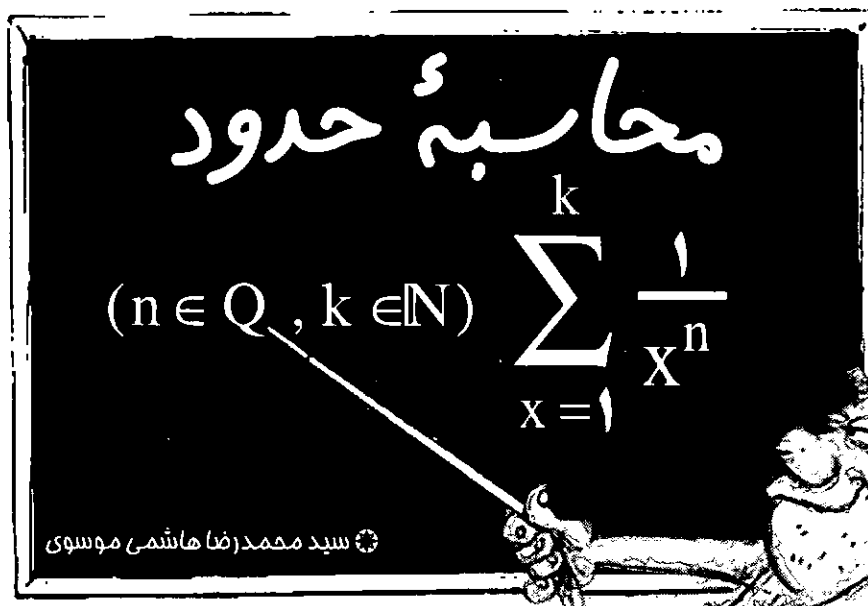




در نتیجه :

$$\frac{n-1}{k^n} > \frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}} \quad (1)$$

و همچنین به طور مشابه داریم :

$$\frac{1}{(k-1)^{n-1}} - \frac{1}{k^{n-1}} = \frac{k^{n-1} - (k-1)^{n-1}}{k^{n-1}(k-1)^{n-1}} =$$

$$\frac{(k-k+1)[k^{n-2} + k^{n-2}(k-1) + \dots + (k-1)^{n-2}]}{k^{n-1}(k-1)^{n-1}} =$$

$$\frac{k^{n-2} + k^{n-2}(k-1) + \dots + (k-1)^{n-2}}{k^{n-1}(k-1)^{n-1}} > \frac{(n-1)(k-1)^{n-2}}{k^{n-1}(k-1)^{n-2}} > \frac{n-1}{k^n}$$

در نتیجه :

$$\frac{n-1}{k^n} < \frac{1}{(k-1)^{n-1}} - \frac{1}{k^{n-1}} \quad (2)$$

پس از اثبات (۱) و (۲) می توان نوشت :

$$\frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}} < \frac{n-1}{k^n} < \frac{1}{(k-1)^{n-1}} - \frac{1}{k^{n-1}} \quad (3)$$

در رابطه (۳) مقادیر طبیعی به جز یک را به k نسبت

می دهیم، که در این صورت داریم :

$$k=2 : \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}} < \frac{n-1}{2^n} < \frac{1}{1^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$k=3 : \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{4^{n-1}} < \frac{n-1}{3^n} < \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3^{n-1}}$$

برای محاسبه حدود $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x^n}$ به ازای هر k و هر n گویا،

کافی است نابرابری های زیر را اثبات کنیم :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{n-1}{k^n} &> \frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}} & (1) \\ \frac{n-1}{k^n} &< \frac{1}{(k-1)^{n-1}} - \frac{1}{k^{n-1}} & (2) \end{aligned} \right.$$

برای اثبات (۱) و (۲) به ترتیب زیر عمل می کنیم :

$$\frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}} = \frac{(k+1)^{n-1} - k^{n-1}}{k^{n-1}(k+1)^{n-1}} =$$

$$\frac{(k+1-k)[(k+1)^{n-2} + (k+1)^{n-2}k + \dots + k^{n-2}]}{k^{n-1}(k+1)^{n-1}}$$

$$= \frac{(k+1)^{n-2} + (k+1)^{n-2}k + \dots + k^{n-2}}{k^{n-1}(k+1)^{n-1}} < \frac{(n-1)(k+1)^{n-2}}{k^{n-1}(k+1)^{n-1}} < \frac{n-1}{k^n}$$

$$\Rightarrow \frac{(3k+1)(3k+5)}{8(k+1)^2} < \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^3} < \frac{3k^2-1}{2k^2}$$

بدیهی است اگر $k \rightarrow \infty$ ، خواهیم داشت: $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^3} < \frac{3}{2}$

به طور کلی اگر $k \rightarrow \infty$ ، داریم $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} < \frac{n}{n-1}$ ($n > 1$).

حال اگر طرفین رابطه (۴) را بر $n-1 < 0$ تقسیم کنیم و به کل نابرابری حاصل یک واحد اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$n-1 < 0 : 1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)k^{n-1}} < \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^n} < 1 + \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}} \quad (6)$$

نابرابری (۶) حدود $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x^n}$ را به ازای هر k طبیعی و هر n گویای کوچک تر از یک نشان می دهد.

به عنوان مثال، حدود $\sum_{x=1}^k \frac{1}{\sqrt{x}}$ ، $\sum_{x=1}^k x$ و $\sum_{x=1}^k \sqrt{x}$ را حساب می کنیم:

$$n = \frac{1}{2} : 1 - 2 + 2\sqrt{k} < \sum_{x=1}^k \frac{1}{\sqrt{x}} < 1 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{k+1};$$

$$2\sqrt{k} - 1 < \sum_{x=1}^k \frac{1}{\sqrt{x}} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{2} + 1$$

$$n = -1 : 1 - \frac{1}{2} + \frac{k^2}{2} < \sum_{x=1}^k x < 1 - 2 + \frac{(k+1)^2}{2};$$

$$\frac{k^2+1}{2} < \sum_{x=1}^k x < \frac{(k+1)^2}{2} - 1$$

$$n = \frac{-1}{2} : 1 - \frac{2}{3} + \frac{2k\sqrt{k}}{3} < \sum_{x=1}^k \sqrt{x} <$$

$$1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2(k+1)\sqrt{k+1}}{3};$$

$$k : \frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}} < \frac{n-1}{k^n} < \frac{1}{(k-1)^{n-1}} - \frac{1}{k^{n-1}}$$

از جمع روابط فوق نتیجه می شود:

$$\therefore \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}} < (n-1) \sum_{x=2}^k \frac{1}{x^n} < 1 - \frac{1}{k^{n-1}}$$

در این جا از رابطه (۳) رابطه زیر نتیجه می شود:

(۴)

$$\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{(k+1)^{n-1}} < (n-1) \sum_{x=2}^k \frac{1}{x^n} < 1 - \frac{1}{k^{n-1}}$$

اینک طرفین رابطه (۴) را بر $n-1 > 0$ تقسیم می کنیم و به کل نابرابری یک واحد اضافی می کنیم که در این صورت داریم:

$$n-1 > 0 : 1 + \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}} <$$

$$\sum_{x=1}^k \frac{1}{x^n} < 1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)k^{n-1}} \quad (5)$$

نابرابری مضاعف (۵) حدود $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x^n}$ را به ازای هر k

طبیعی و هر n گویای بزرگ تر از یک نشان می دهد.

به عنوان مثال، حدود $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x^2}$ و $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x^3}$ را حساب

می کنیم:

$$n = 2 : 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} < \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^2} < 1 + 1 - \frac{1}{k};$$

$$\frac{3k+1}{2k+2} < \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^2} < \frac{2k-1}{k}$$

بدیهی است اگر $k \rightarrow \infty$ خواهیم داشت: $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} < 2$

$$n = 3 : 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{2(k+1)^2} < \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^3} < 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2}$$

$$1 + \frac{m}{\sqrt[m]{2}} - \frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \leq \sum_{x=1}^k \frac{1}{x} \leq 1 - m\sqrt[m]{2} + m\sqrt[m]{k+1} \quad (9)$$

اکنون اگر $m \rightarrow \infty$ ، حدود $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x}$ به دلخواه به دست

خواهد آمد. به عبارت دیگر، اگر هر قدر مقدار m را بزرگ تر اختیار کنیم، حدود سری هارمونیک دقیق تر به دست می آید.

بنابراین برای به دست آوردن هر چه دقیق تر سری $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x}$ و

محاسبه این سری با تقریب دلخواه، باید m را افزایش دهیم.

به عنوان مثال، اگر $m = 10^6$ اختیار شود، حدود $\sum_{x=1}^{10^6} \frac{1}{x}$ چنین

می شود:

$$14/1223 < \sum_{x=1}^{10^6} \frac{1}{x} < 14/1226$$

در نتیجه با تقریب 0.0003 ، سری فوق برابر است با

$$\sum_{x=1}^{10^6} \frac{1}{x} \approx 14/1223 \text{ که با سه رقم اعشار صحیح است.}$$

با اختیار کردن $m > 10^6$ از رابطه (9) توسط ماشین های محاسبه گر با دقت بالا، می توان سری هارمونیک را به ازای هر k با تقریب دلخواه محاسبه کرد. بنابراین رابطه (9) را می توان

الگوریتم محاسبه $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x}$ دانست.

در این جا حدود $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x^n}$ برای هر k طبیعی و هر n گویا به

شکل زیر خلاصه می شود:

$$\begin{aligned} (5) \quad n > 1: & 1 + \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}} < \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^n} < 1 + \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)k^{n-1}} \\ (9) \quad n = 1: & 1 + \frac{m}{\sqrt[m]{2}} - \frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \leq \sum_{x=1}^k \frac{1}{x} \leq 1 - m\sqrt[m]{2} + m\sqrt[m]{k+1} \quad (m \rightarrow \infty) \\ (6) \quad n < 1: & 1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)k^{n-1}} < \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^n} < 1 + \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)(k+1)^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\frac{2k\sqrt{k+1}+1}{3} < \sum_{x=1}^k \sqrt{x} < \frac{2(k+1)\sqrt{k+1}+3-4\sqrt{2}}{3}$$

در این جا برای تکمیل شدن بحث، تنها حالت $n=1$ باقی می ماند که این حالت را به طور مستقل بررسی

و حدود $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x}$ را مشخص می کنیم.

برای تعیین حدود $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x}$ ، می توان نوشت:

$$m > 0: \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}} \leq \sum_{x=1}^k \frac{1}{x} \leq \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}}$$

بنابراین کافی است کران بالای $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}}$ و کران پایین

$\sum_{x=1}^k \frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}}$ را به دست آوریم. برای این منظور، در رابطه (5)

عدد n را به $\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ تبدیل می کنیم و در این صورت:

$$(m > 0) \frac{m}{\sqrt[m]{2}} + 1 - \frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \leq \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}} \leq m + 1 - \frac{m}{\sqrt[m]{k}} \quad (7)$$

به طور مشابه در رابطه (6) عدد n را به $\left(1 - \frac{1}{m}\right)$ تبدیل

می کنیم و در این صورت داریم:

$$(m > 0) m\sqrt[m]{k} - m + 1 \leq \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}} \leq m\sqrt[m]{k+1} + 1 - m\sqrt[m]{2} + 1 \quad (8)$$

در این جا از روابط (7) و (8) حدود $\sum_{x=1}^k \frac{1}{x}$ نتیجه می شود،

یعنی:

$$1 + \frac{m}{\sqrt[m]{2}} - \frac{m}{\sqrt[m]{k+1}} \leq \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}} \leq \sum_{x=1}^k \frac{1}{x} \leq \sum_{x=1}^k \frac{1}{x^{1-\frac{1}{m}}} \leq m\sqrt[m]{k+1} - m\sqrt[m]{2} + 1;$$