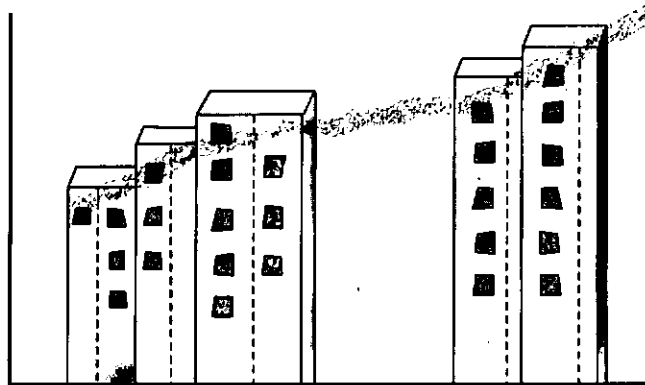


محاسبه‌ی حد مجموع به کمک

انتگرال معین

(قسمت ۲)



● احسان یارمحمدی

اشاره

در شماره‌ی قبل درباره‌ی محاسبه‌ی پاره‌ای از حدهای
توابعی صحبت کردیم که به صورت مجموع‌های خاصی مطرح
می‌شوند و با استفاده از روش‌های متعارفی که در محاسبه‌های
حدها وجود دارند، قابل حل نیستند. سپس در این خصوص
مراحل محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین را مطرح
کرده و آزمون‌هایی را آوردیم. اینک در ذیل، ادامه‌ی آزمون‌ها
را ملاحظه می‌کنید. (قبل از مطالعه‌ی این مقاله، قسمت اول
آن را از شماره‌ی قبل مطالعه کنید)

آزمون ۶. حاصل این حد، کدام یک از گزینه‌های ذیل
است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$e(1) \quad \frac{1}{e}(2)$$

$$-1(3) \quad 1(4)$$

جواب: گزینه‌ی (۲) صحیح است.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$\Rightarrow L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}{n \times n \times n \times \dots \times n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^r(1 + \frac{1}{n^r})}} + \frac{1}{\sqrt{n^r(1 + \frac{2^r}{n^r})}} + \frac{1}{\sqrt{n^r(1 + \frac{3^r}{n^r})}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^r(1 + \frac{n^r}{n^r})}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{1}{n})^r}} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{2}{n})^r}} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{3}{n})^r}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{n}{n})^r}} \right)$$

با فرض این که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \text{ است. بنابراین:}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1^r}{n^r}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2^r}{n^r}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3^r}{n^r}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n^r}{n^r}}} \right)$$

(*)

از مقایسه ی (*) با رابطه ی زیر:

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \text{ داریم:}$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k^r}{n^r}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^r}} \xrightarrow{x=\frac{k}{n}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^r}}$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^r + 1^r}} + \frac{1}{\sqrt{n^r + 2^r}} + \frac{1}{\sqrt{n^r + 3^r}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^r + n^r}} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^r}} = \ln(x + \sqrt{1+x^r}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$$

آزمون ۸. حاصل این حد کدام یک از گزینه های زیر است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right)$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}{n \times n \times n \times \dots \times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}{n \times n \times n \times \dots \times n}}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n}{n \times n \times n \times \dots \times n}$$

$$\Rightarrow \ln(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{n}\right) \right)$$

با فرض این که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \text{ است. بنابراین:}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n}{n}\right) \right) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \text{ داریم:}$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{x=\frac{k}{n}} f(x) = \ln(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n)^{\frac{1}{n}}}{n} = \int_0^1 \ln(x) dx = (x \ln(x) - x) \Big|_0^1 = -1$$

در نتیجه:

$$\ln(L) = -1 \Rightarrow L = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

آزمون ۷. حاصل این حد کدام یک از گزینه های زیر است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) \quad (2) \qquad \ln(2+\sqrt{2}) \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right) \quad (4) \qquad \ln(1+\sqrt{2}) \quad (3)$$

جواب: گزینه ی (۳) صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{1+0}} + \sqrt{\frac{n}{n(1+\frac{3}{n})}} + \sqrt{\frac{n}{n(1+\frac{6}{n})}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n(1+\frac{3(n-1)}{n})}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{1+0}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}} \right)$$

با فرض این که $b=3$ و $a=0$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n} \text{ است. بنابراین:}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{1+0}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3}{n}}} + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{6}{n}}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3(n-1)}{n}}} \right) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با رابطه ی زیر:

$$\{x_n\} = \frac{3}{n} \left(f\left(\frac{3}{n}\right) + f\left(\frac{6}{n}\right) + f\left(\frac{9}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{3n}{n}\right) \right)$$

$$f\left(\frac{3k}{n}\right) = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{3k}{n}}} \stackrel{x=\frac{3k}{n}}{\Rightarrow} f(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right) = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x} \Big|_0^3 = 2$$

آزمون ۱۰: حاصل حد زیر کدام یک از گزینه های

ذیل است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \dots + \left(\frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) \right)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\pi \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$1 \quad (3)$$

جواب: گزینه ی (۳) صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right)$$

با فرض این که $b=\pi$ و $a=0$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{n} \text{ است. بنابراین:}$$

$$x_n = \frac{\pi}{n} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right) \quad (**)$$

از مقایسه ی (**) با رابطه ی زیر:

$$\{x_n\} = \frac{\pi}{n} \left(f\left(\frac{\pi}{n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{n}\right) + f\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right)$$

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \stackrel{x=\frac{k\pi}{n}}{\Rightarrow} f(x) = \sin(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) + \dots + \left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) \right) = \int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = 2$$

آزمون ۹: حاصل حد زیر کدام یک از گزینه های زیر است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (1)$$

$$2 \quad (3)$$

جواب: گزینه ی (۱) صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{1+0}} + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right)$$

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1^p}{n^p} + \frac{2^p}{n^p} + \frac{3^p}{n^p} + \dots + \frac{n^p}{n^p} \right) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با رابطه ی زیر:

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^p \Rightarrow f(x) = x^p$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{n+kx} = \ln(1+x) \quad \text{مسئله ی ۲. ثابت کنید:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{n+kx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{n(1+\frac{kx}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{kx}{n}}$$

$$\text{بنابر } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt \quad \text{و با}$$

فرض این که $b=x$ و $a=0$ اختیار شده اند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{x}{n} \quad \text{است. بنابراین:}$$

$$x_n = \frac{x}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2x}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3x}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{nx}{n}} \right) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با رابطه ی زیر:

$$\{x_n\} = \frac{x}{n} \cdot \left(f\left(\frac{x}{n}\right) + f\left(\frac{2x}{n}\right) + f\left(\frac{3x}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{nx}{n}\right) \right)$$

$$f\left(\frac{kx}{n}\right) = \frac{1}{1+\frac{kx}{n}} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{1+t}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kx}{n}\right) &= \int_0^x f(t) dt \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{kx}{n}} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t) \Big|_0^x = \ln(1+x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{n+kx} \\ &= \ln(1+x) \end{aligned}$$

جواب: گزینه ی (۴) صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\pi}{2n} \right) + \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cos\left(\frac{\pi}{2n} \right) + \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cos\left(\frac{2\pi}{2n} \right) + \dots + \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} \right) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2n} \right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2n} \right) + \dots + \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} \right) \right)$$

با فرض این که $b = \frac{\pi}{2}$ و $a = 0$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{2n} \quad \text{است. بنابراین:}$$

$$x_n = \frac{\pi}{2n} \cdot \left(\cos\left(\frac{0\pi}{2n} \right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n} \right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2n} \right) + \dots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} \right) \right) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با رابطه ی زیر:

$$\{x_n\} = \frac{\pi}{2n} \cdot \left(f\left(\frac{0\pi}{2n}\right) + f\left(\frac{\pi}{2n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{2n}\right) + \dots + f\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) \right)$$

داریم:

$$f\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \Rightarrow f(x) = \cos(x)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\pi}{2n} \right) + \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cos\left(\frac{\pi}{2n} \right) + \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cos\left(\frac{2\pi}{2n} \right) + \dots + \left(\frac{\pi}{2n} \right) \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} \right) \right) \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned}$$

مسئله ی ۱ [قضیه]. به ازای هر $p \in \mathbb{N}$ همواره:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

برهان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^p}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1^p}{n^p} + \frac{2^p}{n^p} + \frac{3^p}{n^p} + \dots + \frac{n^p}{n^p} \right)$$

با فرض این که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \quad \text{است. بنابراین:}$$

مسئله ۳ [قضیه]. به ازای هر $p \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ های صحیح مثبت بزرگتر از یک یا p های صحیح مثبت بزرگتر مساوی بادو، همواره:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{pn} \right) = \ln\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

برهان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{pn} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{(p-1)+n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} + \frac{1}{n(1+\frac{2}{n})} + \frac{1}{n(1+\frac{3}{n})} + \dots \right)$$

$$+ \frac{1}{n((p-1)+\frac{n}{n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \dots + \frac{1}{(p-1)+\frac{n}{n}} \right)$$

با فرض این که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \text{ است. بنابراین:}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \dots + \frac{1}{(p-1)+\frac{n}{n}} \right) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با رابطه ی زیر:

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$$

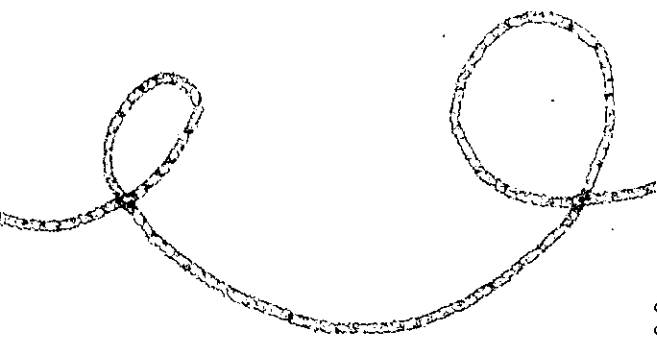
$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{(p-1)+\frac{k}{n}} \xrightarrow{x=\frac{k}{n}} f(x) = \frac{1}{(p-1)+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{pn} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{(p-1)+x} = \ln(p-1+x) \Big|_0^1 = \ln\left(\frac{p}{p-1}\right)$$

مسئله ۴. ثابت کنید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2 x^2} = \frac{\text{Arc tan}(x)}{x}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{nx}{n^2 + k^2 x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{nx}{n^2 \left(1 + \frac{k^2 x^2}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2 x^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{kx}{n}\right)^2}$$

$$\text{بنابر } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt \text{ و با}$$

فرض این که $b=x$ و $a=0$ اختیار شده اند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{x}{n} \text{ است. بنابراین:}$$

$$x_n = \frac{x}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{1+\left(\frac{nx}{n}\right)^2} \right) \quad (**)$$

از مقایسه ی (**) با رابطه ی زیر:

$$\{x_n\} = \frac{x}{n} \left(f\left(\frac{x}{n}\right) + f\left(\frac{2x}{n}\right) + f\left(\frac{3x}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{nx}{n}\right) \right)$$

$$f\left(\frac{kx}{n}\right) = \frac{1}{1+\frac{k^2 x^2}{n^2}} = \frac{1}{1+\left(\frac{kx}{n}\right)^2} \xrightarrow{t=\frac{kx}{n}} f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

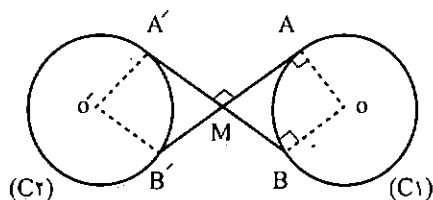
بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{kx}{n}\right) = \int_0^x f(t) dt \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{kx}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arc tan}(t) \Big|_0^x = \text{Arc tan}(x)$$

طول تسمه

تسمه‌ای به صورت ضربدری دور دو چرخ مطابق شکل می‌پیچد، اگر قطر هر چرخ ۱۶ سانتی متر باشد و تسمه در عبور از کنار خود در نقطه‌ی M زاویه‌ی قائمه بسازد، طول تسمه چه قدر است؟



حل: از مرکز دایره‌ی (C1) یعنی نقطه‌ی O به A و B پاره خط‌هایی را رسم می‌کنیم. چون شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است بنابراین $\angle A_1 = 90^\circ$ و $\angle B_1 = 90^\circ$ و چون $OA = OB = 8$ (شعاع دایره) در نتیجه چهارضلعی MAOB مربع است، پس $MA = MB = 8$. به همین ترتیب چهارضلعی MA'O'B' نیز مربع می‌باشد، بنابراین $A'M = MB' = 8$ ، در نتیجه داریم:

$$A'B + AB' = 32 \quad (1)$$

چون چهارضلعی MAOB مربع است، پس $\angle O = 90^\circ$ و زاویه‌ی مرکزی O برابر با کمان مقابلش است، در نتیجه $\angle AB = 90^\circ$ ، پس قسمتی از دایره‌ی (C1) که تسمه دور آن قرار دارد، برابر با $\frac{3}{4}$ محیط این دایره می‌باشد؛ یعنی:

$$\frac{3}{4} \times 2\pi r = \frac{3}{4} \times 2\pi \times 8 = 12\pi$$

به همین ترتیب قسمتی از دایره‌ی (C2) که تسمه دور آن قرار دارد برابر با 12π است، پس طول تسمه با توجه به رابطه‌ی (1) برابر است با:

$$32 + 12\pi + 12\pi = 32 + 24\pi$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \left(\frac{kx}{n}\right)^2} = \frac{\text{Arc tan}(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2 x^2} = \frac{\text{Arc tan}(x)}{x}$$

تمرین ۱. حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^3} + \dots + \sqrt[n]{e^n}}{n} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} + \dots + \sqrt{2n-1}}{n^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right) \quad (\text{ت})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{kx}{n}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{x} \quad \text{تمرین ۲. ثابت کنید:}$$

1. Limit
2. Algebraic
3. Trigonometric
4. L'Hopital Rule
5. Induction
6. Continuous
7. Sequence
8. Definite Integral
9. Partial Sum
10. Integration Methods

زیر نویس

منابع

۱. نلگینی، محمود؛ خرده‌پژوه، فروزان؛ رجالی، علی؛ و قیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۸۶.
۲. توماس، جورج و فینی، راس. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۷۰.
۳. اشپیگل، م. حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته. ترجمه‌ی خلیل پاریاب. حمید تولایی و بیژن شمس. انتشارات پاریاب. ۱۳۸۱.
4. Gillett, Philip. "Calculus and Analytic Geometry". D. C. Heath (2nd Edition). 1984.
5. Varberg, D. W. and Purcell, E. J. "Calculus". Prentice Hall (7th Edition). 1997.