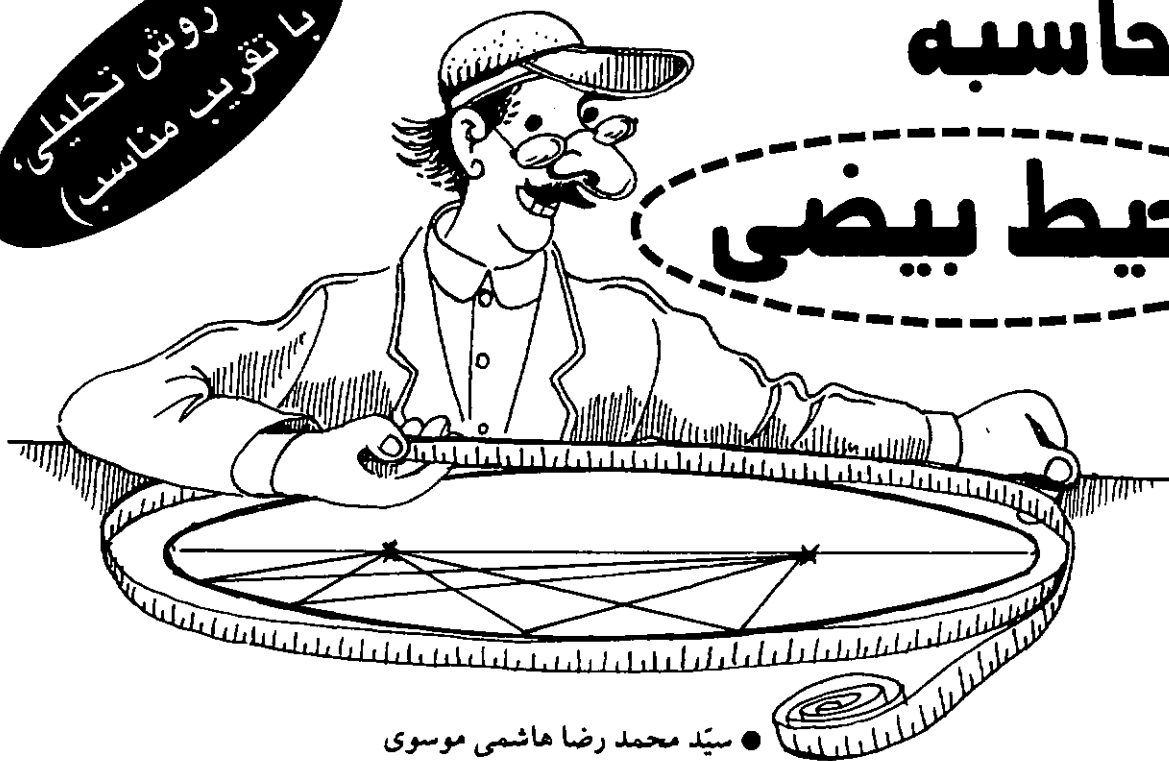


محاسبه

محیط بیضی

(به روش تحلیلی،
با تقریب مناسب)



● سید محمد رضا هاشمی موسوی

برای محاسبه محیط بیضی، ابتدا فرض می‌کنیم که محیط دایره‌ای دقیقاً برابر محیط بیضی است. سپس تلاش می‌کنیم محیط این دایره را حساب کنیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم دایره‌ای به دست آوریم که محیطش برابر محیط بیضی باشد. بدیهی است که شعاع چنین دایره‌ای باید تابعی از a و b باشد. a و b به ترتیب نصف قطر بزرگ و نصف قطر کوچک بیضی هستند.)

حال برای این منظور، ابتدا معادلات بیضی و دایره مفروض (به شعاع R) را می‌نویسیم. سپس دایره را با بیضی قطع می‌دهیم؛ یعنی:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{a}{c} \sqrt{R^2 - b^2} \\ y = \pm \frac{b}{c} \sqrt{a^2 - R^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C(\frac{a}{c} \sqrt{R^2 - b^2} \text{ و } \frac{b}{c} \sqrt{a^2 - R^2}) \\ C'(-\frac{a}{c} \sqrt{R^2 - b^2} \text{ و } \frac{b}{c} \sqrt{a^2 - R^2}) \\ D(\frac{a}{c} \sqrt{R^2 - b^2} \text{ و } -\frac{b}{c} \sqrt{a^2 - R^2}) \\ D'(-\frac{a}{c} \sqrt{R^2 - b^2} \text{ و } -\frac{b}{c} \sqrt{a^2 - R^2}) \end{cases}$$

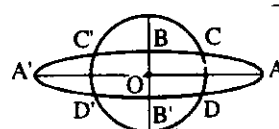
از مختصات نقاط تقاطع نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a^2 - R^2 \geq 0 \\ R^2 - b^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow b \leq R \leq a$$

از محاسبه فاصله نقاط تقاطع نتیجه می‌شود که، نقاط تقاطع، مستطیلی به طول L و عرض l را مشخص می‌کنند:

$$L = \frac{2a}{c} \sqrt{R^2 - b^2} \quad \text{طول مستطیل}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \\ y = \pm \sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$$



(R شعاع دایره مطلوب است.)

$$(\alpha^2 + \beta^2) c^2 = a^2 - b^2 ; \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (5)$$

از تفاضل روابط (۴) نتیجه زیر حاصل می شود:

$$(\alpha^2 - \beta^2) c^2 = 2R^2 - (a^2 + b^2) \quad (6)$$

با توجه به رابطه (۵)، رابطه (۶) چنین می شود:

$$(1 - 2\beta^2) c^2 = 2R^2 - (a^2 + b^2) ;$$

$$2R^2 = a^2 + b^2 + (1 - 2\beta^2)c^2$$

در این جا شعاع دایره مطلوب، بر حسب مقدار نامعلوم β

معین می شود، یعنی:

$$R = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + (\frac{1}{2} - \beta^2)c^2} \quad (7)$$

رابطه (۷) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$R = a\sqrt{1 - k^2\beta^2} \quad (k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}) \quad (8)$$

حال از رابطه (۸) محیط بیضی را بر حسب β می نویسیم:

$$p = 2\pi a\sqrt{1 - k^2\beta^2} \quad (9)$$

حال از رابطه (۹) ماکزیمم و می نیمم β را محاسبه می کنیم و از

آن جا حدود β مشخص می شود. حال برای محاسبه ماکزیمم

β چنین عمل می کنیم:

$$(p = 4a \Leftrightarrow b = 0)$$

$$4a = 2\pi a\sqrt{1 - \beta_M^2} ; 2 = \pi\sqrt{1 - \beta_M^2}$$

$$\beta_M = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi} = 0.771 \quad (9')$$

حال مقدار می نیمم β را محاسبه می کنیم. برای این منظور، بین

دستور (۹) و مساحت بیضی، b را حذف می کنیم. از حذف b ،

معادله درجه دوم زیر که ریشه هایش a^2 و b^2 است، تشکیل

خواهد شد:

$$\begin{cases} p = 2\pi a\sqrt{1 - k^2\beta^2} = 2\pi\sqrt{(1 - \beta^2)a^2 + \beta^2b^2} \\ S = \pi ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\frac{p}{2\pi})^2 = (1 - \beta^2)a^2 + \beta^2b^2 \\ (\frac{S}{\pi})^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$(1 - \beta^2)X^2 - (\frac{p}{2\pi})^2X + (\frac{S}{\pi})^2\beta^2 = 0 \quad (10)$$

مبین معادله (۱۰) را تشکیل می دهیم:

$$\Delta = (\frac{p}{2\pi})^4 - 4(1 - \beta^2)(\frac{S}{\pi})^2\beta^2$$

حال اگر مبین معادله فوق را برابر صفر قرار دهیم، معادله

دارای ریشه مضاعف a^2 یا b^2 می شود، بنابراین:

$$(p = 2\pi a \text{ و } S = \pi a^2) \Leftrightarrow \Delta = 0 ; 4\beta_M^2(1 - \beta_M^2) = 1 ;$$

$$l = \frac{2b}{c}\sqrt{a^2 - R^2} \text{ عرض مستطیل}$$

از شرط $b \leq R \leq a$ نتیجه می شود که دایره مطلوب، بیضی را

در چهار نقطه قطع می کند، بنابراین دایره مطلوب از دایره

اصلی بیضی کوچک تر و از تصویر دایره اصلی بزرگتر است؛

یعنی میان دو دایره فوق محدود است.

از آن جا که شرط کردیم محیط دایره مطلوب، برابر محیط

بیضی است، بنابر این شرط، باید شعاع دایره مطلوب، تابعی

از a و b باشد؛ زیرا محیط بیضی، تابعی از a و b است.

می دانیم که قطر هر مستطیل، تابعی از طول و عرض آن

مستطیل است؛ بنابراین چون قطر مستطیل برابر قطر دایره

است، از یک طرف باید تابعی از L و l باشد و از طرف دیگر،

باید تابعی از a و b . از این جا نتیجه می گیریم که این مستطیل،

رابطه ای با مستطیل محیطی بیضی دارد. این رابطه به این قرار

است که طول و عرض مستطیل فوق، تابعی از a و b هستند

(زیرا قطر مستطیل فوق، تابعی از a و b است).

در این جا ثابت شد که L و l به ترتیب تابعی از a و b

هستند. بدیهی است که توابع فوق، نمی توانند دارای عدد

ثابت باشند (زیرا هرگاه $a=0$ و $b=0$ ، آن گاه L و l برابر

صفرند). از طرفی داریم:

$$\begin{cases} L = (\frac{2\sqrt{R^2 - b^2}}{c})a \\ l = (\frac{2\sqrt{a^2 - R^2}}{c})b \end{cases} \quad (1)$$

از رابطه (۱) و آنچه که گفته شد، نتیجه می شود:

$$\begin{cases} L = 2\alpha a \\ l = 2\beta b \end{cases} \quad (2) \quad (\alpha \text{ و } \beta \text{ اعداد ثابتی هستند.})$$

بدیهی است که مقدار α و β چنین هستند:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{c} = \alpha \\ \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{c} = \beta \end{cases} \quad (3)$$

از رابطه (۳) روابط زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} \alpha c = \sqrt{R^2 - b^2} \\ \beta c = \sqrt{a^2 - R^2} \end{cases} ; \begin{cases} \alpha^2 c^2 = R^2 - b^2 \\ \beta^2 c^2 = a^2 - R^2 \end{cases} \quad (4)$$

(می دانیم: $a^2 = b^2 + c^2$)

از جمع روابط (۴) چنین نتیجه می شود:

دستور محیط بیضی با تقریب نقصانی:

$$p = 2\sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \quad (17)$$

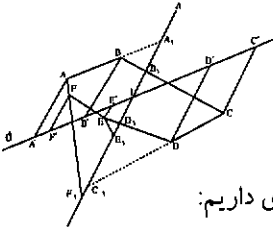
رابطه (۱۵) حدود محیط بیضی را نشان می‌دهد، و روابط (۱۶) و (۱۷) دستورهای محیط بیضی هستند، که لازم به تذکر است هرگاه بیضی به دایره نزدیک باشد، بهتر است از رابطه (۱۶) استفاده شود و هنگامی که بیضی به خط مستقیم $4a$ نزدیک می‌شود، از دستور (۱۷) استفاده شود، یعنی دستور (۱۶) برای حالتی از بیضی است که داریم: $c \rightarrow 0$ و دستور (۱۷) برای حالتی از بیضی است که داریم: $b \rightarrow 0$.

در حالت کلی می‌توان از دستور (۱۶) استفاده کرد که آن را می‌توان دستور محیط بیضی با تقریب اضافی نامید، بنابراین دستور محیط بیضی با تقریب اضافی، چنین است:

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi}(a^2 + b^2)}$$

پاسخ مسأله مسابقه‌ای برهان ۴

حل: خط دلخواه d غیر موازی با خط Δ را در نظر می‌گیریم و نقطه برخورد D را I می‌نامیم. از رأس‌های A, B, C, D, E, F خط‌هایی موازی Δ رسم می‌کنیم تا خط d را به ترتیب در نقطه‌های A', B', C', D', E', F' قطع کنند.



بنا به ویژگی خط‌های موازی داریم:

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{IA'}{IB'}, \frac{BB'}{BC} = \frac{IB'}{IC'}, \frac{CC'}{CD} = \frac{IC'}{ID'}, \frac{DD'}{DE} = \frac{ID'}{IE'}$$

$$\frac{EE'}{EF} = \frac{IE'}{IF'}, \frac{FF'}{FA} = \frac{IF'}{IA'}$$

از ضرب کردن طرف‌های متناظر رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{AA'}{AB} \times \frac{BB'}{BC} \times \frac{CC'}{CD} \times \frac{DD'}{DE} \times \frac{EE'}{EF} \times \frac{FF'}{FA} = 1$$

عکس این قضیه درست نیست. زیرا اگر رابطه بالا برقرار باشد، الزامی وجود ندارد که نقطه‌های $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ روی یک خط راست باشند.

$$\beta_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0.707 \quad (11)$$

بنابراین، در این جا از روابط (۹) و (۱۱) حدود β و از آن جا حدود بیضی به دست خواهد آمد.

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \leq \beta \leq \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi} \quad (12)$$

$$(0.707 \leq \beta \leq 0.771)$$

حال با در دست داشتن حدود β حدود محیط بیضی را می‌توان محاسبه کرد. بنابراین، برای محاسبه حدود محیط بیضی، کافی است مقدار β را بر حسب R در رابطه (۱۲) قرار دهیم:

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \leq \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{c} \leq \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi} \quad (13)$$

از رابطه (۱۳) حدود R را محاسبه می‌کنیم و از آن جا حدود محیط بیضی محاسبه می‌شود. بنابراین، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \leq \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{c} \leq \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi} \leq \frac{a^2 - R^2}{c^2} \leq \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2} \Rightarrow$$

$$a^2 - \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2} c^2 \leq R^2 \leq a^2 - \frac{c^2}{\pi}$$

$$\frac{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2}{\pi^2} \leq R^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \leq R \leq \sqrt{\frac{1}{\pi}(a^2 + b^2)} \quad (14)$$

حال با در دست داشتن شعاع دایره مطلوب، می‌توان حدود محیط بیضی را نوشت. در این جا دو دستور برای محیط بیضی به دست می‌آوریم که یکی از آنها محیط بیضی را با تقریب اضافی و دیگری محیط بیضی را با تقریب نقصانی می‌دهد. برای به دست آوردن دو دستور فوق، کافی است که مقدار 2π را در رابطه (۱۴) ضرب کنیم و به جای $2\pi R$ مقدار مساوی آن p را جانشین کنیم؛ بنابراین:

$$\frac{2\pi}{\pi} \sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \leq 2\pi R \leq 2\pi \sqrt{\frac{1}{\pi}(a^2 + b^2)}$$

$$p = 2\pi R$$

$$2\sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \leq p \leq 2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi}(a^2 + b^2)} \quad (15)$$

بنابراین فرمول‌های تقریبی (نقصانی و اضافی) چنین هستند. دستور محیط بیضی با تقریب اضافی:

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi}(a^2 + b^2)} \quad (16)$$