

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

(به دو روش)

● حمید رضا امیری

$$= \frac{PQ}{OR} + \frac{SR}{OR} = \frac{PQ}{OQ} \times \frac{OQ}{OR} + \frac{SR}{QR} \times \frac{QR}{OR}$$

$$= \sin \alpha \times \cos \beta + \cos \alpha \times \sin \beta$$

$$\left(\frac{SR}{QR} = \cos \alpha \text{ در مثل قائم الزاویه SQR داریم} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}$$

حال با استفاده از اتحاد $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ به محاسبه

$\cos(\alpha + \beta)$ می‌پردازیم. اما ابتدا نیاز داریم

$$\sin(\alpha - \beta)$$

را به دست آوریم. برای به دست آوردن رابطه مورد نظر در رابطه $\sin(\alpha + \beta)$ کفایت β را به $(-\beta)$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

و داریم:

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta, \quad \cos(-\beta) = \cos \beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] =$$

هرگاه α و β دو زاویه دلخواه باشند می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha + \beta)$ را محاسبه کنیم یعنی:

$$\sin(\alpha + \beta), \quad \cos(\alpha + \beta)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta), \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$$

ابتدا به محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ می‌پردازیم، لازم به تذکر است می‌توان ابتدا $\cos(\alpha + \beta)$ را محاسبه نمود و سپس با

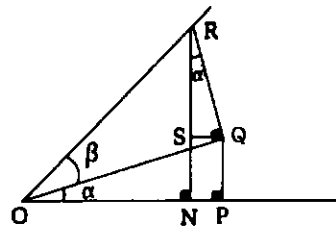
استفاده از اتحاد $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ را

به دست آورد. در ذیل به ۲ روش متفاوت یکبار ابتدا

$$\sin(\alpha + \beta)$$

محاسبه می‌شود و در روش دوم ابتدا $\cos(\alpha + \beta)$ را به دست می‌آوریم.

روش اول: محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$.



با توجه به شکل واضح است که در مثلث قائم الزاویه

ONR داریم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{NR}{OR} = \frac{NS + SR}{OR} = \frac{PQ + SR}{OR}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{QA} = \widehat{PR} = \beta \\ \widehat{AP} = \alpha \\ \widehat{QAP} = \alpha + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{PQ} = \widehat{RA}$$

اندازه‌های دو کمان $\widehat{PQ}$ و $\widehat{RA}$ با هم برابرند لذا :

$$\begin{aligned} PQ = RA &\Rightarrow \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \\ &= \sqrt{(x_R - x_A)^2 + (y_R - y_A)^2} \\ &\Rightarrow \sqrt{[\cos \alpha - \cos(-\beta)]^2 + [\sin \alpha - \sin(-\beta)]^2} \\ &= \sqrt{[\cos(\alpha + \beta) - 1]^2 + [\sin(\alpha + \beta) - 0]^2} \Rightarrow \\ &\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos(-\beta) + \cos^2(-\beta) + \sin^2 \alpha \\ &- 2 \sin \alpha \sin(-\beta) + \sin^2(-\beta) \end{aligned} \quad (1)$$

$$= \cos^2(\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) + 1 + \sin^2(\alpha + \beta)$$

از طرفی داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2(-\beta) + \cos^2(-\beta) = 1 \quad \text{پس:}$$

$$\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1$$

$$(1) \Rightarrow -2 \cos \alpha \cos(-\beta) - 2 \sin \alpha \sin(-\beta) + 2$$

$$= -2 \cos(\alpha + \beta) + 2 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) =$$

$$\cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) =$$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow$$

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

محاسبه نسبت‌های مثلثاتی

$$\sin(\alpha - \beta), \sin(\alpha + \beta), \cos(\alpha - \beta)$$

مشابه روش قبل است.

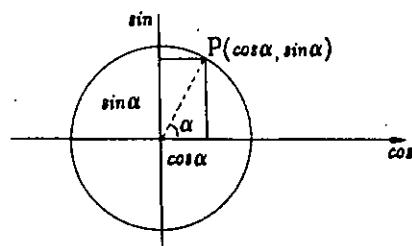
$$\begin{aligned} \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] &= \\ \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta}_{\cos \alpha} - \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta}_{\sin \alpha} &= \\ \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

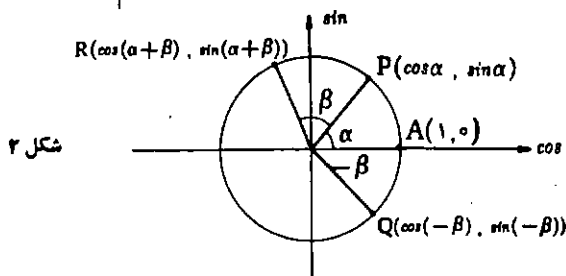
و اگر در رابطه اخیر β را به $(-\beta)$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \\ \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) &\Rightarrow \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

روش دوم: در این روش ابتدا $\cos(\alpha + \beta)$ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به شکل (۱) و تعریف دایره مثلثاتی و محورهای آن می‌توان گفت دایره مثلثاتی مکان هندسی نقاطی از صفحه چون P است که طول این نقاط $\cos \alpha$ و عرض این نقاط $\sin \alpha$ می‌باشد (α زاویه روبرو به کمان OP است). حال با توجه به این مطلب و فرمول فاصله دو نقطه و شکل (۲) خواهیم داشت:



شکل ۱



شکل ۲