر آغاز شد. در این مقاله سعی ما بر این است که اصول شهودگرایی براؤری را به زبانی غیرفنی شرح دهیم. بدیهی است که در یک مقالهٔ غیرفنی، همهٔ جوانب شهودگرایی قابل ذکر نیستند، اما امیدواریم که اتهات این مکتب را بیان کنیم.

شهودگرایی براؤر را باید در چارچوب ریاضیات ساختی دید. به همین دلیل، برای درک بهتر شهودگرایی، مکاتب مختلف ریاضیات ساختی را در قالب تاریخی مرور می‌کنیم.

مقالهٔ حاضر شامل بخشهای زیر است:

۱. تاریخچهٔ مختصری از ساختگرایی

۲. ساختی‌بودن

۳. منطق شهودگرایی

۴. حساب شهودگرایی

۵. آنالیز شهودگرایی

۶. جبر شهودگرایی

۷. مبانی فلسفی شهودگرایی

در نگارش مقالهٔ حاضر، مرجع [۳۰] بیش از دیگر مراجع مورد استفاده قرار گرفته و به‌ویژه اکثر مطالب تاریخی بخش ۱ برگرفته از این مرجع است.

۱. تاریخچهٔ مختصری از ساختگرایی

ساختگرایی[2] نظریه‌ای در بارهٔ ریاضیات است که کم و بیش در مقابل نگرش اکثر ریاضیدانان نسبت به ریاضیات قرار دارد. در بین نمایندگان مختلف مکتب ساختگرایی اختلافات اساسی وجود دارد. حتی بدتر (بهتر؟) از این، در عقاید یک ریاضیدان ساختگرا در دورهٔ حیاتش نیز، گاهی اوقات، ناهمگونی و اختلاف به چشم می‌خورد.

در این مقاله منظور ما از ریاضیات با منطق کلاسیک، استدلالی است مبتنی بر منطق دو ارزشی، که مطابق آن، هر حکمی (با معنی) یا راست است یا غلط. حال به نحله‌های مختلف ساختگرایی اشاره می‌کنیم:

۱.۱ متناهی‌گرایی. متناهی‌گرایی[1] نوعی ساختگرایی است که اصول اساسی آن عبارت‌اند از:

(الف) فقط ساختهایی می‌توانند اشیاء ریاضیات باشند که به‌طور انضمامی[2] متناهیاً قابل نمایش باشند، مثل اعداد طبیعی. اَعمال روی این ساختها چیزی جز ترکیبات متناهی نیست، و بنابراین روش مبتنی بر متناهی‌گرایی، کارا[3] ست.

(ب) اشیاء مجرّد مثل مجموعه، عمل، ... هیچ جایی در ریاضیات ندارند.

کرونکر (۱۸۲۳ـ۱۸۹۱) را می‌توان بانی اولیهٔ مکتب متناهی‌گرایی نامید. گفتهٔ معروف او را که «خداوند فقط اعداد صحیح را آفرید» اغلب ریاضیدانان شنیده‌اند. معنای بلاواسطهٔ این گفته آن است که فقط اعداد صحیح وجود واقعی یا وجود عینی دارند. ساختگرایی کرونکر به‌راحتی از نظراتش در بارهٔ وضعیت اشیاء ریاضی دریافته می‌شود. در [۲۰] طرح حسابی‌سازی[4] جبر و آنالیز ریخته می‌شود. او صراحتاً، با الهام از گاوس حسابی‌سازی خود را به آنالیز و جبر محدود می‌کند و هندسه و مکانیک را به‌عنوان موجودات

1. constructive mathematics 2. constructivism

1. finitism 2. concretely 3. effective 4. arithmetizing

مستقل به کنار می‌نهد. برنامهٔ کرونکر را ژول مُلک[1] ادامه داد. او در مقالهٔ مفصلی [۲۳] به کارهای کرونکر اشاره می‌کند و در مبحث تعاریف می‌گوید که «تعاریف باید جبری باشند و نه منطقی. کافی نیست که بگوییم چیزی هست یا چیزی نیست». او اشاره می‌کند که تعاریف منطقی، مثل «یک تابع تحویل‌ناپذیر[2] بنابر تعریف تحویل‌پذیر نیست» هیچ فایده‌ای ندارند. در جبر، تعریف تحویل‌ناپذیری باید به‌گونه‌ای باشد که بتوان در تعدادی متناهی مرحله آزمود که آیا یک تابع به عوامل اول تجزیه می‌شود یا نه. تنها چنین آزمونهایی به کلمات تحویل‌پذیر یا تحویل‌ناپذیر معنی می‌دهد.

شایان ذکر است که مُلک به صدق احکامی مثل «هر مجموعهٔ کراندار از اعداد حقیقی دارای یک کوچکترین کران بالا است» اعتراض ندارد، او این قبیل احکام را احکام صادق منطقی می‌داند که به جبر تعلق ندارند. با توجه به اشارات کرونکر به طبیعت اشیاء ریاضی و براهین ریاضی به‌نظر می‌رسد که کرونکر احکام فوق را بامعنی نمی‌داند.

متناهی‌گرایی را به‌طور مشخص اسکولم در مقالهٔ [۲۸] و گودشتاین در دو کتاب [۱۲] و [۱۳] معرفی کرده‌اند. متناهی‌گرایی نقش مهمی در برنامهٔ هیلبرت ایفا می‌کند: روشهایی را که به‌وسیلهٔ همهٔ ریاضیدانان قابل قبول است به کار بریم تا نشان دهیم که ریاضیات موجود فارق از تناقض است. این روشها چیزی جز ریاضیات متناهی نیست. این البته بدان معنی نیست که هیلبرت را باید متناهی‌گرا به حساب آورد. دستگاه صوری که بیانگر نوعی ریاضیات متناهی است در حساب بازگشتی مقدماتی[3] (PRA) متجلّی است.

۲.۱ حملی‌گرایی. حملی‌گرایی[4] را می‌توان «ساختگرایی نسبت به تعاریف» در نظر گرفت. در حملی‌گرایی:

(الف) تعاریف اشیاء ریاضی باید حملی یا اسنادی باشند، یعنی تعریف یک شیء d با ارجاع به مجموعه‌ای چون D که شیء d خود عضوی از آن است، مجاز نیست؛ به‌طور خاص، تسویر روی D برای تعریف d مجاز نیست (برای اجتناب از «دور باطل» در تعریف).

(ب) مطلوبیت تعاریف حملی با منطق سنتّی همخوانی دارد، که در آن احکام ریاضی، جدا از معرفت بشری، باید راست یا دروغ باشند.

معمولاً، مجموعهٔ اعداد طبیعی از نظرگاه حملی‌گرایی هیچ مشکلی ندارد. این بدان معنی است که تسویر روی مجموعهٔ اعداد طبیعی پذیرفتنی است و محمولهایی که بدین ترتیب تعریف می‌شوند معنی دارند. با درک ایدهٔ مجموعه‌ای که به‌طور حسابی تعریف شده است (مجموعه‌های تراز ۱)، می‌توان روی چنین مجموعه‌هایی تسویر کرد و مجموعه‌های ترازهای ۲، ... را ساخت. از طرف دیگر، تعریف کوچکترین کران بالای یک مجموعهٔ X از اعداد حقیقی (که به عنوان برشهای (چپ) دِدِکیند تعریف می‌شود) به صورت اشتراک همهٔ برشهای چپ که کران بالای X هستند مجاز نیست؛ کوچکترین کران بالا خود یکی از اعضای مجموعهٔ کرانهای بالاست.

اولین تلاش برای نشان دادن اینکه بخشهایی از آنالیز را می‌توان به‌طور حملی بنا کرد، به‌وسیلهٔ وایل در «پیوستار» [۳۱] انجام شد. شبه‌شهودگرایان[5] فرانسوی مثل پوانکاره و بورل را می‌توان جزء حملی‌گرایان قلمداد کرد. نظرات پوانکاره در انتقاد از نظریهٔ (کانتوری[6]) مجموعه‌ها معروف است. گرچه او را

1. Jules Molk 2. irreducible 3. Primitive Recursive Arithmetic 4. predicativism 5. semi-intuitionists 6. Cantorian

نمی‌توان ساختگرا دانست ولی تأثیر مستقیم او در تحولات بعدی ساختگرایی عمدتاً محدود به دیدگاههای او در بارهٔ شهود است. او هم به منطق ارسطویی بدبین بود و هم به انواع جدیدتر منطق از نوع منطق راسل، فرگه و پئانو.

پوانکاره ادّعا می‌کند که در ریاضیات بیش از منطق به شهود نیاز است. او سه نوع شهود را مطرح می‌کند: احساس و تصور، تعمیم به‌وسیلهٔ استقراء، و بالاخره شهودِ عدد محض. این آخری دقت ریاضیات را تضمین می‌کند. ریاضیات روشهای اثبات خاص خود را دارد، و روش خاص آن، اصل استقراء، طبقِ نظر پوانکاره یک حکم ترکیبی پیشینی است.

از چند لحاظ می‌توان پوانکاره را یکی از پیشگامان ساختگرایان بعدی دانست: پذیرش او از اصل استقراء به‌عنوان یک حکم غیرقابل اثبات، نفی او از بینهایت بالفعل کانتوری و بالاخره سهیم‌کردن شهود در ریاضیات.

در عین حال نباید سازگاری زیادی از آثار فلسفی پوانکاره انتظار داشت. به‌عنوان مثال او در [۲۴] از نوعی افلاطون‌گرایی دفاع می‌کند: «وجود فقط یک معنی می‌تواند داشته باشد، فارغ بودن از تناقض». به نظر او تناقضهای اوایل قرن بیستم به‌علّت استدلالهای غیرحملی پیدا شده‌اند.

بعد از پوانکاره، گرچه امیل بورل را سخنگوی شبه‌شهودگرایان لقب داده‌اند، ولی نظرات بورل به کرونکر نزدیکتر بود تا به پوانکاره. برای مثال، او معتقد بود که فقط شیئی که به‌طور کارا (مثلاً به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی کلمه) تعریف شود، در قلمرو علم وجود دارد؛ سازگاری برای علم کافی نیست. در مقایسه با نظر کرونکر: «قابل تعیین در تعدادی متناهی مرحله»، این «تعریف‌پذیری متناهی» آشکارا مفهومی لیبرال است. مثلاً، تابع f که به‌صورت زیر تعریف شده، خوش تعریف و موجود است: $f(x) = 0$ به ازای xهای گویا و $f(x) = 1$ به‌ازای xهای غیرگویا. لبگ در این مورد با بورل هم‌عقیده بود. از نظر بورل، اعداد حقیقی منفرد باید با یک تعریف متناهی داده شوند، بنابراین مجموعه‌ای که آنها را در بر می‌گیرد نمی‌تواند از شمارا بیشتر باشد. چون پیوستار شمارا برای بورل غیرقابل باور بود، فرض می‌کرد پیوستار به‌وسیلهٔ شهود داده شده است؛ او صحبت از «پیوستار هندسی» می‌کرد، نظری که براوِر مستقلاً در رسالهٔ دکتری خود به بسط آن پرداخت.

این مفهوم از پیوستار هندسی منجر به «کل»[1]ی می‌شود که از اجزاء خود جامعتر است و نمی‌توان آن را یک «مجموعه از اعداد حقیقی» تصور کرد. نکتهٔ جالب و در عین حال عجیب این است که بورل برای عمل ریاضی به نوعی پیوستار، پیوستار عملی[2]، رسید که می‌تواند از «اعداد حقیقی منفرد تشکیل شود»؛ این پیوستار عملی شامل اعداد حقیقی متناهیا تعریف‌پذیر می‌باشد.

۳.۱ شهودگرایی براوِر. مبانی فلسفی شهودگرایی براوِر به‌عنوان روشی ساختی در ریاضیات، در رسالهٔ دکتری براوِر آمده است. عنوان رسالهٔ دکتری براوِر «مبانی ریاضیات» است و ترجمهٔ انگلیسی آن در ۱۹۷۵ در [۴] آمده است. اصول اساسی شهودگرایی براوِر را می‌توان در عبارات زیر خلاصه کرد:

(الف) ریاضیات با ساختهای ذهنی سروکار دارد، که بلاواسطه به‌وسیلهٔ ذهن درک می‌شود؛ ریاضیات عبارت از دستکاریهای صوری علائم نیست، و استفاده از زبان ریاضی یک امر ثانوی است، که به خاطر محدودیتهای ما (در مقایسه با یک ریاضیدان ایده‌آل با حافظهٔ نامحدود و حضور ذهن کامل) بر ما تحمیل می‌شود، و برای ارتباط برقرارنمودن بین ساختهای ریاضیمان با ساختهای ریاضی دیگران از آن استفاده می‌کنیم.

1. whole 2. parctical

(ب) تصور صدق یا کذب یک حکم ریاضی مستقل از معرفت ما نسبت به آن حکم، بی‌معنی است. یک حکم راست است اگر برهانی برای آن داشته باشیم و غلط است اگر بتوانیم نشان دهیم که فرض اینکه برهانی برای آن وجود دارد منجر به تناقض می‌شود. بنابراین برای یک حکم معین نمی‌توانیم ادعا کنیم که یا راست است یا غلط.

(ج) ریاضیات یک آفرینش آزاد است؛ ریاضیاتْ بازسازی ذهنی یا درک حقیقت در بارهٔ اشیاء ریاضی که مستقل از ما وجود داشته باشند نیست.

از (ب) این نتیجه حاصل می‌شود که باید تعبیر دیگری برای احکامی مثل «وجود دارد x به‌طوری‌که $A(x)$ برقرار است» و «A یا B» یافت. به‌طور خاص، بر اساس قرائت شهودگرایانه، اداتهای «یا» و «نه»، حکم «A یا $\neg A$» در حالت کلی برقرار نیست. مطلبی در توافق با (ج) اما نه ضرورتاً نتیجهٔ آن، این است که شهودگراییْ فرایندهای تمام‌نشدنی را مجاز می‌شمرد: ریاضیدان ایده‌آل می‌تواند دنباله‌های طویل و طویلتری از قطعات ابتدایی $\alpha(0)$، $\alpha(1)$، ...، $\alpha(n)$ را از یک دنبالهٔ نامتناهی از اعداد طبیعی α بسازد که α از قبل به‌وسیلهٔ فرایند ثابتی برای تولید مقادیر معین نشده است. بنابراین ساختمان α هرگز تمام نمی‌شود؛ α مثالی از دنبالهٔ انتخاب است. به این مفهوم در بخش ۵ برمی‌گردیم.

براوئر صورتگرایی هیلبرت و نظریهٔ کانتوری مجموعه‌ها را رد می‌کند. انتقاد براوئر از بخشهای اساسی ریاضیات سنتّی به این نظر نادرست منجر شد که «انقلاب» براوئر (این اصطلاح وایل است) اساساً امری منفی است. این نظر هیلبرت بود. در واقع، جریانْ خلافِ این نظر بود، براوئر مفاهیم بدیعی را معرفی کرد که ریاضیات شهودگرای او را فراتر از سطح معمول قرار می‌دهد. برای توضیح این مطلب به معرفی غیررسمی این مفاهیم بدیع می‌پردازیم.

اولین مفهومی که با نام براوئر گره خورده است، مفهوم «دنبالهٔ انتخاب» است. دنباله‌هایی از اعداد که با انتخاب معین شده‌اند قبل از توصیف براوئر نیز در متون ریاضی یافت می‌شدند. بورل آنها را در ارتباط با مقالهٔ تسرماو مطرح کرد و خاطرنشان کرد که برای بهبود «مفهوم حسابی کامل پیوستار» به دنباله‌های شمارا از انتخابها نیاز است. در بیان بورل، این دنباله‌ها همچنان جزء اسرار باقی ماندند. براوئر اولین کسی بود که کشف کرد چگونه مفهوم انتخاب را به خدمت بگیرد. در بادی امر این مفهوم را به‌عنوان مفهومی غیرشهودگرایانه رد کرد (در ۱۹۱۲) اما بعداً (در ۱۹۱۴) آن را پذیرفت و اولین مقالهٔ شهودگرایانهٔ خود را در بارهٔ دنباله‌های انتخاب (در ۱۹۱۸) به چاپ رساند. او در همان مقاله «اصل پیوستگی[1]» را بیان کرد و با استفاده از آن نشان داد که $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ناشماراست. بررسی بیشتر در دنباله‌های انتخاب، براوئر را به اثبات «قضیهٔ پیوستگی یکنواخت» (یعنی اینکه همه توابع از $[0,1]$ به $\mathbb{R}$ پیوستهٔ یکنواخت هستند) رهنمون کرد. تحلیل برهان او نشان می‌دهد که از اصل دیگری به‌نام اصل استقراء مانع[2] استفاده شده است. در بخش ۵ به این مطالب باز می‌گردیم.

در انتقاد براوئر از ریاضیات دورانش، می‌توان جنبه‌های منفی دیدگاه او را یافت. از نظر او ریاضیات یک امر درونی و فعالیتی ذهنی است، و زبان و منطق اموری ثانوی به حساب می‌آیند. زبان یک ابزار غیرمطمئن برای ارتباط است، که نباید منشأ ادراک باقی گردد و منطق محصولی است از ریاضیات. براوئر در بارهٔ منطق نظرات محافظه‌کارانه‌ای داشته است. بعضی وقتها منطق را همان نظریهٔ سنتّی ارسطویی قیاسها در نظر می‌گیرد و بعضی وقتها منطق پئانو و راسل. در مقالهٔ [۹] تحولات دیدگاه براوئر در بارهٔ منطق به خوبی شرح داده شده است. به طور خلاصه می‌توان گفت که از نظر براوئر، استدلال ریاضی عبارت است از ساختن ساختهای ریاضی، و حضور زنجیره‌ای از کاربردهای قواعد منطقی (قیاسها) عملی است که فقط با ساختمانهای ریاضی همراه آنها توجیه می‌شود. این امر برای استدلالهای منطقی شهودی نیز صادق است. منطق نظری، کاربردی از ریاضیات است و بنابراین یک علم تجربی است.

۲.۱ ریاضیاتِ ساختی بیشاپ. این نگرش در ریاضیات ساختی از کتاب معروف بیشاپ، مبانی آنالیز ساختی [۱]، در ۱۹۶۷ نشأت گرفته است. بیشاپ خود می‌گوید: «این کتاب سه هدف دارد؛ اول، معرفی و ارائهٔ دیدگاه ساختی؛ دوم، نشان دادن اینکه برنامهٔ ساختی می‌تواند موفّق باشد؛ سوم، طرح اصول برای کارهای بیشتر. این اهداف با هدف نهایی گره می‌خورد که آن به جلو انداختن روز موعودی است که ریاضیات ساختی به‌عنوان نرم ریاضیاتْ پذیرفته شده باشد.» پیام بیشاپ این بود که کار ریاضیات ساختی ریاضیات است، و در زمانی کار او به منصهٔ ظهور آمد که ساختگرایی، عمدتاً روی مبادی متمرکز شده بود.

در این مکتب، بحثهای فلسفی جای کمی را می‌گیرند، تأکید کاملاً روی عمل ریاضیات ساختی است. اصول اساسی مکتب بیشاپ را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

(الف) «احکام ریاضی باید معنای عددی داشته باشند». به‌طور خاص، این بدان معنی است که احکام وجودی، در اصل، باید قابل صریح‌شدن باشند (و همچنین، در ادعای $A \vee B$، انتخاب بین A یا B در اصل، باید ممکن باشد). تنها در صورتی می‌توان اثبات کرد یک شئ موجود است که یک روش متناهی برای یافتن آن ارائه شود.

(ب) این فرض پذیرفته نیست که همهٔ اشیاء ریاضی باید به شکل الگوریتم داده شده باشند. دنباله‌های انتخاب به‌عنوان اشیاء ریاضی مجاز شمرده نمی‌شوند.

از نظر بیشاپ مجموعه‌ها «کلیّت‌هایی از اشیاء ریاضی هستند که مطابق شرایط معینی ساخته می‌شوند» و آنها با رابطه‌ای هم‌ارزی همراه هستند که همان «تساوی» است. اشیاء مرتبهٔ بالاتر، عملگرها هستند. قواعدی که عناصر یک مجموعهٔ A را به عناصر مجموعهٔ B نسبت می‌دهد. یک چنین قاعده‌ای، مثل f، باید یک فرایند مکانیکی متناهی و صریح فراهم کند که ساختن $f(a)$ را به فرایندِ ساختن a تحویل نماید. تابع عملگری است که تساوی را حفظ می‌کند. گرچه بیشاپ مفهوم «قاعده» را صریحاً روشن نمی‌سازد، اما می‌توان در همه جا آن را معادل بازگشتی بودن فرض کرد. بدین معنی، ریاضیات بیشاپ با تز چرچ[1] سازگار است.

تز اساسی بیشاپ این است که «همهٔ ریاضیات باید دارای معنای عددی باشد». این تز به دیدگاه کرونکر نزدیکتر است تا به دیدگاه براوئر. ریاضیات بیشاپ بر پایه‌های خنثا یا بی‌طرف بنا شده است و هیچ‌گونه هستی‌شناسی[2] یا اصول و اشیاء ایده‌آلیستی را فرض نمی‌کند. بنابراین، بر خلاف براوئر، او نمی‌تواند ثابت کند که همهٔ توابع حقیقی پیوسته‌اند، گرچه به عنوان یک ریاضیدان عملگرا توجهش را به توابع پیوسته محدود می‌کند.

1. Continuity Principle 2. Bar Induction

1. Church's thesis 2. ontology

ریاضیات ساختی بیشاپ برای بخش خنثای ریاضیات ساختی بنا شده و با ریاضیات کلاسیک سنتی سازگار است. ریاضیات ساختی بیشاپ را می‌توان هم در جهت شهودگرایی براؤر توسعه داد و هم در جهت ریاضیات بازگشتی به مفهوم مورد نظر مارکوف[1].

۵.۱ ریاضیات بازگشتی ساختی. این طرز نگرش به ریاضیات ساختی به‌وسیلهٔ مارکوف از حدود ۱۹۵۰ پدید آمد. اصول اساسی ریاضیات بازگشتی ساختی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

(الف) اشیاء ریاضی الگوریتمها هستند، که به معنی دقیق ریاضی تعریف می‌شوند. هر الگوریتم به یک معنی عبارت است از یک «کلمه» در یک الفبای متناهی.

(ب) محدودیتهای ناشی از حافظهٔ متناهی را می‌توان در نظر نگرفت؛ طول رشته‌های علائم، گرچه همیشه متناهی‌اند، می‌تواند بیکران باشد.

(ج) احکام مرکب منطقی که شامل $\exists$، $\vee$ نیستند، به شکل معمولی تعبیر می‌شوند؛ اما احکام وجودی یا فصلی همیشه باید به صورت صریح درآیند.

(د) اگر غیرممکن باشد که یک محاسبهٔ الگوریتمی پایان نپذیرد، می‌توانیم فرض کنیم که پایان می‌پذیرد. این همان اصل مارکوف است.

انگیزه‌های شکل‌گیری ریاضیات بازگشتیِ ساختی مبتنی بر فلسفه‌ای کاملاً متفاوت با شهودگرایی براؤر است. تورینگ[2] در ۱۹۳۷ یک توصیف مفهومی از الگوریتم ارائه کرد که به‌نام ماشین تورینگ معروف شد. تورینگ مفهوم شهودی «قابل محاسبهٔ مکانیکی به‌وسیلهٔ انسان» را تحلیل کرد و دلیل متقاعدکننده‌ای آورد که «محاسبه‌پذیری» با «محاسبه‌پذیری به‌وسیلهٔ ماشین تورینگ» یکی است. چرچ نیز در ۱۹۳۶ توصیفی از محاسبه‌پذیری به دست داد و بر حسب مفهوم بازگشتی، «محاسبه‌پذیری» و «بازگشتی» را یکی گرفت. این یکسان گرفتن به‌نام تز چرچ معروف است. ریاضیات مبتنی بر تز چرچ به‌وسیلهٔ مارکوف، بنیانگذار مکتب ریاضیات ساختی در مسکو ترویج شد. یکی از نتایج نظرات مارکوف این است که توابع عددی، بازگشتی هستند، این بدان معنی است که جنبهٔ تحقق‌پذیری بالقوه[3] این شیئ «نامتناهی» باید یک نمایش اندیس‌دار داشته باشد. این بدین معناست که ریاضیات ساختی مارکوف نظریه‌ای مبتنی بر تز چرچ است.

گرچه مارکوف از لحاظی، سختگیرتر از شهودگرایان است زیرا دنباله‌های انتخاب را قبول ندارد، از لحاظ دیگر لیبرالتر از آنهاست. استدلال او برای توجیه اصل انتخاب ساختی[4] که به‌نام اصل مارکوف معروف است، این مطلب را نشان می‌دهد. این اصل اگر با اصطلاحات آشنا بیان شود، حاکی است که اگر این حالت برقرار نمی‌شود که یک ماشین تورینگ با ورودی داده شده متوقف نشود، آنگاه متوقف می‌شود. استدلال مارکوف بر حسب ماشین تورینگ به قرار زیر است: اگر غیرممکن است که ماشین تورینگ برای همیشه محاسبه کند، واضح است که الگوریتمی برای به‌دست آوردن خروجی موجود است: فرایند را ادامه دهید تا بایستد.

گرچه اصل مارکوف را اکثر ساختگرایان نپذیرفتند، اما این اصل جای خاصی در فراریاضیاتِ ریاضیاتِ ساختی پیدا کرد.

1. Markov 2. Turing 3. potentially realizable 4. principle of constructive choices

۲. ساختی‌بودن

در این بخش سعی خواهیم کرد مفهوم ساختی‌بودن[1] را با ارائهٔ مثالهای ساده‌ای شرح دهیم. چه اشیائی را می‌توان گفت که به‌عنوان ساختمانهای ذهنی وجود دارند؟ از نظرگاه ساختی، اعداد طبیعی چنین‌اند. اعداد طبیعی با یک ساختمان ذهنی ساده مطابقت می‌کنند؛ به یک واحد مجرد فکر کنید، بعد به واحد مجزای دیگری فکر کنید و آنگاه ترکیب آنها را بررسی کنید، یعنی آنها را با هم در نظر بگیرید. تکرار نامتناهی این فرایند مجموعهٔ $\mathbb{N}$ از اعداد طبیعی را تولید می‌کند.

در این فرایند تکرار نامتناهی، نوعی ایده‌آل‌سازی نهفته است. ما اعداد ۵، ۱۰۰۰۰ و $۱۰^{۱۰^{۱۰}}$ را از یک نوع به حساب می‌آوریم گرچه تصویر ذهنی آنها در هر حالت مختلف است: همهٔ مکاتب ساختگرایی به نوعی ایده‌آل‌سازی باور دارند، به‌عبارت دیگر توصیف آنها از ریاضیات ساختی شامل عناصر «نظری» نیز هست. به این دلیل است که ما شهودگرایی براؤر و ساختگرایی مارکوف را نظریه‌هایی در بارهٔ ریاضیات می‌دانیم.

اینکه چه مفهومی دقیقاً ساختی است، کاری بس دشوار و به اعتقاد بعضی از ساختگرایان ناممکن است. اما با مثالهای زیر می‌توانیم تصویری از آنچه که ساختی نیست به‌دست آوریم.

۱.۲ مثال. یک تعریف غیرساختی. فرض کنید A یک حکم ریاضی باشد که تا زمان حاضر نه اثبات شده است و نه رد شده است، مثلاً، «تعدادی نامتناهی اعداد اول دوقلو وجود دارد». تعریف زیر را برای عدد طبیعی p در نظر بگیرید:

$$p = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } A \text{ صادق باشد} \\ ۲ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

از نظر ساختی این تعریف قابل قبول نیست، زیرا صدق A معلوم نیست. ما نمی‌توانیم معین کنیم که آیا $p = ۱$ یا $p = ۲$. به‌عبارت دیگر نمی‌دانیم چگونه با «تصور چند واحد مجرّد با هم» p را به‌دست آوریم.

مثال زیر نمونهٔ مشهوری از برهان غیرساختی است:

۲.۲ مثال (قضیه). اعداد ناگویای a و b موجودند به‌طوری‌که a^b یک عدد گویاست.

اثبات. $(\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}$ را در نظر بگیرید. اگر گویا باشد، می‌توانیم بگیریم $a = b = \sqrt{۲}$ و اگر ناگویا باشد، می‌گیریم $a = (\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}$ و $b = \sqrt{۲}$. ■

این برهان به این دلیل غیرساختی است که روشی برای ساختن a به عنوان یک عدد حقیقی ارائه نمی‌دهد. یعنی به هیچ روشی ما را به محاسبهٔ a با هر درجهٔ مطلوبی از دقت قادر نمی‌سازد. به‌عبارت دیگر نمی‌دانیم که چگونه یک تقریب نزدیک دلخواه از اعداد گویا برای a بیابیم. باید خاطرنشان کرد که برهان ساختی برای قضیهٔ فوق ممکن است:

قضیه (گلفوند)[2]. اگر $a \notin \{۰, ۱\}$، a جبری و b یک عدد جبری ناگویا باشد، آنگاه a^b ناگویاست.

اثبات. [۱۰] صفحهٔ ۱۰۶، قضیهٔ ۲ ■

بنابر قضیهٔ گلفوند، $a = (\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}}$ و $b = \sqrt{۲}$ برای اثبات قضیهٔ مثال ۲.۲ کار می‌کند. دلیل اساسی برای رد برهان قضیه در مثال ۲.۲، مبتنی بر

1. constructivity 2. Gelfond

قرائت ساختگرایان از «وجود دارد» است. از نظر ساختگرایان، «وجود دارد» یعنی «می‌توان ساخت».

مثال بعدی از یک برهان غیرساختی، برهان قضیهٔ معروف کونیگ[1] است:

۳.۲ مثال (قضیهٔ کونیگ). فرض کنید T یک درخت نامتناهی باشد که از هر گره آن تعدادی متناهی شاخه می‌گذرد. در این صورت T یک شاخهٔ نامتناهی دارد.

اثبات. شاخهٔ نامتناهی $\alpha : \mathbb{N} \to T$ را به‌صورت زیر «می‌سازیم». $\alpha(0)$ را ریشهٔ درخت می‌گیریم. فرض کنید $\alpha(n)$ طوری ساخته شده است که به تعداد نامتناهی تالی دارد. از بین مجموعهٔ متناهی تالیهای بلاواسطهٔ $t_0, \ldots, t_k$ برای $\alpha(n)$، حداقل یکی از t_iها بینهایت تالی دارد؛ بگیرید $\alpha(n+1) = t_i$. این فرایند را به‌طور نامتناهی می‌توانیم ادامه دهیم و بدین ترتیب یک شاخهٔ نامتناهی تولید می‌شود. ■

گرچه در ابتدای برهان فوق از کلمه «می‌سازیم» استفاده شده، اما این «ساختن» از دیدگاه ساختی پذیرفتنی نیست. دلیل این امر این است که در هر مرحله، مثلاً $\alpha(n)$، هیچ روش ساختی برای تعیین اینکه کدام یک از گرههای $t_0, \ldots, t_k$ بینهایت تالی دارند، در دست نداریم. با آنکه می‌دانیم چنین نیست که هر یک از گرههای $t_0, \ldots, t_k$ تعداد متناهی تالی داشته باشند، اما از این مقدمه نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که حداقل یکی از گرههای $t_0, \ldots, t_k$ بینهایت تالی دارد. از دیدگاه ساختی، هر برهان برای یک ادعای وجودی، مستلزم ارائهٔ روشی ساختی برای شئ مورد ادعاست. به عبارت منطقی، جملهٔ $\neg\forall x A(x) \to \exists x \neg A(x)$ یک اصل معتبر منطق مرتبهٔ اول نیست.

ذکر این نکته لازم است که صورت شهودگرایانهٔ قضیهٔ کونیگ، معروف به «قضیهٔ بادبزن[2]» از نظر ساختی معتبر است. در بخش ۵ به این مسأله برمی‌گردیم.

۴.۲ مثالهای ناقض ضعیف[3]. قرائت ساختی از فصل منطقی، «$\vee$»، منجر به عدم اعتبار اصل طرد شق ثالث می‌شود. از نظر فرد ساختگرا، صدق یک حکم عبارت است از ارائهٔ برهانی برای آن حکم. برهان برای $A \vee B$ عبارت است از برهانی برای A یا برهانی برای B. با این تعبیر، اصل طرد شق ثالث، یعنی این اصل که برای هر حکم A، $A \vee \neg A$، از درجهٔ اعتبار ساقط می‌شود زیرا قبول آن مستلزم داشتن روشی کلی است که با آن روش برای هر حکم A، بتوانیم برهانی برای A به‌دست آوریم یا برهانی برای $\neg A$. ریاضیات پر از مثالهایی است که فعلاً نه خود آنها را می‌توانیم ثابت کنیم و نه نقیض آنها را.

در ۱۹۰۸ براؤر برای اولین بار مفهوم «مثالهای ناقض ضعیف» را مطرح کرد. هدفش این بود که نشان دهد بعضی از احکام که از نظر کلاسیک پذیرفته شده‌اند از نظر ساختی، پذیرفتنی نیستند. روش کار به این صورت است که اگر آن احکام را بپذیریم، نتیجه‌اش اصل طرد شق ثالث است، و چون اصل طرد شق ثالث از نظر ساختی معتبر نیست، پس آن احکام هم از نظر ساختی پذیرفتنی نیستند. این مثالهای ناقض را مثالهای ناقض براؤری نیز می‌نامند.

۱.۴.۲ تساوی بین اعداد حقیقی تصمیم‌ناپذیر است. می‌خواهیم ثابت کنیم که برای هر عدد حقیقی x، چنین نیست که $x = 0 \vee x \neq 0$.

1. König 2. Fan theorem 3. weak counter examples

فرض کنید $A(n)$ محمولی در بارهٔ اعداد طبیعی است که گرچه به ازای هر n، $A(n)$ تصمیم‌پذیر است، اما صدق $\forall n A(n)$ تا زمان حاضر نامعلوم است؛ مثلاً می‌توانیم $A(n)$ را حدس گُلدباخ بگیریم، یعنی این حدس که «اگر n زوج باشد، اعداد اول p_1 و p_2 موجودند که $n = p_1 + p_2$». حال عدد حقیقی x را با دنبالهٔ کوشی از اعداد گویا به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_n = \begin{cases} 2^{-n} & \forall k \le n \;\; A(k) \quad \text{اگر} \\ 2^{-k} & \neg A(k) \wedge k \le n \wedge \forall k' < k A(k') \quad \text{اگر} \end{cases}$$

$\langle x_n \rangle_n$ یک دنبالهٔ کوشی است. توجه کنید که به ازای هر $m \le n$، $|x_n - x_m| < 2^{-m}$. x را عدد حقیقی منسوب به دنبالهٔ کوشی $\langle x_n \rangle_n$ تعریف می‌کنیم. آنگاه به‌راحتی دیده می‌شود که $x = 0$ اگر و فقط اگر $\forall n A(n)$. بنابراین $x = 0 \vee x \neq 0$ معادل $\forall n A(n) \vee \neg\forall n A(n)$ است. به‌عبارت دیگر تصمیم‌پذیری تساوی بین اعداد حقیقی، تصمیم‌پذیری حدس گلدباخ را به دنبال دارد. □

این مثال یک مثال کلیدی برای ساختن مثالهای ناقض فراوانی در ریاضیات ساختی است. از نتایج شگفت‌انگیز مثال فوق این است که نمی‌توان ثابت کرد مجموعهٔ $X = \{0, x\}$، که x همان عدد حقیقی ساخته شده در مثال ۲.۴.۱ می‌باشد، متناهی است. یادآوری می‌کنیم که یک مجموعه را متناهی گویند اگر در تناظر یک‌به‌یک با یک عدد طبیعی باشد. اثبات متناهی بودن X مستلزم این است که بتوانیم تصمیم بگیریم X یک عضو دارد یا دو عضو متمایز. و این تصمیم‌گیری معادل این است که به ازای هر A بتوانیم تصمیم بگیریم که $\forall n A(n) \vee \neg\forall n A(n)$.

۳. منطق شهودگرایی

قبلاً تذکر داده شد که در بنای ریاضیات ساختی، به منطق نیازی نیست. براؤر از استفاده از علائم منطقی احتراز می‌کرد. صوری‌سازی منطق شهودی اساساً کار یکی از شاگردان براؤر، به‌نام آرند هیتینگ[1] است. این کار در ۱۹۲۵ انجام شد و شواهدی دال بر تأیید براؤر از این صوری‌سازی وجود دارد. صوری‌سازی علاوه بر تسهیل در بیان، خود سرآغاز بنای منطق شهودی شد. قبل از بیان بعضی اصول موضوع و قواعد استنتاج منطق شهودی به تعبیر برهانی اعمال یا اداتهای منطقی می‌پردازیم. این تعبیر برهانی که به تعبیر BHK، براؤر-هیتینگ-کولموگوروف معروف است، بیان می‌کند که چگونه براهین احکام مرکب به براهین اجزاء آنها تحویل می‌شود.

(H۱) برهان برای $A \wedge B$ عبارت است از ارائهٔ برهانی برای A و ارائهٔ برهانی برای B.

(H۲) برهان برای $A \vee B$ عبارت است از ارائهٔ برهانی برای A یا ارائهٔ برهانی برای B.

(H۳) برهان برای $A \to B$ عبارت است از ساختمانی که هر برهان برای A را به برهانی برای B تبدیل می‌کند.

(H۴) تناقض $\perp$ هیچ برهانی ندارد؛ هر برهان برای $\neg A$ ساختمانی است که هر برهان فرضی برای A را به برهانی برای یک تناقض تبدیل می‌کند.

1. A. Heyting

($H۵$) برهان برای $\forall x A(x)$ عبارت است از ساختمانی که هر برهان برای $d \in D$ (D یک دامنه برای متغیر x است) را به برهانی برای $A(d)$ تبدیل می‌کند.

($H۶$) برهان برای $\exists x A(x)$ عبارت است از ساختن یک d در D و برهانی برای $A(d)$.

ذکر چند نکته در اینجا ضروری است.

۱. این توضیح دربارهٔ اعمال و ادات‌های منطقی، کاملاً غیرصوری و مبتنی بر شهود ما از مفاهیم «ساختمان» و «تبدیل» یا «نگاشت» است. کوششهای زیادی برای صوری‌سازی این مفاهیم از مدتها پیش آغاز شده و همچنان ادامه دارد. کرایزل در [۱۹] معتقد است که این تعبیر ناقص است و ضمن اضافه‌کردن شرایطی بر بندهای $H۱ - H۶$، طرحی برای صوری‌سازی آن ارائه داده است. کلینی در [۱۷] و بعد در [۱۸] با محدود کردن قلمرو بحث به نظریهٔ اعداد، تعابیری قوی و بسیار سودمند برای مفاهیم «ساختمان» و «تبدیل» داده است. مارتین لاف رویکرد نظریهٔ انواع[1] [۲۱] را برای توضیح مفهوم «ساختمان» به کار برد که دریچهٔ جدیدی به دنیای علوم نظری کامپیوتر گشود. کوشش در صوری‌سازی و تبیین مفهوم «ساختمان» همچنان ادامه دارد و یکی از قسمتهای مهیج شهودگرایی براوئر است.

۲. در بند ($H۴$) «تناقض» باید یک مفهوم ابتدایی (تعریف‌نشده) تلقی شود.

۳. در بندهای ($H۵$) و ($H۵$) اگر دامنهٔ D به اندازهٔ کافی «ساده» باشد، مثلاً مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، هر d در D خود نمایش‌دهندهٔ برهانی برای $d \in D$ است. بنابراین عبارت «برهانی برای $d \in D$» می‌تواند حذف شود و بندهای ($H۵$) و ($H۶$) به‌صورت زیر درآیند:

($H۵'$) برهان برای $\forall x A(x)$ عبارت است از ساختمانی که هر $d \in D$ را به برهانی برای $A(d)$ تبدیل می‌کند.

($H۶'$) برهانی برای $\exists x A(x)$ عبارت است از ارائهٔ یک d در D و برهانی برای $A(d)$.

علی‌رغم اینکه توضیح $H۱ - H۶$ برای اعمال منطقی، سؤالات زیادی را بی‌جواب می‌گذارد، با این‌حال به قدر کافی قوی هست که بتواند اصول و قواعد منطقی را از نظرگاه ساختی در بوتهٔ آزمایش بگذارد.

به‌عنوان مثال اصل $A \to (B \to A)$ را در نظر بگیرید. برهان کلی برای این حکم به‌طریق زیر حاصل می‌شود. فرض کنید a یک برهان برای A باشد. آنگاه تبدیل ثابت $\lambda b \cdot a$ که به هر عضو دامنه، a را نسبت می‌دهد، هر برهان برای B را به یک برهان برای A تبدیل می‌کند. پس $\lambda b \cdot a$ یک برهان برای $B \to A$ است. بنابراین اگر a یک برهان برای A باشد، $\lambda b \cdot a$ یک برهان برای $B \to A$ است. در نتیجه، $\lambda a \cdot [\lambda b \cdot a]$، که به a، نگاشت ثابت $\lambda b \cdot a$ را نسبت می‌دهد، هر برهان برای A را به یک برهان برای $B \to A$ تبدیل می‌کند، پس $\lambda a \cdot [\lambda b \cdot a]$ یک برهان برای $A \to (B \to A)$ است.

از طرف دیگر می‌توان به‌راحتی دید که $A \vee \neg A$ از نظر ساختی معتبر نیست. ذکر این نکته حائز اهمیت است که گرچه اصل طرد شق ثالث (PEM[2])، معتبر نیست، اما این نتیجه به‌دست نمی‌آید که $\neg(A \vee \neg A)$ معتبر است.

«صورتهای» دیگری از اصل طرد شق ثالث، مثل $\neg\neg A \to A$ نیز در منطق شهودگرایی معتبر نیستند. بنابراین «برهان خلف» به‌معنی کلاسیک

1. theory of types 2. Principle of Excluded Middle (*tertium non datur*)

آن در منطق شهودگرایی معتبر نیست، زیرا در برهان خلف، استنتاج به این شکل است که وقتی که می‌خواهیم حکم A را ثابت کنیم، فرض می‌کنیم چنین نباشد، یعنی $\neg A$. بعد به تناقض می‌رسیم. در منطق کلاسیک در این مرحله A را نتیجه می‌گیریم، اما آنچه که می‌توانیم بگوییم $\neg\neg A$ است. و چون $\neg\neg A \to A$ اصلی معتبر نیست، نمی‌توانیم A را نتیجه بگیریم. براوئر نشان داد که برای هر حکم A در منطق شهودگرایی $\neg\neg\neg A \longleftrightarrow \neg A$، بنابراین برهان خلف برای احکامی که به‌صورت نقیض هستند، یعنی می‌توان آنها را به شکل $\neg A$ نشان داد، معتبر است. یکی دیگر از نقاط افتراق منطق شهودگرایی و منطق کلاسیک در اصل $\neg\forall x A(x) \to \exists x \neg A(x)$ است. در منطق کلاسیک $\neg\forall x\neg$ با $\exists x$ هم‌ارز است، اما در منطق شهودگرایی فقط یک طرف این هم‌ارزی، یعنی $\exists x A(x) \to \neg\forall x \neg A(x)$ معتبر است.

اجازه دهید که منطق مرتبهٔ اول شهودگرایی را با IQC[1] و منطق مرتبهٔ اول کلاسیک را با CQC[2] نشان دهیم. در این‌صورت رابطهٔ $CQC = IQC + \{A \vee \neg A\}$ برقرار است. بدین ترتیب منطق شهودگرایی یک زیرمنطق سرهٔ منطق کلاسیک است.

از طرف دیگر می‌توان منطق شهودگرایی را در منطق کلاسیک «نشاند». این «نشاندن[3]» نتایج بسیار سودمندی خواهد داشت، مثلاً برای رده‌ای از فرمولهای A که از نظر «نحوی[4]» به شکل خاصی باشند، اگر $CQC \vdash A$ آنگاه $IQC \vdash A$.

ترجمهٔ منطق شهودگرایی به منطق کلاسیک را کولموگوروف (۱۹۲۵)، گنتسن[5] (۱۹۳۳) و گودل[6] (۱۹۳۳) مستقل از هم، با اختلافات بسیار کمی در نحوهٔ ترجمه احکام اتمی، ابداع کردند. آنچه که خواهد آمد ترجمهٔ منفی[7] (گودل-گنتسن) خوانده می‌شود:

۱.۳ تعریف. برای فرمولهای منطق محمولات، ترجمهٔ منفی g به‌صورت زیر تعریف می‌شود

(i) $p^g = \neg\neg p$ برای فرمول اتمی p

(ii) $(A \wedge B)^g = A^g \wedge B^g$

(iii) $(A \to B)^g = A^g \to B^g$

(iv) $(\forall x A)^g = \forall x A^g$

(v) $(A \vee B)^g = \neg(\neg A^g \wedge \neg B^g)$

(vi) $(\exists x A)^g = \neg\forall x \neg A^g$

برای «استنتاج» در منطق کلاسیک از علامت «$\vdash_c$» و در منطق شهودگرایی از علامت «$\vdash_i$» استفاده می‌کنیم. آنگاه داریم:

۲.۳ قضیه. (i) برای همهٔ Aها، $\vdash_c \; A \longleftrightarrow A^g$.

(ii) $\Gamma \vdash_c A$ اگر و فقط اگر $\Gamma^g \vdash_i A^g$، که $\Gamma^g = \{B^g : B \in \Gamma\}$.

اثبات. (i) معادل بودن A و A^g در منطق کلاسیک با استفاده از اصول و قواعد منطق کلاسیک و استقراء روی فرمول A ثابت می‌شود.

1. Intuitionistic Predicate Logic 2. Classical Predicate Logic 3. embedding 4. syntactic 5. G. Gentzen 6. K. Gödel 7. negative translation

(ii) قسمت «اگر» از (i) به دست می‌آید. برای «فقط اگر» استقراء را روی ارتفاع درخت استنتاج $\Gamma \vdash_c A$ در دستگاه استنتاج طبیعی[1] به‌کار برید. نگاه کنید، مثلاً به [۸]. □

۳.۳ تعریف. فرمول A را در زبان مرتبهٔ اول منفی[2] گویند اگر فرمولهای اتمی p که در A وجود دارند به‌صورت نفی باشند و A شامل $\vee$ یا $\exists$ نباشد.

۴.۳ نتیجه. برای فرمولهای منفی A، $CQC \vdash_c A$ اگر و فقط اگر $IQC \vdash_i A$.

اثبات. اگر $IQC \vdash_i A$ آنگاه بدیهی است که $CQC \vdash_c A$. برای طرف دیگر، از قضیهٔ ۳.۲ و اینکه برای هر فرمول A، $\neg\neg\neg A \longleftrightarrow \neg A$ $IQC \vdash_i$ استفاده کنید. ■

این نتیجه نشان می‌دهد که CQC به یک معنی مشمول در IQC است، زیرا هر فرمول CQC را می‌توان معادل با یک، فرمول منفی نوشت.

از نظر معناشناسی[3] نیز بین منطق شهودگرایی و منطق کلاسیک افتراق اساسی وجود دارد. برخلاف منطق کلاسیک که معناشناسی آن مبتنی بر جهانی ثابت از اشیاء است، جهان معناشناسی منطق شهودگرایی «متغیّر» است. این تغییر هم در اشیاء و هم در امور واقع اتفاق می‌افتد. ریاضیدان ایده‌آلی را تصور کنید (به اصطلاح براؤر، ذهن خالق[4]) که هم معرفت خود را طی زمان توسعه می‌دهد و هم جهان خویش از اشیاء را. جهان او از اشیاء توسعه می‌یابد زیرا اشیاء ساخته شده به منصهٔ «وجود» در می‌آیند و احکامی که او ثابت می‌کند به جرگهٔ «حقایق»، یعنی معرفت می‌پیوندند. معناشناسی‌های مختلفی برای بیان این جهان متغیر از اشیاء و معارف صورتبندی شده است. از میان آنها معنی‌شناسی بث[5]، کریپکی[6]، جبر هیتینگ[7]، مجموعه‌های با مقادیر جبر هیتینگ[8] و بالاخره، به معنی دقیق کلمه، کلّی‌ترین آنها، نظریهٔ توپوس[9] از بقیه معروفترند. از بین اینها، برای راحتی، فقط به شرح مختصر معناشناسی کریپکی می‌پردازیم.

معناشناسی کریپکی در سال ۱۹۶۵ به‌وسیله کریپکی ابداع شد. ریشه‌های این معناشناسی درکار قبلی کریپکی، «معناشناسی جهانهای ممکن» (۱۹۶۳) است که برای منطق موجهات[10] ارائه کرد. قبل از اینکه به تعریف صوری معناشناسی کریپکی بپردازیم، بحث غیرصوری دربارهٔ ذهن خالق را دنبال می‌کنیم. او در هر لحظهٔ k انبانی چون Σ_k از جملات دارد که به‌طریقی به صدق آنها پی برده و انبانی چون A_k از اشیاء که او ساخته (یا خلق کرده) است. چون در هر لحظهٔ k ریاضیدانِ ایده‌آل انتخابهای متنوعی برای فعالیتهای آیندهٔ خود دارد (توقف او در لحظهٔ k نیز یکی از این انتخابهاست)، مراحل فعالیّت او به‌طور جزئی مرتب است و ضرورتاً به‌طور خطی مرتب نیست. ریاضیدان ایده‌آل اداتهای منطقی را چگونه تعبیر می‌کند؟ واضح است که تعبیر یک حکم مرکب باید مبتنی بر تعبیر اجزاء آن باشد، مثلاً اگر او A را در لحظهٔ k به‌دست آورده یا (و) B را در لحظهٔ k به‌دست آورده، در این‌صورت $A \vee B$ (یا $A \wedge B$) را در لحظهٔ k به‌دست آورده است. حالت شرطی کمی مشکلتر است، زیرا ممکن است $A \to B$ در لحظهٔ k شناخته شده باشد بدون اینکه A یا B در لحظهٔ k شناخته شده باشند.

1. natural deduction 2. negative 3. semantics 4. creative subject 5. Beth 6. Kripke 7. Heyting algebra 8. complete heyting valued sets 9. topos theory 10. modal logic

واضح است که ریاضیدان ایده‌آل $A \to B$ را در لحظهٔ k می‌داند اگر در هر لحظهٔ آینده (شامل k) چنانچه A شناخته شده باشد، B نیز شناخته شده باشد. به‌طور مشابه او در لحظهٔ k، حکم $\forall x A(x)$ را می‌داند اگر در هر لحظهٔ آینده (شامل k) برای همهٔ اشیایی مثل a که در آن لحظه وجود دارند $A(\overline{a})$ را بداند. اینکه در حالت سور عمومی، باید آینده را نیز به‌حساب آورد بدین خاطر است که «برای همهٔ اعضاء» بیش از «برای همهٔ اعضایی که تاکنون ساخته‌ایم» را در برمی‌گیرد. از طرف دیگر، وجودْ به آینده ربط ندارد. ریاضیدان ایده‌آل در لحظهٔ k می‌داند که $\exists x A(x)$ اگر شئ a را ساخته باشد به‌طوری‌که در لحظهٔ k، $A(\overline{a})$ را ثابت کند.

حال به تعریف صوری مدلهای کریپکی می‌پردازیم. زبان مرتبهٔ اول $\mathcal{L}$ را فرض کنید.

۵.۳ تعریف. مدل کریپکی یک چهارتایی $\mathcal{K} = (K, \Sigma, C, D)$ است، که در آن K یک مجموعهٔ (غیر تهی) جزئی مرتب، C یک تابع که روی ثوابت $\mathcal{L}$ تعریف شده، D یک، تابع با مقادیر مجموعه که روی K تعریف شده، و Σ یک، تابع روی K است به‌طوری‌که:

۱. $C(c) \in D(k)$ به‌ازای همهٔ kها در K،

۲. $D(k) \neq \emptyset$ به‌ازای همهٔ kها در K،

۳. $\Sigma(k) \subseteq At_k$ به‌ازای همهٔ kها در K، که At_k مجموعهٔ همهٔ جملات اتمی $\mathcal{L}$ است با ثابتهایی برای اعضاء $D(k)$.

۴. D، Σ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(i) اگر $k \leq l$ آنگاه $D(k) \subseteq D(l)$،

(ii) $\bot \notin \Sigma(k)$ به‌ازای همه kها در K،

(iii) اگر $k \leq l$ آنگاه $\Sigma(k) \subseteq \Sigma(l)$.

$D(k)$ را دامنهٔ $\mathcal{K}$ در k و اعضای K را گرههای $\mathcal{K}$ گویند.

در واقع Σ به هر گره «احکام پایه» را نسبت می‌دهد که در k برقرارند. شرایط (i)، (ii) و (iii) فقط بیان می‌کنند که مجموعهٔ اشیاء موجود در طی زمان کاهش نمی‌یابند، تناقض هرگز اثبات نمی‌شود و احکام پایه همین‌که ثابت شدند، در مراحل بعدی صادق می‌مانند. ثوابت در همهٔ جهانها با عناصر واحد تعبیر می‌شوند. آنها دالهای ثابت[1] هستند. این مفهومی است که کریپکی برای معناشناسی اسامی خاص ابداع کرده است.

توجه کنید که D و Σ، در هر گره k یک، ساخت کلاسیک $\pi(k)$ را معین می‌کنند. جهان $\pi(k)$ عبارت است از $D(k)$ و روابط $\pi(k)$ به‌وسیلهٔ $\Sigma(k)$ به‌عنوان دیاگرام مثبت[2] داده می‌شود: $\langle \vec{a} \rangle \in R^{\pi(k)}$ اگر و فقط اگر $R(\vec{a}) \in \Sigma(k)$ شرایط (i) و (iii) می‌گوید که جهانها افزایشی هستند؛ اگر $k \leq l$ آنگاه $|\pi(k)| \subseteq |\pi(l)|$ و روابط نیز افزایشی هستند؛ اگر $k \leq l$ آنگاه $R^{\pi(k)} \subseteq R^{\pi(l)}$. به‌علاوه به‌ازای همهٔ kها و lها در K، $c^{\pi(k)} = c^{\pi(l)}$، برای هر ثابت c.

تابع Σ می‌گوید که چه اتمهایی در k «راست‌اند». می‌توان Σ را به مجموعهٔ همهٔ جملات $\mathcal{L}$ توسعه داد:

۶.۳ لم. Σ یک توسیع منحصر به فرد به تابعی روی K دارد (با همان علامت Σ) به‌طوری که $\Sigma(k) \subseteq \mathrm{Sent}_k$، مجموعهٔ همه جملات با پارامتر در $D(k)$ که در شرایط زیر صدق می‌کند:

1. rigid designators 2. positive diagram

(i) $A \vee B \in \Sigma(k)$ اگر و فقط اگر $A \in \Sigma(k)$ یا $B \in \Sigma(k)$؛
(ii) $A \wedge B \in (k)$ اگر و فقط اگر $A \in \Sigma(k)$ و $B \in \Sigma(k)$،
(iii) $A \to B \in \Sigma(k)$ اگر و فقط اگر برای هر $l \geq k$ اگر $A \in \Sigma(l)$ آنگاه $B \in \Sigma(l)$،
(iv) $\exists x A(x) \in \Sigma(k)$ اگر و فقط اگر وجود داشته باشد a در $D(k)$ به‌طوری‌که $A(\overline{a}) \in \Sigma(k)$،
(v) $\forall x A(x) \in \Sigma(k)$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر $l \geq k$ و هر a در $D(l)$، $A(\overline{a}) \in \Sigma(l)$.

اثبات. ساده است. ■

اگر $A \in \Sigma(k)$، می‌نویسیم $k \Vdash A$ و می‌خوانیم A در k راست است یا k، A را صادق می‌سازد[1].

۷.۳ تعریف. (i) $\mathcal{K} \Vdash A$ اگر برای هر k در $\mathcal{K}$، $k \Vdash A$. (ii) $\Vdash A$ اگر برای هر $\mathcal{K}$، $\mathcal{K} \Vdash A$. (iii) $\mathcal{K} \Vdash \Gamma$، که Γ مجموعه‌ای از جملات $\mathcal{L}$ است، اگر $\mathcal{K} \Vdash A$ برای هر A در Γ. (iv) $\Gamma \Vdash A$ اگر برای هر $\mathcal{K}$، اگر $\mathcal{K} \Vdash \Gamma$ آنگاه $\mathcal{K} \Vdash A$.

۸.۳ قضیهٔ (درستی و تمامیّت[2]) کریپکی. $\Gamma \vdash A$ اگر و فقط اگر $\Gamma \Vdash A$.

اثبات. رک مثلاً به [۸] یا [۳۰]. □

از قضیهٔ ۳.۷ علاوه بر کاربردهای معمول نظریهٔ مدلی، می‌توان در اثبات غیر معتبر بودن بعضی اصول و قواعد استنتاج در منطق شهودگرایی استفاده کرد. مدل سمت راست نشان می‌دهد که PEM در منطق شهودگرایی معتبر نیست و مدل سمت چپ نشان می‌دهد که اصل کلاسیک $\neg\forall x A(x) \to \exists x \neg A(x)$ نیز در منطق شهودگرایی معتبر نیست. (توجه کنید که بنابر $\neg A \equiv A \to \perp$، $k \Vdash \neg A$ اگر و فقط اگر برای هر $l \geq k$، $l \nVdash A$)

$k_0 < k_1, D(k_0) = \{0\}, D(k_1) = \{0, 1\}$ $\qquad$ $k_0 < k_1$

با استفاده از قضیهٔ ۳.۷ ثابت می‌شود که منطق شهودگرایی دارای دو خاصیت اساسی منطق ساختی است. این دو خاصیت در تعریف زیر می‌آیند:

۹.۳ تعریف. مجموعهٔ Γ از جملات را در نظر بگیرید. می‌گوییم Γ
(i) خاصیّت فصلی[3] (DP) دارد اگر $\Gamma \vdash A \vee B$ آنگاه $\Gamma \vdash A$ یا $\Gamma \vdash B$.
(ii) خاصیت وجودی[4] (EP) دارد اگر $\Gamma \vdash \exists x A(x)$ آنگاه $\Gamma \vdash A(t)$ برای ترم بسته‌ای مثل t در زبان $\mathcal{L}$.

دقت کنید که منطق کلاسیک خاصیت DP یا EP را ندارد. گرچه $\vdash_c P \vee \neg P$ اما $\nvdash_c P$ و $\nvdash_c \neg P$.

۱۰.۳ قضیه. منطق گزاره‌ای و منطق محمولات شهودگرایی، خاصیت DP را دارند.

اثبات. فرض کنید $\vdash A \vee B$ و $\nvdash A$ و $\nvdash B$. بنابر قضیهٔ ۳.۸، مدلهای $\mathcal{K}_1$ و $\mathcal{K}_2$ با ریشه‌های k_1 و k_2 وجود دارند به‌طوری که $k_1 \nVdash A$ و $k_2 \nVdash B$. بدون کاستن از کلیّت، فرض کنید $\mathcal{K}_1$ و $\mathcal{K}_2$ مجزا هستند. مدل جدید $\mathcal{K}$ را با $K = K_1 \cup K_2 \cup \{k_0\}$ که $k_0 \notin K_1 \cup K_2$ به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$\pi(k) = \begin{cases} \pi_1(k) & \text{برای } k \text{ در } K_1 \\ \pi_2(k) & \text{برای } k \text{ در } K_2 \\ |\pi| & \text{برای } k = k_0 \end{cases}$$

که $|\pi|$ شامل همهٔ ثوابت در $\mathcal{L}$ است، اگر ثابتی موجود باشد؛ در غیر این‌صورت $|\pi|$ را فقط شامل یک عنصر اختیاری a بگیرید. با کمی کار اضافه به‌راحتی دیده می‌شود که $\mathcal{K}$ یک مدل کریپکی است، و داریم $k_0 \nVdash A \vee B$. این خلاف $\vdash A \vee B$ و قضیهٔ ۳.۸ است. ■

۱۱.۳ قضیه. فرض کنید زبان منطق شهودگرایی شامل حداقل یک ثابت باشد. در این صورت EP برقرار است.

اثبات. فرض کنید $\vdash \exists x A(x)$ و برای همهٔ ثوابت c، $\nvdash A(c)$. بنابر قضیهٔ ۳.۸، برای هر ثابت c، مدل کریپکی $\mathcal{K}_c$ با ریشهٔ k_c موجود است به‌طوری که $k_c \nVdash A(c)$. حال برهان قضیهٔ ۳.۹ را تکرار کنید. گره جدید k_0 را در انتهای همهٔ مدلهای $\mathcal{K}_c$ قرار دهید. در این صورت $k_0 \nVdash \exists x A(x)$ و این خلاف $\vdash \exists x A(x)$ است. ■

۴. حساب شهودگرایی

حساب شهودگرایی را هیتینگ در [۱۴] و [۱۵] پایه گذاشت. اصول موضوع غیرمنطقی حساب شهودگرایی همان اصول پئانو است. اختلاف حساب پئانو (که از این به بعد با PA نشان داده می‌شود) و حساب شهودگرایی (که از این به بعد با HA، اشاره به نام هیتینگ، نشان داده می‌شود) در این است که PA مبتنی بر منطق کلاسیک و HA مبتنی بر منطق شهودگرایی است. در این بخش به بعضی خواص HA اشاره می‌کنیم و به‌ویژه خواهیم دید علی‌رغم اینکه HA حسابی ضعیف‌تر از PA است، ردهٔ وسیعی از فرمولهای حساب که از صورت نحوی خاصی برخوردار باشند و در PA قابل اثبات باشند، در HA نیز قابل اثبات‌اند.

فرمول A را در زبان حساب، یعنی $\mathcal{L} = \{+, \cdot, <, 0\}$، باز می‌گوییم اگر هیچ سوری در آن نباشد. حال قضیه مقدماتی زیر را داریم

۱.۴ قضیه. برای هر فرمول باز A، $\mathrm{HA} \vdash A \vee \neg A$ و $\mathrm{HA} \vdash \neg\neg A \to A$

اثبات. ابتدا با به‌کار بردن اصل استقراء نشان دهید که $\mathrm{HA} \vdash x = y \vee x \neq y$، که در آن $x \neq y \equiv \neg x = y$. آنگاه با استقراء روی فرمول A حکم را ثابت کنید. ■

توافق PA و HA بیش از اینهاست:

۲.۴ قضیه. فرض کنید g ترجمهٔ گنتسن-گودل باشد که در ۱.۳ تعریف شد، با این تفاوت که برای جملات اتمی قرار دهید: $(t = s)^g \equiv t = s$. آنگاه
(i) $\mathrm{PA} \vdash A \leftrightarrow A^g$، $\mathrm{PA} \vdash A$ اگر و فقط اگر $\mathrm{HA} \vdash A^g$.
(ii) برای A که شامل $\vee$ یا $\exists$ نباشد، $\mathrm{PA} \vdash A$ اگر و فقط اگر $\mathrm{HA} \vdash A$.

---
1. k forces A 2. soundness and completeness 3. disjunction property 4. existence property

اثبات. توجیه تغییر تعریف g برای جملات اتمی $t = s$ به این است که بنابر قضیهٔ ۱.۴، $\mathrm{HA} \vdash \neg\neg(t = s) \rightarrow t = s$. (i) از قضیهٔ ۲.۳ و این واقعیت که برای هر یک از اصول موضوع ریاضی PA، مثل A، A^g در HA برقرار است، به‌دست می‌آید. (ii) از تعریف g بلاواسطه نتیجه می‌شود. □

بخش دوم قضیهٔ فوق توضیح می‌دهد که چرا تعداد معتنابهی از قضایای قابل اثبات در PA، بدون هیچ‌گونه مشکلی در HA نیز قابل اثبات‌اند. اکثر قضایای معروف و مهم در نظریهٔ مقدماتی اعداد برحسب جملات فارغ از $\exists$ قابل بیان‌اند؛ در واقع می‌توان آنها را با سور عمومی نوشت.

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که HA ردهٔ بزرگتری از فرمولهایی را که در قضیهٔ ۲.۴ بیان شد اثبات می‌کند.

۳.۴ قضیه. اگر $\mathrm{PA} \vdash \forall x\exists y A(x,y)$ آنگاه $\mathrm{HA} \vdash \forall x\exists y A(x,y)$، برای فرمولهای باز $A(x,y)$.

اثبات. [۳۰] را ببینید. ■

اصل کوچکترین عدد[1] مثال جالب توجهی است از یک حکم که در PA برقرار است ولی در HA برقرار نیست. در PA می‌توان نشان داد که N، مجموعهٔ اعداد طبیعی، نسبت به محمولات حسابی خوش‌ترتیب است. این خاصیت را که اصل کوچکترینِ عدد نامیده می‌شود، می‌توان به‌صورت زیر فرمولبندی کرد:

$$LNP : \exists x A(x) \rightarrow \exists x[A(x) \wedge \forall y < x \neg A(y)]$$

از نظر ریاضیات کلاسیک این اصل معادل اصل استقراء ریاضی است. از نظر شهودگرایی، از LNP اصل طرد شق ثالث نتیجه می‌شود. بنابراین LNP در HA برقرار نیست. فرض کنید

$$A(x) \equiv (x = ۰ \wedge P) \vee (x = ۱ \wedge \neg P) \vee x = ۲$$

$\exists x A(x)$ بدیهی است. حال فرض کنید یک کوچکترین y موجود باشد به‌طوری که $A(y)$. آنگاه $y \in \{۰, ۱, ۲\}$. از $y = ۲$ نتیجه می‌شود که $\neg A(۰) \wedge \neg A(۱)$، پس $\neg(۰ = ۰ \wedge P) \wedge \neg(۱ = ۱ \wedge \neg P)$، یعنی $\neg\neg P \wedge \neg P$ که متناقض است. اگر $y = ۰$، آنگاه P و اگر $y = ۱$ آنگاه $\neg P$. بنابراین $P \vee \neg P$.

۵. آنالیز شهودگرایی

آنالیز شهودگرایی نسبت به بقیهٔ ریاضیاتِ ساختی توسعه‌یافته‌تر است. دلیل عمدهٔ آن، نقش براؤر بوده است. براؤر در وهلهٔ اول یک توپولوژیدان بود و دامشغولی همیشگی‌اش مسألهٔ پیوستار بود. توسعهٔ بیشتر آنالیز نسبت به بقیهٔ شاخه‌ها حتی در مکاتب دیگرِ ریاضیاتِ ساختی نیز مشهود است. در مکتب ریاضیات ساختی بیشاپ نیز به‌دلیل اینکه بیشاپ خودْ آنالیزدان بود، مدتها این برتری ادامه یافت. در ریاضیات ساختیِ بازگشتی نیز به‌دلیل علائق مارکوف و شاگردانش مثل کوشنر[2] و شانین[3]، آنالیز ریاضی توسعه یافته‌تر از مثلاً جبر ساختی بازگشتی است.

آنالیز شهودگرایی را می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد. مرحله‌ای که در آن آنالیز مبتنی بر ساختمان اعداد حقیقی باشد که یک عدد حقیقی، وجود فردی دارد. این مفهوم، درکار بیشاپ متجلّی شده و درکارهای ابتدایی براؤر نیز به

1. Least Number Principle 2. B.A. Kushner 3. N.A. Shanin

همین‌گونه بوده است. این مفهوم از پیوستار براؤر را راضی نکرده است و به‌همین دلیل در مرحلهٔ بعد اصول دیگری، که براؤر معتقد بود برای ساختمان پیوستار لازم‌اند، به آنالیز اضافه شد. وان دالن معتقد است که این اصول، به‌ویژه اصل دنباله‌های انتخاب، به‌صورت ضمنی درکارهای ابتدایی براؤر آمده است [۷].

ما ابتدا به ساختمان اعداد حقیقی و بعضی خواص ابتدایی توابع اشاره می‌کنیم و سپس به بیان اصول اساسی شهودگرایی و تأثیر آن بر آنالیز ریاضی می‌پردازیم.

۱.۵ اعداد حقیقی. روش معرفی اعداد حقیقی **به‌وسیلهٔ** دنباله‌های بنیادی[1] را **برمی‌گزینیم**. برای نشان دادن اعداد طبیعی از حروف m، n، e، ... و برای اعداد گویا از حروف r، s، t، ... و برای توابع از N به N از حروف α، β، γ، ... استفاده می‌کنیم.

۱.۱.۵ تعریف. دنبالهٔ بنیادی، دنبالهٔ $\langle r_n\rangle_n$ از اعداد گویا با **مدول همگرایی**[2] (یا کوشی[3]) β است به‌طوری‌که

$$(\forall k, m, m'(|r_{\beta(k+m)} - r_{\beta(k+m')}| < ۲^{-k})$$

دو دنبالهٔ بنیادی $\langle r_n\rangle_n$ و $\langle s_n\rangle_n$ را هم‌ارز گویند اگر $\forall k\exists n\forall m(|r_{n+m} - s_{n+m}| < ۲^{-k})$. مجموعهٔ اعداد حقیقی (کوشی) $\mathbb{R}$ عبارت است از رده‌های هم‌ارزی دنباله‌های بنیادی تحت رابطهٔ هم‌ارزی.

به‌طریق معمول می‌توانیم اعمال جمع، ضرب، ... و روابط بین اعداد حقیقی را تعریف کنیم. مثلاً

$$\langle s_n\rangle_n + \langle t_n\rangle_n \equiv \langle s_n + t_n\rangle_n$$

$$\langle s_n\rangle_n . \langle t_n\rangle_n \equiv \langle s_n . t_n\rangle_n$$

$$|\langle s_n\rangle_n| \equiv \langle |s_n|\rangle_n$$

$$\langle s_n >_n \; < \langle t_n\rangle_n \equiv \exists k\exists n\forall m(t_{n+m} - s_{n+m} > ۲^{-k})$$

به‌ازای x و y در $\mathbb{R}$، $x < y$ اگر و فقط اگر $\langle s_n\rangle_n \in x$ و $\langle t_n\rangle_n \in y$ موجود باشند به‌طوری‌که $\langle s_n\rangle_n < \langle t_n\rangle_n$.

در $\mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $x \leq y \equiv \neg(y < x)$ و $x\#y \equiv (x<y)\vee(y<x)$ (می‌خوانیم x از y جدا[4]ست). توجه‌کنید که $x \leq y$ به معنای $x < y \vee x = y$ نیست! قبلاً اشاره شد (در ۱.۴.۲) که تساوی بین اعداد حقیقی تصمیم‌پذیر نیست، یعنی رابطه $\forall xy(x < y \;\vee x = y \;\vee y < x)$ در $\mathbb{R}$ برقرار نیست. درگزارهٔ زیر خواص مقدماتی $\mathbb{R}$ بیان می‌شود.

۲.۱.۵ گزاره. (۱) فرض کنید $\langle r_n\rangle_n \in x$ و $\langle s_n\rangle_n \in y$ و $x, y \in \mathbb{R}$. در این‌صورت

(۱) $x\#y \leftrightarrow \exists kn\forall m(|s_{n+m} - r_{n+m}| > ۲^{-k})$

(۲) $\neg x\#y \leftrightarrow x = y$

(۳) $x\#y \leftrightarrow y\#x$

(۴) $x\#y \rightarrow \forall z(z\#x \vee z\#y)$

(۵) $\neg\neg x = y \rightarrow x = y$

(۶) $x < y \rightarrow x < z \vee z < y$

اثبات. ساده است. ■

1. fundamental sequences 2. modulus of convergence
3. Cauchy 4. apart

از بین خواص مطرح‌شده در گزارهٔ فوق، خواص (۵) و (۶) قابل توجه‌اند. خاصیت (۵) را خاصیت پایداری اعداد حقیقی گویند. خاصیت (۶) رویکرد ساختی رابطهٔ تثلیث است.

۳.۱.۵ تعریف. (۱) هر دنباله از اعداد حقیقی با دنبالهٔ دوگانه مولدهای اعداد حقیقی $\langle\langle s_{m,n}\rangle_n\rangle_m$ و یک تابع α مشخص می‌شود که به‌ازای هر m، $\alpha(m,-)$ یک مدول برای $\langle s_{m,n}\rangle_n$ است.

(۲) دنبالهٔ $\langle x_m\rangle_m$ از اعداد حقیقی را یک دنبالهٔ کوشی گویند اگر مدول β موجود باشد به‌طوری‌که $\forall km(|x_{\beta(k)} - x_{\beta(k+m)}| < 2^{-k})$.

(۳) دنبالهٔ $\langle x_n\rangle_n$ دارای حد x است اگر مدول α موجود باشد به‌طوری‌که

$$\forall km(|x - x_{\alpha(k+m)}| < 2^{-k})$$

۴.۱.۵ قضیه. (کامل بودن $\mathbb{R}$). هر دنبالهٔ کوشی از اعداد حقیقی دارای یک حد است.

اثبات. فرض کنید $\langle x_n\rangle_n$ یک دنبالهٔ کوشی از اعداد حقیقی باشد و به‌ازای هر n داشته باشیم $x_n = \langle s_{n,m}\rangle_m$. آنگاه $\alpha(n,-)$ یک مدول برای $\langle s_{n,m}\rangle_m$ است. فرض کنید β یک مدول برای $\langle x_n\rangle_n$ باشد. بنابراین

$$\forall k,n,m(|s_{n,\alpha(n,k)} - s_{n,\alpha(n,k)+m}| < 2^{-k})$$

$$\forall k,m(|x_{\beta(k)} - x_{\beta(k+m)}| < 2^{-k})$$

در نتیجه به‌راحتی نتیجه می‌شود که $\langle s_{\beta(n),\alpha(\beta(n),\beta(n+1))}\rangle_n$ یک مولد عدد حقیقی است. حال فرض کنید x عدد حقیقی متناظر با آن باشد. در این صورت $\langle x_n\rangle_n$ با مدول $\beta(n+1)$ به x میل می‌کند.■

یکی از خواص اعداد حقیقی در ریاضیات کلاسیک این است که هر دنبالهٔ کراندار یکنوا از اعداد حقیقی دارای حد است. این نتیجه‌ای از قضیه بولتسانو-وایراشتراس[1] است. از نظر ریاضیات ساختی این حکم غلط است.

فرض کنید $\alpha : \mathbf{N}\to\mathbf{N}$ و دنبالهٔ $\langle r_n\rangle_n$ وابسته به α را در اعداد گویا به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$r_n = \begin{cases} 1 - 2^{-n} & \text{اگر } \neg\exists k \le n\ (\alpha(k) = 0) \\ 2 - 2^{-n} & \text{اگر } \exists k \le n\ (\alpha(k) = 0) \end{cases}$$

فرض کنید $\langle r_n\rangle_n$ دارای حد x در $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه $2 > x$ یا $x > 1$. در نتیجه برای هر α، $\exists k(\alpha(k) = 0) \vee \neg\exists k(\alpha < k) = 0)$. بیشاپ این اصل را «اصل همه‌دانی محدود»[2]، PLO نامیده است. در واقع بخش وسیعی از قضایای ریاضیات کلاسیک مستلزم PEM، یا به اصطلاح بیشاپ، «اصل همه‌دانی»[3] نیست، بلکه اصل همه‌دانی محدود برای آنها کافی است.

قضیهٔ مقدار میانی نیز در ریاضیات ساختی برقرار نیست. به مثال زیر نگاه کنید.

فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد که نمی‌دانیم $a \ge 0$ یا $a \le 0$. تابع پیوستهٔ یکنواخت $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید: $f(x) = \min(x-1, 0) + \max(0, x-2)$ و فرض کنید $f^*(x) = f(x) + a$.

1. Bolzano-Weierstrass 2. Principle of Limited Omniscience

3. Principle of Omniscience

حال اگر به‌ازای xای در $[3, 0]$، $f^*(x) = 0$ آنگاه می‌دانیم که $x > 1$ یا $x < 2$. بنابراین می‌دانیم که $a \ge 0$ یا $a \le 0$. پس نمی‌توانیم xی پیدا کنیم که $f^*(x) = 0$.

اما صورت زیر از قضیهٔ مقدار میانی قابل اثبات است:

۵.۱.۵ قضیهٔ (مقدار میانی). فرض کنید $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد، $a < b$ و $f(a) \le c \le f(b)$. آنگاه $\forall k\exists x\in[a,b](|f(x) - c| < 2^{-k})$.

اثبات. رک. [۳۰].■

در همین راستا می‌توان مشتق، انتگرال و دیگر مفاهیم آنالیز را تعریف کرد و خواص ساختی آنها را به‌دست آورد. درکتاب معروف بیشاپ [۱]، این برنامه کلاً تحقق یافته است.

۲.۵ اصول آنالیز شهودگرایی. صورت کلی اصل انتخاب از نظر ریاضیات ساختی پذیرفتنی نیست. اصل انتخاب عبارت است از:

> اگر S زیرمجموعه‌ای از $A \times B$ باشد و به‌ازای هر x در A، yای در B موجود باشد که $(x,y) \in S$، آنگاه تابع $f : A \to B$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر x در A، $(x, f(x)) \in S$.

گودمن و می‌هیل در [۱۱] نشان دادند که اصل انتخاب، PEM را نتیجه می‌دهد، بنابراین حتی در ریاضیات ساختی بیشاپ نیز قابل قبول نیست. استدلال آنها برای اثبات $P \vee \neg P$ بسیار ساده است. فرض کنید $A = \{s,t\}$، که $s = t$ اگر و فقط اگر P و فرض کنید $B = \{0, 1\}$ و $S = \{(s,0), (t,1)\} \subseteq A \times B$. اگر تابع $f : A \to B$ برای S موجود باشد، آنگاه یا

(i) $f(s) = 1$ یا $f(t) = 0$، در نتیجه $s = t$ و بنابراین P، یا

(ii) $f(s) = 0$ و $f(t) = 1$ و در نتیجه $\neg(s = t)$ و بنابراین $\neg P$.

صورتی از اصل انتخاب که بسیار مورد استفادهٔ ساختگرایان قرار می‌گیرد، اصل انتخاب شمارا خوانده می‌شود و آن حالتی است که $A = \mathbf{N}$:

$$AC-\mathbf{N} \quad \forall n \in \mathbf{N}\exists b \in B A(n,b)$$
$$\to \exists f \in \mathbf{N} \to B\ \forall n\ A(n, f(n))$$

این صورت از اصل انتخاب را به‌صورت غیررسمی می‌توان این‌طور توجیه کرد که هر برهان برای مقدم، روشی را به‌دست می‌دهد که به‌ازای هر n در $\mathbf{N}$ یک b در B می‌توان یافت که $A(n,b)$. چنین روشی چیزی جز توصیف یک تابع نیست که b را به n نسبت می‌دهد.

تعبیر شهودگرایانهٔ «دنباله» منجر به اصولی شده است که اساساً ریاضیات شهودگرایی را از دیگر انواع ریاضیات ساختی جدا کرده است. دنباله در ریاضیات ساختی بیشاپ یا ریاضیات ساختی بازگشتی به‌وسیلهٔ قاعده‌ای داده می‌شود که از قبل، نحوهٔ تعیین هر جزء دنباله را به‌دست می‌دهد. چنین دنباله‌ای را شبه قانون[1] می‌گویند. براور این مفهوم از دنباله را به‌گونه‌ای تعمیم داد که شامل دنباله‌هایی می‌شود که اجزاء دنباله بتوانند آزادانه انتخاب شوند، یا فقط تحت محدودیتهای قبلی ساخته شوند. این دنباله‌ها را دنباله‌های انتخاب می‌گویند. بنابراین برای فرد شهودگرا، لازم نیست که عدد حقیقی $\langle x_n\rangle_n$ به‌وسیلهٔ قاعده‌ای داده شود، بلکه اجزاء آن x_1، x_2، ... اعداد گویا هستند که

1. lawlike

متوالیاً ساخته شده‌اند، و فقط محدودند به شرط $|x_m - x_n| \le m^{-1} + n^{-1}$ (m و n اعداد طبیعی مثبت هستند).

حال فرض کنید که P زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ باشد و فرض کنید به‌ازای هر α در $\mathbb{N}^\mathbb{N}$، $n \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که $(\alpha, n) \in P$. از نظر ساختی این بدان معناست که روشی موجود است که با اعمال آن بر دنباله‌ها، به‌ازای هر αی داده شده، n محاسبه می‌شود. مطابق نظر براوئر، هر عضو $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ همیشه ناکامل است؛ یعنی دنبالهٔ α کاملاً مصداقی است، بدین معنا که در هر لحظه ما چیزی جز تعدادی متناهی از اجزاء آن نمی‌دانیم. بنابراین با روش ذکر شده در فوق، باید بتوان به‌ازای هر دنبالهٔ α، از تعداد متناهی اجزاء آن (با علامت $\overline{\alpha}(m)$ که $\overline{\alpha}(m) = \langle \alpha(0), \cdots, \alpha(m-1) \rangle$)، عدد طبیعی n را محاسبه کرد که $(\alpha, n) \in P$. حال فرض کنید β دنبالهٔ دیگری باشد که $\overline{\alpha}(m) = \overline{\beta}(m)$. پس روش ما همان مقدار n را برای β محاسبه می‌کند که برای α محاسبه کرد. بنابراین، با این روش یک تابع پیوسته $f : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تعریف می‌شود به‌طوری‌که به‌ازای هر α در $\mathbb{N}^\mathbb{N}$، $(\alpha, f(\alpha)) \in P$. با این تحلیل به اصل انتخاب پیوسته می‌رسیم که آن را در دو بخش پیوستگی و انتخاب بیان می‌کنیم:

(۱) هر تابع از $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ پیوسته است. (CC)

(۲) اگر $P \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ و به‌ازای هر α در $\mathbb{N}^\mathbb{N}$، $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که $(\alpha, n) \in P$، آنگاه تابع $f : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری که برای هر n در $\mathbb{N}$، $(\alpha, f(\alpha)) \in P$.

CC با PLO ناسازگار است، و همین‌طور با تز چرچ نیز ناسازگار است ([۲] را نگاه کنید).

از نتایج شگفت‌انگیز CC قضیه معروف براوئر است. برای اثبات قضیه، ابتدا با استفاده از مقدمات توپولوژی روی درختهایی که از دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی ساخته شده‌اند، گزارهٔ زیر را ثابت می‌کنیم:

۱.۲.۵ گزاره. فرض کنید $\{X_n : n \in I\}$ با $I \subseteq \mathbb{N}$، یک پوشش[1] برای $\mathbb{R}$ باشد. آنگاه $\{Int(X_n) : n \in I\}$ نیز یک پوشش برای $\mathbb{R}$ است (و به‌طور مشابه برای هر بازهٔ بسته در $\mathbb{R}$).

اثبات. رک. [۳۰]. ■

توجه داشته باشید که $Int(x)$ برای نمایش درون[2] x نسبت به توپولوژی یاد شده است.

۲.۲.۵ قضیهٔ (براوئر). همهٔ توابع $f : X \to \mathbb{R}$، X یک بازهٔ بسته، پیوسته‌اند.

اثبات. $k \in \mathbb{N}$ را ثابت بگیرید و فرض کنید $\langle r_n \rangle_n$ یک فهرست ثابت از اعضاء $\mathbb{Q}$، مجموعهٔ اعداد گویا، باشد. فرض کنید $X_n = \{x : |f(x) - r_n| < 2^{-k}\}$. در این صورت $\langle X_n \rangle_n$ یک پوشش X است. بنابر گزارهٔ ۱.۲.۵، $\langle Int(X_n) \rangle_n$ یک پوشش X است. یعنی $\forall x \in X \exists m \forall y \in U(2^{-m}, x) \cap X(|f(y) - r_n| < 2^{-k})$. بنابراین $\forall x \in X \exists m \forall y \in X(|x-y| < 2^{-m} \to |f(x) - f(y)| < 2^{-k+1})$. ■

می‌دانیم که در ریاضیات کلاسیک، با استفاده از فشردگی بازهٔ بسته در $\mathbb{R}$، می‌توان ثابت کرد که هر تابع پیوستهٔ $f : X \to \mathbb{R}$، X یک بازهٔ بسته، به‌طور یکنواخت نیز پیوسته است. در آنالیز شهودگرایی نیز این قضیه درست است، اما تأمین فشردگی هر بازهٔ بسته در $\mathbb{R}$ مستلزم قبول یکی از اصول مهم

1. cover 2. interior

آنالیز براوئری است. این اصل که به‌نام اصل بادبزن[1] معروف است صورت ساختی قضیهٔ کونیگ (مثال ۳.۲) تلقی می‌شود. در واقع اصل بادبزن و قضیهٔ کونیگ در ریاضیات کلاسیک معادل یکدیگرند. اصل نقیض قضیهٔ کونیگ، اصل بادبزن است. فرض کنید T یک درخت باشد (که گره‌های آن از دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی ساخته شده‌اند) که از هر گره آن تعداد متناهی شاخه می‌گذرد. این نوع درختها را بادبزن می‌گویند. اصل بادبزن می‌گوید که اگر T یک بادبزن باشد، و برای هر شاخهٔ نامتناهی α در T، قطعهٔ ابتدایی $\overline{\alpha}(x)$ موجود باشد که در یک خاصیت تصمیم‌پذیر A صدق کند، آنگاه یک کران بالای یکنواخت برای این xها موجود است. اصل بادبزن، برای یک بادبزن T، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$FAN : \forall n(A(n) \vee \neg A(n)) \wedge \forall \alpha \exists x A(\overline{\alpha}(x)) \to \exists z \forall \alpha \exists y \le z A(\overline{\alpha}(y))$$

از اصل بادبزن، به‌راحتی فشردگی بازهٔ بسته در $\mathbb{R}$ نتیجه می‌شود. بنابراین:

۳.۲.۵ قضیه $(CC + FAN)$. هر تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت پیوسته است.

اثبات. قضیهٔ ۲.۲.۵ و اصل FAN را به‌کار ببرید. ■

در واقع براوئر اصل بادبزن را به‌صورت اصل بیان نکرد، بلکه سعی کرد تا آن‌را به‌طور ساختی اثبات کند. برهان ساختی او از «قضیهٔ» بادبزن مبتنی بر نوعی استقراء به نام استقراء مانع است.

درخت T از دنباله‌های متناهی اعداد طبیعی را به‌یاد آورید. می‌گوییم مجموعهٔ P از دنباله‌های متناهی یک مانع است اگر $\forall\alpha\exists x(\overline{\alpha}(x) \in P)$. به‌طورکلیتر می‌گوییم دنبالهٔ متناهی $\langle n_0, n_1, \cdots, n_i \rangle$ از اعداد طبیعی (که بنابر تناظر یک به یک بین اعداد طبیعی و دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی، می‌توانیم بگوییم عدد n) به‌وسیلهٔ P مانع شده است اگر و فقط اگر برای هر شاخهٔ α که شامل n باشد، با علامت $n \in \alpha$، xای وجود داشته باشد که $\overline{\alpha}(x) \in P$. فرض کنید برای دنباله‌های متناهی n و m، که $n = \langle n_0, n_1, \cdots, n_i \rangle$ و $m = \langle m_0, m_1, \cdots, m_j \rangle$، الصاق[2] m و n، با علامت $m * n$ عبارت باشد از دنبالهٔ $\langle m_0, m_1, \cdots, m_j, n_0, n_1, \cdots, n_j \rangle$. آنگاه اصل استقراء مانع به‌صورت زیر است:

$$(BI)\ \forall\alpha\exists x P(\overline{\alpha}(x)) \wedge \forall nm(P(n) \to P(n*m)) \wedge \forall n(\forall y P(n*<y>) \to P(n)) \to P(<\ >)$$

آخرین اصل شهودگرایی براوئر که در این بخش به بررسی آن می‌پردازیم مربوط به مفهوم مناقشه‌انگیز ذهن خالق است: براوئر با تمسک به مفهوم ذهن خالق یک مثال ناقض برای اصل مارکوف ساخت. این اصل که مارکوف آن را در ۱۹۵۴ بیان کرد، یکی از اصول ساختگرایی بازگشتی است:

$$(MP) \quad \forall x(A(x) \vee \neg A(x)) \wedge \neg\neg\exists x A(x) \to \exists x A(x)$$

یا به‌صورت متغیرهای تابع $\neg\neg\exists x(\alpha(x) = 0) \to \exists x(\alpha(x) = 0)$، که α تابع الگوریتمی (بازگشتی) است و A نیز محمولی است که به‌طور

1. Fan axiom 2. concatenation

الگوریتمی تصمیم‌پذیر است. برای اینکه درک شهودی بهتری از اصل مارکوف داشته باشید، توجه به این گزاره سودمند است که اصل مارکوف معادل $\forall x \in \mathbb{R}(x \neq 0 \to x\#0)$ است که $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی (رک. ۱.۵) است.

براوئر معتقد بود که اصل مارکوف از نظر شهودگرایی درست نیست. به‌منظور ساختن مثال ناقض براوئر برای اصل مارکوف، ابتدا خواص ذهن خالق یا ریاضیدان ایده‌آل، IM، را بیان می‌کنیم. مراحل فعالیت IM در زمان گسسته است. علامت «$\Box_n A$» بدین معنی است که IM در مرحلهٔ nام از فعالیت ریاضی خویش شواهد کافی برای A دارد.

فرض شده است که IM در هر مرحله می‌داند که به‌قدر کافی شواهد برای A دارد یا نه؛ بنابراین

(IM_1) $\quad \Box_n A \vee \neg(\Box_n A)$

(IM_2) $\quad$ شواهد افزایشی هستند، یعنی $\Box_m A \wedge n > m \to \Box_n A$

(IM_3) $\quad A \longleftrightarrow \exists n(\Box_n A)$

سومین فرض این است که راست بودن فقط وقتی برای IM وجود دارد که در زمانی از فعالیت ریاضی خویش به کشف راستی آن دست یابد.

حال فرض کنید $X \subseteq \mathbb{N}$ و تابع $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$\alpha(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } \Box_m(n \in X) \\ 1 & \text{اگر } \neg\Box_m(n \in X) \end{cases}$$

آنگاه $n \in X \longleftrightarrow \exists m(\Box_m(n \in X)) \longleftrightarrow \exists m\alpha(n,m) = 0$.

در واقع α یک تابع مشخصه برای X است و هم‌ارزی فوق از نظر ریاضیات کلاسیک امری بدیهی است. حال نظریهٔ ذهن خالق را می‌توان به‌شکل زیر صورت‌بندی کرد که به اصل کریپکی[1] معروف است:

$$(KS) \quad \forall X\exists\alpha\forall n[n \in X \longleftrightarrow \exists m\alpha(n,m) = 0]$$

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که اصل مارکوف (صورت معادل آن $(\forall x \in \mathbb{R}(x \neq 0 \to x\#0)$) در شهودگرایی براوئر پذیرفتنی نیست:

۴.۲.۵ قضیه. $KS + MP \Rightarrow PEM$

اثبات. فرض کنید A یک گزاره باشد. دنبالهٔ $\langle x_n\rangle_n$ از اعداد گویا را به‌صورت زیر می‌سازیم:

اگر در مرحلهٔ n، IM نه برهانی برای A دارد و نه برهانی برای $\neg A$، می‌گیریم $x_n = 0$. اگر از مرحلهٔ $n-1$ به مرحلهٔ n، IM برهانی برای A به‌دست آورد، به‌ازای هر m بزرگتر یا مساوی n، می‌گیریم $x_m = 2^{-n}$، و اگر از مرحلهٔ $n-1$ به مرحلهٔ n، IM برهانی برای $\neg A$ به‌دست آورد، به‌ازای هر m بزرگتر یا مساوی n می‌گیریم $x_m = -2^{-n}$.

$\langle x_n\rangle_n$ یک دنبالهٔ بنیادی است و به عدد حقیقی x میل می‌کند. اگر می‌توانستیم ثابت کنیم که $x = 0$، آنگاه نشان می‌دادیم که IM نمی‌تواند A را ثابت کند و نمی‌تواند $\neg A$ را ثابت کند. بنابراین $\neg A$ و $\neg\neg A$ را ثابت می‌کند، که غیرممکن است، پس $x \neq 0$. بنابر اصل مارکوف $x\#0$. این بدین معنی است که $A \vee \neg A$. ■

1. Kripke Schema

مفهوم ذهن خالق براوئر همان‌طورکه قبلاً اشاره شد، از مفاهیم مناقشه‌برانگیز شهودگرایی اوست. بحث نسبتاً جامعی از این موضوع، به‌ویژه جنبه‌های فلسفی آن در [۳۰] آمده که خواندنی است. بررسی مدل ریاضی ذهن خالق در [۶] آمده است.

۶. جبر شهودگرایی

مطالعهٔ ساختارهای جبری در چارچوب شهودگرایی با کار هیتینگ، در [۱۶] آغاز شد. او مفاهیم آشنا مثل گروهها، حلقه‌ها، حوزه‌های صحیح، میدانها [هیأتها]، حلقه‌های چندجمله‌ای و غیره را صورت‌بندی کرد. اختلاف اساسی جبر شهودگرایی با سنّت کرونکری در این است که ساختارهای جبری از دید کرونکر گسسته[1]اند، بدین معنا که تساوی اشیاء تصمیم‌پذیر است، در حالی‌که ساختارهای شهودگرایی مجهز به نوعی مفهوم جدایی[2] هستند و بنابراین ساختارهای پیوسته را نیز دربر می‌گیرند. بدین معنا می‌توان گفت که جبر شهودگرایی مبتنی بر ایده‌های براوئر از «رابطه»، «ترتیب»، ... استوار است. براوئر غیر از مفاهیم مقدماتی «ترتیب»، ... در قلمرو جبر، تا آنجا که نویسنده مقاله اطلاع دارد، اثبات ساختی قضیهٔ اساسی جبر را اولین‌بار در [۵] ارائه نمود. اسکات[3] در [۲۶] مفهوم پاد زیرساختارها[4] را که در کارهای هیتینگ به‌طور ضمنی وجود داشت، صریحاً بیان کرد. پیشنهاد مفهوم پادزیرساختارهای جبری از دیدگاه شهودگرایی تا حدودی طبیعی است، ولی رویتنبرگ[5] در [۲۵] معتقد است که این مفهوم در مطالعه نظریهٔ گالوا ضروری نیز هست.

در این بخش به بعضی تعاریف پادزیرساختارها نگاه می‌کنیم و طبیعی بودن آنها را از نظرگاه شهودی ملاحظه می‌کنیم.

قبل از اینکه به مثالهای پادزیرساختارها بپردازیم، رابطهٔ جدایی را یادآوری می‌کنیم (بخش ۱.۵ را نگاه کنید). هر مجموعه با رابطهٔ تصمیم‌پذیر تساوی، مجهز به یک رابطهٔ جدایی است، مثل $x \neq y$. اما همان‌طورکه در بخش ۱.۵ دیده‌ایم، رابطهٔ تساوی و جدایی همیشه بدین سادگی نیست. تعریف گروه، معمولی است:

۱.۶ تعریف. گروه، یک ساختار $(A, \circ, ^{-1}, e)$ است که در اصول زیر صدق می‌کند:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, e \cdot x = x \cdot e = x$$

یک گروه با رابطهٔ جدایی در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$x^{-1}\#y^{-1} \to x = y \qquad x.y\#x'.y' \to x\#x' \vee y\#y'$$

گروه جمعی $\mathbb{Z}^2$ را در نظر بگیرید. زیرگروه G عبارت است از $G = \{(a,b) : b = 0 \vee A\}$ که A یک حکم است که فعلاً معین نیست، مثلاً حدس گلدباخ. گرچه G یک زیرگروه «خوب» است اما نمی‌دانیم که $G \equiv \mathbb{Z}^2$ یا $G \cong \mathbb{Z}$. در واقع G، حتی به‌عنوان یک زیرمجموعه $\mathbb{Z}^2$، جداشدنی[6] نیست، یعنی چنین نیست که $\forall x \in \mathbb{Z}^2(x \in G \vee x \notin G)$.

مفهوم پاد زیرگروه که در زیر خواهد آمد به نوعی، دوگان مفهوم زیرگروه است، شبیه دوگان بودن مفاهیم تساوی و جدایی.

1. discrete 2. apartness 3. D. Scott 4. antisubstructures
5. W. Ruitenburg 6. detachable

۲.۶ تعریف. یک یاد زیرگروه A از گروه G زیرمجموعه‌ای از G است که در شرایط زیر صدق کند: $\neg e \in A$، $x^{-1} \in A \to x \in A$، $xy \in A \to x \in A \vee y \in A$. یادزیرگروه A نرمال خوانده می‌شود اگر $xy \in A \to yx \in A$. یادزیرگروه A با رابطهٔ جدایی در G همخوان است اگر $a \in A \to a\#e$.

مثال. زیرمجموعهٔ گروه ماتریسهای ۲ × ۲، $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ با ضابطهٔ $c\#0 \vee b\#0 \vee a\#d$، یک یادزیرگروه نرمال $GL_2(\mathbb{R})$ است.

گزارهٔ زیر ما را به مفهوم زیرگروه نزدیک می‌کند:

۳.۶ گزاره. فرض کنید A یک یادزیرگروه G باشد. A^c (مکمل A نسبت به G) در شرایط زیر صدق می‌کند:

(i) $e \in A^c$ (ii) $x \in A^c \wedge y \in A^c \to xy \in A^c$

(iii) $x \in A^c \to x^{-1} \in A^c$ (iv) $\neg\neg x \in A^c \to x \in A^c$

اثبات. ساده است. ■

توجه کنید که (i) و (ii) و (iii) دقیقاً تعریف زیرگروه است و (v) می‌گوید که عضو زیرگروه بودن پایدار است. A^c را در گزارهٔ ۳.۶ زیرگروه معین‌شده به‌وسیلهٔ A می‌گویند. به‌راحتی دیده می‌شود که اگر A یک یاد زیرگروه نرمال باشد آنگاه A^c یک زیرگروه نرمال است، یعنی اگر $x \in A^c$ آنگاه $yxy^{-1} \in A^c$.

حال تعریف گروههای خارج قسمت ساده است. فرض کنید A یک یاد زیرگروه نرمال G باشد و $D = A^c$. آنگاه G/D یک گروه است که مجهز به یک رابطهٔ جدایی متعارف است یعنی $aD\#bD$ اگر و فقط اگر $ab^{-1} \in A$.

تعریف یاد زیرساختارها در مورد حلقه‌ها و میدانها نیز به‌همین نحو است. تعریف حلقه به‌طور معمول انجام می‌شود. اما مثل گروهها، حلقه‌های با رابطهٔ جدایی، اصول مبتنی بر حفظ رابطهٔ جدایی (در مورد جمع و ضرب) را در بر دارند. تعاریف حوزه صحیح و میدان به‌صورت زیر است:

حلقهٔ R را یک حوزهٔ صحیح گویند اگر $x\#0$ و $y\#0$ آنگاه $xy\#0$.

حلقهٔ R را یک میدان گویند اگر $x\#0$ آنگاه y در $\mathbb{R}$ وجود دارد که $xy = 1$.

در جبر کلاسیک، اگر R یک حلقهٔ جابه‌جایی یکدار باشد و I ایده‌آلی اول در R باشد، R/I یک حوزه صحیح است و اگر I ایده‌آل ماکسیمال در R باشد، R/I یک میدان است. مفهوم اول بودن ایده‌آل یک مفهوم اساسی در جبر کلاسیک است که تعریف معمولی آن در جبر شهودگرایی کارساز نیست. مثلاً حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R[x]$ را در نظر بگیرید. با تعریف معمولی ایده‌آل اول، حتی نمی‌توانیم ثابت کنیم که ایده‌آل (x) اول است. برای دیدن این مطلب فرض کنید a و b اعضای R باشند که $ab = 0$ ولی نمی‌دانیم که $a = 0$ یا $b = 0$. حال چندجمله‌ای $(x+a)(x+b)$ را در نظر بگیرید. گرچه $(x+a)(x+b)$ در ایده‌آل (x) است ولی اینکه $x+a$ در (x) است یا $x+b$ در (x) است نامعین است. برای غلبه بر این مشکل و مشکلی که در مفهوم معمولی ایده‌آل ماکسیمال نیز وجود دارد، تعاریف زیر را در جبر شهودگرایی ارائه کرده‌اند:

۴.۶ تعریف. یک یاد ایده‌آل در حلقهٔ R زیرمجموعهٔ A از R است که در شرایط زیر صدق کند:

(i) $0 \notin A$، (ii) $x + y \in A \to x \in A \vee y \in A$،

(iii) $xy \in A \to x \in A \wedge y \in A$.

یک ایده‌آل I در حلقهٔ R زیرمجموعه‌ای از R است که در شرایط زیر صدق کند:

(i) $0 \in I$، (ii) $x, y \in I \to x - y \in I$،

(iii) $x \in R, y \in I \to xy \in I$.

زیرمجموعهٔ A از R را یک یاد ایده‌آل اول گویند اگر $1 \in A$ و $x \in A \wedge y \in A \to xy \in A$. زیرمجموعهٔ A از R را یک یاد ایده‌آل مینیمال گویند اگر $1 \in A$ و $\forall x \in A \exists y \in R(1 - xy \notin A)$.

به‌راحتی دیده می‌شود که اگر A یک یاد ایده‌آل باشد، A^c یک ایده‌آل است. گزارهٔ زیر را داریم:

۵.۶ گزاره. (i) A یاد ایده‌آل اول است اگر و فقط اگر R/A^c یک حوزه صحیح باشد.

(ii) A یاد ایده‌آل مینیمال است اگر و فقط اگر R/A^c یک میدان باشد.

(iii) یک یاد ایده‌آل مینیمال، اول است.

(iv) اگر A یک یاد ایده‌آل مینیمال و B یک یاد ایده‌آل عضودار[1] باشد به‌طوری که $B \subset A$، آنگاه $B = A$.

اثبات. ساده است. ■

فایق آمدن بر مشکلات مفاهیم دیگر، مثل مفهوم درجهٔ چندجمله‌ایها در حلقه‌های چندجمله‌ایها مستلزم کار بیشتری است. خواننده می‌تواند به مراجع [۲۲]، [۲۵] یا [۳۰] رجوع کند.

این قسمت را با تذکر این نکته خاتمه می‌دهیم که جبر ساختی در سنت بیشاپ (وارث کرونکر در گسسته فرض کردن ساختارهای جبری) به‌وسیلهٔ شاگردش سایدنبرگ در [۲۷] توسعه یافت و بعداً در [۲۲] قسمتهای عمده جبر مقدماتی ساخته شد.

۷. مبانی فلسفی شهودگرایی

در این بخش پایانی به امهات مبانی فلسفی شهودگرایی براؤر نظری موجز می‌افکنیم. نقد و بررسی همهٔ جانبه نظرات براؤر از حوصله مقالهٔ حاضر خارج است. بنابراین این نوشته بر اطلاع‌رسانی اهم موضوعات فلسفی براؤر در زمینه ریاضیات متمرکز است.

از نظر تکوینی، فلسفه براؤر شامل دو بخش است. بخش فلسفی آن ترکیبی از ذهن‌گرایی[2] کانتی و خودآیینی[3] فیخته[4] می‌باشد. علاوه‌بر حضور مستمر این دو نگرش در آثار فلسفی براؤر، بدبینی[5] شوپنهاور[6] و شهودگرایی برگسون[7] در آثار اولیهٔ او و به‌ویژه در [۳] کاملاً مشهود است. بخش دوم فلسفهٔ براؤر به عناصری مربوط می‌شود که مستقیماً فلسفه ریاضی او را تشکیل می‌دهند. شاخصترین اینها، مفهوم «وجود» از بورل و لبگ، مفهوم «ساختمان» از کرونکر و مفهوم «شهود» از پوانکاره است. براؤر هیچ‌یک از این مفاهیم را به همان شکل اصلی به‌کار نبرده است. (مثلاً نگاه کنید به [۲۹]).

1. inhabited 2. subjectivism 3. soliptsistic 4. H. Fichté
5. pessimism 6. A. Schopenhauer 7. H. Bergson

نظر براؤر درباره ریاضیات برای فهم شهودگرایی اساسی است. نظرات او دربارهٔ «وجود» «اشیاء ریاضی»، «منطق» و «زبان» همه نتایج این توصیف او از ریاضیات است:

«ریاضیات آفرینش آزاد[۱] ذهن است. این آفرینش آزاد، ساختن دستگاههای ریاضی براساس شهود است». بنابراین اشیاء ریاضی، ساختمانهای ذهنی هستند.

۱. اشیاء ریاضی، ساختمانهای ذهنی هستند.

۱.۱ اشیاء ریاضی در عالم خارج، مستقل از ذهن، وجود عینی ندارند.

۲.۱ چنین نیست که اشیاء ریاضی، مستقل از ذهن، در خارج موجود باشند و ریاضیات در پی کشف آنها باشد.

۱.۲.۱. یک شئ ریاضی وقتی به عرصهٔ وجود پا می‌گذارد که ساخته شود.

۲.۲.۱. دامنهٔ «وجود» برای اشیاء ریاضی ثابت نیست. در یک ساختمان ریاضی، اشیاء جدید به «وجود» می‌آیند.

۱.۲.۲.۱. صدق یک حکم ریاضی که در قالب سور عمومی[۲] بیان می‌شود، نه تنها بر اشیاء موجود (یعنی ساخته‌شده) بلکه به اشیائی که در آینده نیز به وجود خواهند آمد (ساخته خواهند شد) مبتنی است.

۲.۲.۲.۱. احکامی که در قالب سور وجودی[۳] بیان می‌شوند، یک ارتباط ناکامل[۴] برقرار می‌کنند.

۱.۲.۲.۲.۱ ساختن یک شئ که در یک حکم وجودی به آن ادعا شده، ارتباط را کامل می‌کند.

۳.۱. از پیشینی‌های کانتی، فقط «شهود زمان» باقی می‌ماند.

۴.۱. پیشینی بودن «مکان» کانتی، با ساختمان پیوستار از بین می‌رود.

۲. مفهوم «ساختمان»، ابتدائی است.

۱.۲ اینکه یک برهانْ ساختی است، وقتی که آن‌را «می‌بینیم» تأیید می‌شود یا رد می‌شود.

۲.۲ مفهوم «ساختمان» خود امری ثابت نیست. در آینده روشهایی برای برهان ممکن است یافت شود که ساختی تلقی شوند.

۳.۲ مفهوم ساختمان تعبیر ناشدنی[۵] است.

۱.۳.۲ تعابیر تحقق پذیری[۶] کلینی، جهانهای ممکن[۷] کریپکی، نظریهٔ انواع مارتین لاف، حساب ساختمانها[۸]ی کوکاند و اوت[۹]، [ ]، و ... جزئی هستند. این تعابیر «وجوهی» از مفهوم ساختمان را توضیح می‌دهند.

۳. ریاضیات فاقد زبان است.

۱.۳ کلماتی که در یک اثبات ریاضی به‌کار می‌روند تنها یک همراه برای ساختمان ریاضی‌اند.

۲.۳ حتی در منطق و ریاضیات نیز نمی‌توان دو شخص یافت که در مفاهیم اساسی یکسان فکر کنند.

۳.۳ مسئله کلیدی ریاضیات در ارتباط با زبان، دقت است.

۱.۳.۳ دقت به معنای حذف اشتباه و سوء فهم به هیچ شکل زبانی تضمین شدنی نیست.

---

1. free creation 2. universal quantifier 3. existential quantifier

۴. این اصطلاح از کلینی است. Incomplete communication

5. uninterpreted 6. realizability 7. possible worlds

8. calculus of constructions 9. Coquand and Heut

۲.۳.۳ ساختمانهای بی‌زبان[۱] (فاقد زبان) که از خود بازشکفتگی[۲] شهود بسیط نشأت می‌گیرند فقط به‌خاطر حضور در حافظه دقیق و درست‌اند.

۳.۳.۳ دقت ناشی از خود شکفتگی شهود بسیط در تبادل بین انسانها، بخاطر اینکه در یک زبان به‌عنوان ابراز ارتباط بیان می‌شوند، از بین می‌رود.

۴. ریاضیات مستقل از منطق است و منطق یکی ازکاربردهای ریاضیات است.

۱.۴ مفهوم اصلی منطق ریاضی، مفهوم برهان است. مفهوم حقیقت (یا صدق) به مفهوم برهان احاله می‌شود.

۲.۴ منطق ریاضی عبارت است از مدل ریاضی ساختمانهای ریاضی.

۱.۲.۴ معیار اعتبار قواعد منطق ریاضی در ساختمانهای ریاضی است که با آنها همراه باشد.

مراجع

1. E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York (1967).
2. D. Bridges and F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge University Press, (1987).
3. L. E. J. Brouwer, "Life, art and mysticism", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, (3) **37** (1996) 381-432.
4. ______, *Collected Works I*, ed. A. Heyting, North-Holland (1975).
5. L. E. J. Brouwer and B. de Loor, "Intuitionistischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra", *Nederl. Akad. proc.* **27** (1924), 186-188.
6. D. van Dalen, "An interpretation of intuitionistic analysis", *Annals of pure and Applied Logic*, **13** (1978) 1-43.
7. ______. "Why Constructive Mathematics", in: W. Depauli-Schimanovich et al. (eds.), *The Foundational Debate*, Kluwer (1995) 141-157.
8. ______, *Logic and Structure*, Third printing, Springer (1997).
9. M. Franchella, "L. E. J. Brouwer: toward intuitionistic logic", *Historia Mathematica* **22** (1995) 304-322.
10. A. O. Gelfond, *Transcendental and Algebraic Numbers*, Dover, New York (1960).
11. N. D. Goodman and J. Myhill, "Choice implies excluded middle", *Z. Math. Logik Grundlagen Math.* **23** (1978) 461.
12. R. L. Goodstein, *Recursive Analysis*, North-Holland (1961).
13. ______, *Recursive Number Theory*, North-Holland (1957).
14. A. Heyting, "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, II", *Physikalisch-mathematische Klasse*, (1930) 57-71.

---

1. languageless 2. self-unfolding

15. ———, "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, III", *Physikalisch-mathematische* Klasse (1930) 158-169.

16. ———. "Untersuchungen über **intuitionistische** Algebra", *Nederl. Akad. wetensch. Veh. Tweede Afd.* (1941).

17. S. C. Kleene, "On the interpretation of intuitionistic number theory", *JSL*, **10** (1945) 109-124.

18. ———, *Introduction to Metamathematics*. North-Holland (1952).

19. G. Kreisel, "Foundations of intuitionistic Logic", in: E. Nagel, P. Suppes and A. Tarski, eds. *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (1962) 198-210.

20. L. Kronecker, "Über den Zahlbegriff", *J. Reine Angew, math.* **101** (1887) 337-355.

21. P. Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory*, Bibliopolis, Napoli (1984)

22. R. F. Mines, F. Richman and W. Ruitenburg, *A Course in Constructive Algebra*, Springer (1988).

23. J. Molk, "Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie de l'élimination", *Acta Mathematica*, **6** (1-166) 1885.

24. H. Poincaré, *Science et Mèthode*, Flammarion, Paris (1908).

25. W. Ruitenburg, *Intuitionistic Algebra, Theory and Sheaf Models*, PhD thesis, Utrecht, The Netherdands (1982).

26. D. Scott, "Identity and existence in intuitionistic Logic", in: M. P. Fourman, C. J. Mulvey and D. Scott, eds. *Application of Sheaves*, Springer (1979).

27. A. Sidenberg, "Constructions in Algebra", *Trans. Amer. Math. Soc.* **197** (1974) 273-313

28. T. Skolem, "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer verän derlichen mit unendlichen Ausdehnungsbéreich", *videnskaps selskapet i kristiana. skrifter Utgit* (I). **6** (1923) 1-38.

29. W. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland (1995).

30. A. S. Troelstra and D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, vols. I, II, North-Holland. (1988).

31. H. Weyl, "Das Kantinuum", in *Das Kantinuum und andere Monographien*, Chelsea, New York (1966).

* * * * * *

* محمد اردشیر، دانشگاه صنعتی شریف و پژوهشگاه دانشهای بنیادی
ardeshir@math.sharif.ac.ir