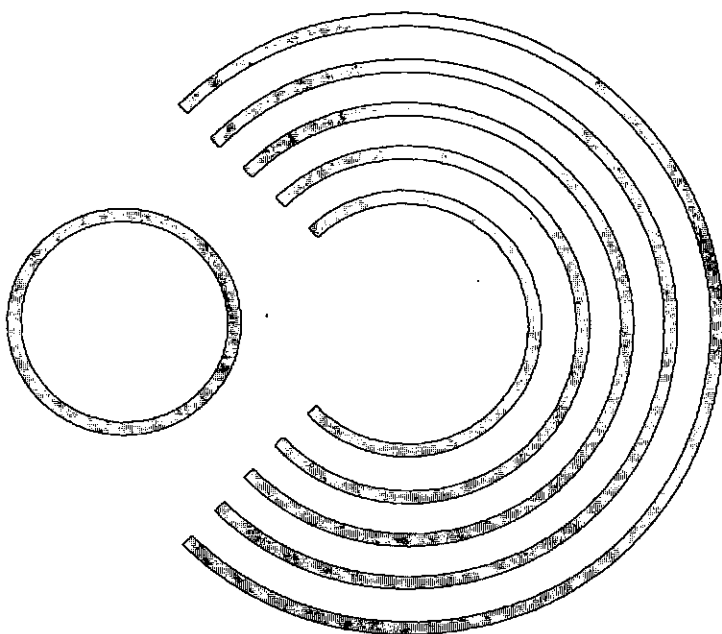


محاسبه مساحت دایره

● سید محمد رضا هاشمی موسوی



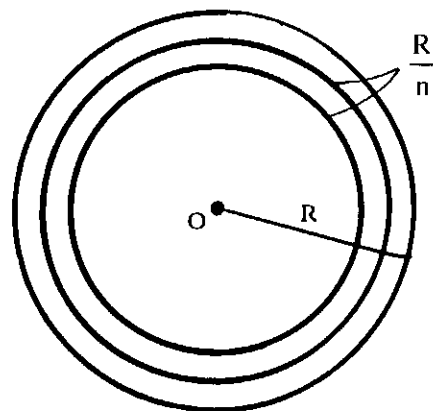
برای محاسبه مساحت دایره‌ای به شعاع R ، ابتدا آن را مطابق شکل به نوارهای باریکی به عرض $\frac{R}{n}$ برش می‌دهیم تا حلقه‌های دایره‌ای شکل حاصل شود.

بدیهی است که اگر n را عددی بسیار بزرگ در نظر بگیریم، نوارهای بریده شده مستطیلهایی به عرض $\frac{R}{n}$ هستند. از حد مجموع مساحت برشهای حاصله به عرض $\frac{R}{n}$ ، وقتی n به سمت عددی طبیعی بی‌نهایت بزرگ میل کند؛ مساحت دایره به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & 2\pi \left(R - \frac{R}{n} \right) \left(\frac{R}{n} \right) + 2\pi \left(R - \frac{2R}{n} \right) \left(\frac{R}{n} \right) + \dots + \\ & 2\pi \left(R - \frac{nR}{n} \right) \left(\frac{R}{n} \right) \\ &= \frac{2\pi R^2}{n} \left[\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \left(1 - \frac{3}{n} \right) + \dots + \left(1 - \frac{n}{n} \right) \right] \\ &= \frac{2\pi R^2}{n} \left[\frac{1}{n} + n - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) \right] \\ &= \frac{2\pi R^2}{n} \left(\frac{1}{n} + n - \frac{1+2+3+\dots+n}{n} \right) \\ &= \frac{2\pi R^2}{n} \left(\frac{1}{n} + n - \frac{n(n+1)}{2n} \right) \\ &= \frac{2\pi R^2}{n} \left(\frac{1}{n} + n - \frac{n+1}{2} \right) = \frac{2\pi R^2}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

با فرض این که S حد مجموع مساحت برشهای حاصله باشد:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi R^2}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2\pi R^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) \\ &= 2\pi R^2 \left(\frac{1}{2} \right) = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{S = \pi R^2 \text{ (مساحت دایره)}} \end{aligned}$$



$$S_n = \underbrace{2\pi R}_{\text{طول مستطیل}} \left(\underbrace{\frac{R}{n}}_{\text{عرض مستطیل}} \right) + 2\pi \left(R - \frac{R}{n} \right) \left(\frac{R}{n} \right) +$$