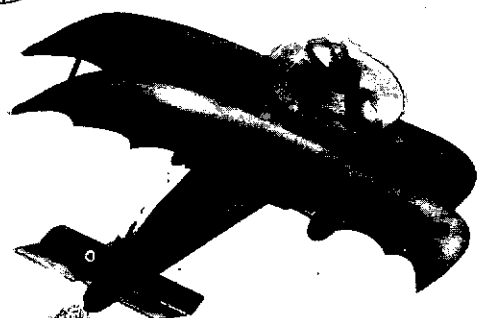


محاسبه‌ی حد مجموع

به کمک

انتگرال معین



(قسمت ۱)

● احسان یارمحمدی

یا می‌توان، با استفاده از رابطه‌ی

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{که به ازای هر عدد طبیعی}$$

n برقرار است (درستی این رابطه را می‌توانید با استقرای ریوی بررسی کنید)، و با جای‌گذاری آن به صورت زیر، حد را محاسبه کرد:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

در هر مورد به دقت فکر کنید و پاسخ (های) خود را با دلایل منطقی ارائه دهید.

اکنون در این قسمت روشی را در کنار تلفیق با قضیه‌ای کلی پیرامون آن مطرح می‌کنیم که با استناد به آن می‌توانیم پی ببریم، کدام یک از راه‌حل‌های ارائه شده برای سؤال بالا صحیح و کدام یک ناصحیح است.

قضیه: اگر $f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، همواره:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

برهان: چون $f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته است، حد

برای محاسبه‌ی «حد»، روش‌های متفاوتی وجود دارند؛ مانند: هم‌ارزی‌ها که شامل هم‌ارزی‌های جبری^۲، مثلثاتی^۳ و رادیکالی می‌شوند، رفع ابهام‌ها شامل رفع ابهام از حالت‌های $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ که بنابر قاعده‌ی هسپیتال^۴ میسرند، رفع ابهام از حالت $\infty \times \infty$ و رفع ابهام از حالت $\infty - \infty$... اما محاسبه‌ی پاره‌ای از حدها که خود را در قالب مجموع‌های خاصی مطرح می‌سازند، با استفاده از روش‌های متعارف و کلاسیکی که در محاسبه‌ی حدود وجود دارد، میسر نیست. به همین دلیل، در این مقاله محاسبه‌ی این گونه حدود را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید که در یک برگه‌ی امتحانی این سؤال آمده است:

حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ را به دست آورید. بررسی

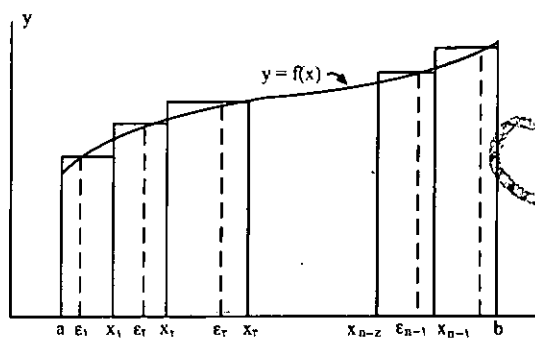
کنید، آیا می‌توان حد بالا را به این صورت محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n^2} \right) + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2} \right) \\ &= 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \end{aligned}$$

۲. با توجه به $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ تعیین شده، دنباله $\{x_n\}$ مورد نظر را مشخص می‌کنیم.

۳. از مقایسه دنباله $\{x_n\}$ به دست آمده با دنباله $\{x_n\}$ که در حالت کلی در قضیه آمده است (برای هر دو دنباله $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ یکسان است)، ضابطه $f(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

و چون بازه $[a, b]$ پیوسته است، بنابراین $\int_a^b f(x) dx$ وجود دارد. اکنون بازه $[a, b]$ را به n قسمت مساوی به طول $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ تقسیم می‌کنیم (نمودار زیر).



۴. انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ را محاسبه می‌کنیم، تا مقدار حد دنباله $\{x_n\}$ را که در واقع محاسبه مقدار یا حد مجموع یک مجموع جزئی^۹ است، به دست آوریم. اکنون به همان سؤالی که فرض شد در برگه امتحانی آمده است، برمی‌گردیم و به محاسبه آن به کمک تشکیل یک انتگرال معین می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم که $\varepsilon_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ & $k = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right)$$

در این صورت داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\varepsilon_k) \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

در واقع، اگر دنباله $\{x_n\}$ به این شرح مفروض باشد:

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) \quad (*)$$

از مقایسه $(*)$ با

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} \cdot \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} \Rightarrow f(x) = x$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

می‌توان با به دست آوردن ضابطه $f(x)$ و محاسبه آن مقدار

«انتگرال معین» $\int_a^b f(x) dx$ حد دنباله $\{x_n\}$ را تعیین کرد.

البته دنباله $\{x_n\}$ تا اندازه‌ی زیادی به $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

وابسته است.

مراحل محاسبه‌ی حد مجموع به کمک انتگرال معین

۱. عبارت تحت علامت حد $(\lim)$ را تا اندازه‌ی ممکن ساده می‌کنیم تا بتوانیم، از آن a و b ایده‌آل را به دست آوریم و با توجه به آن‌ها $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ مطلوب را تعیین کنیم.

حال انتظار می‌رود که بتوانید دلیل روشنی را بیان کنید، برای این که چرا روشی که به جواب صفر برای محاسبه‌ی حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ (که در ابتدای مقاله مطرح شد) می‌انجامد، نادرست است.

محاسبه‌ی این نمونه از حدود، به علت داشتن ویژگی‌های منحصر به خود، مانند نظیر کردن یک انتگرال معین متناظر با یک مجموع جزئی و محاسبه‌ی این انتگرال معین با استفاده از

روش های انتگرال گیری^۱، از اهمیت خاصی برخوردار است. به همین سبب، در این قسمت به آرائه ی مثال های متنوعی در این رابطه در قالب آزمون چهار گزینه ای و مسئله می پردازیم. آزمون ۱. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه های زیر است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

(۱) صفر $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ (۲)

(۳) $+\infty$ $\ln(2)$ (۴)

جواب: گزینه ی (۴) صحیح است:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} + \frac{1}{n(1+\frac{2}{n})} + \frac{1}{n(1+\frac{3}{n})} + \dots + \frac{1}{n(1+\frac{n}{n})} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right)$$

با فرض این که $a=0$ و $b=1$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \text{ است. بنابراین:}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \text{ داریم:}$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \stackrel{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} f(x) = \frac{1}{1+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln(2)$$

آزمون ۲. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه های زیر است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۱) $\frac{\pi}{2}$

(۳) $\frac{\pi}{6}$

(۴) $\frac{\pi}{2}$

جواب: گزینه ی (۲) صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2(1+\frac{1^2}{n^2})} + \frac{n}{n^2(1+\frac{2^2}{n^2})} + \frac{n}{n^2(1+\frac{3^2}{n^2})} + \dots \right)$$

$$+ \frac{n}{n^2(1+\frac{n^2}{n^2})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{3^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right)$$

با فرض این که $a=0$ و $b=1$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \text{ است. بنابراین:}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{3^2}{n^2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}} \right) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) \text{ داریم:}$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} \stackrel{x=\frac{k}{n}}{\Rightarrow} f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc tan}(x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

آزمون ۳. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه ها است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{3}{n^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{n}{n^2}} \right)$$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)$

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)$



$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{2}{3}(2\sqrt{2}+1) \quad \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

جواب: گزینه ی (۳) صحیح است.

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot (\cos^2(\frac{\pi}{n}) + \cos^2(\frac{2\pi}{n}) + \cos^2(\frac{3\pi}{n}) + \dots$$

$$+ \cos^2(\frac{n\pi}{n}))$$

(*)

از مقایسه ی (*) با

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} (f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \dots + f(\frac{n}{n}))$$

$$f(\frac{k}{n}) = \cos^2(\frac{k\pi}{n}) \Rightarrow f(x) = \cos^2(\pi x)$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{\pi}{n}) + (\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{2\pi}{n}) + (\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{3\pi}{n}) + \dots$$

$$+ (\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{n\pi}{n})) = \int_0^1 \cos^2(\pi x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \cos(2\pi x)) dx$$

$$= \frac{1}{2} (x + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

آزمون ۵. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه های زیر است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-3^2}} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{6} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (3)$$

جواب: گزینه ی (۱) صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-3^2}} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{1}{n^2})}} + \frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{2^2}{n^2})}} + \frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{3^2}{n^2})}} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n^2(4-\frac{n^2}{n^2})}})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2}} + \sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{n^2}} + \sqrt{\frac{1+\frac{3}{n}}{n^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1+\frac{n}{n}}{n^2}})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot (\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}} + \dots + \sqrt{1+\frac{n}{n}})$$

با فرض این که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot (\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n}} + \dots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} (f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \dots + f(\frac{n}{n}))$$

$$f(\frac{k}{n}) = \sqrt{1+\frac{k}{n}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1+x}$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2}} + \sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{n^2}} + \sqrt{\frac{1+\frac{3}{n}}{n^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1+\frac{n}{n}}{n^2}})$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2}-1)$$

آزمون ۴. حاصل حد زیر کدام یک از گزینه های زیر است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{\pi}{n}) + (\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{2\pi}{n}) + (\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{3\pi}{n})$$

$$+ \dots + (\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{n\pi}{n}))$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (3)$$

جواب: گزینه ی (۲) صحیح است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{\pi}{n}) + (\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{2\pi}{n}) + (\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{3\pi}{n})$$

$$+ \dots + (\frac{1}{n}) \cos^2(\frac{n\pi}{n}))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot (\cos^2(\frac{\pi}{n}) + \cos^2(\frac{2\pi}{n}) + \cos^2(\frac{3\pi}{n}) + \dots + \cos^2(\frac{n\pi}{n}))$$

با فرض این که $b=1$ و $a=0$ اختیار شوند،

1. Limit
2. Algebraic
3. Trigonometric
4. L'Hopital Rule
5. Induction
6. Continuous
7. Sequence
8. Definite Integral
9. Partial Sum
10. Integration Methods

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4 - \frac{1^2}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{2^2}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{3^2}{n^2}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{n^2}{n^2}}} \right)$$

با فرض این که $b = 1$ و $a = 0$ اختیار شوند،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \text{ است. بنابراین:}$$

$$x_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4 - \frac{1^2}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{2^2}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{3^2}{n^2}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{n^2}{n^2}}} \right) \quad (*)$$

از مقایسه ی (*) با

$$\{x_n\} = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{k^2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \xrightarrow{x = \frac{k}{n}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 3^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \text{Arc sin}\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

منابع

۱. تلگینی، محمود؛ خرده پژوه، فروزان؛ رجالی، علی؛ و قیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره ی پیش دانشگاهی رشته ی علوم ریاضی. شرکت چاپ و نشر کتاب های دوسی ایران. ۱۳۷۶.
۲. توماس، جورج و فینی، راس. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ترجمه ی مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۷۰.
۳. اشپگل، م. حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته. ترجمه ی خلیل پاریاب. حمید تولایی و بیژن شمس. انتشارات پاریاب. ۱۳۸۱.
4. Gillett, Philip. "Calculus and Analytic Geometry". D. C. Heath (2nd Edition). 1984.
5. Varg, D. W. and Purcell, E. j. "Calculus". Prentice Hall (7th Edition). 1997.



معمای فکری و منطقی ۲

کردند، می آوریم و در دسترس کسی می گذاریم که در عرض شصت ثانیه یا کم تر، نه تنها سن های نسبی این چهار شخص، بلکه چگونگی جفت شدنشان را طی این قسمت از بازی شان مشخص می کند.

M کوچک تر از C است.

H از هر یک از دو بازیکن مقابلش بزرگ تر است.

M از شریک بازی خود بزرگ تر است.

A و C با هم بزرگ تر از H و M هستند.

M, H, C, A، اخیراً طی یک بازی علمی، مشغول بحث درباره ی سنشان بودند. هر یک از آن ها به خوبی از سن بقیه مطلع بود. با وجود این، در مورد این موضوع، همچنان که بزرگ ترها میل دارند، به طور غیرمستقیم و دور سرگرداندن مطلب، چنان بحث می کردند که حتی ذهن دقیق نیز به طور دائم دچار گیجی می شد. در اثبات این که این مطلب نه لطیفه ای محض، نه رجزخوانی صرف است، چهار واقعیتی را که چهار بانوی جوان طی این بخش تیره و مبهم از صحبتشان برملا

مسابقه های ریاضی

منتخبی از مسائل مسابقات ریاضی

دبیرستان های امریکا



اشاره

مسابقات ریاضی دبیرستان های امریکا در سه سطح متفاوت برگزار می شود:

- سطح مقدماتی: که با ۳۰ سؤال پنج گزینه ای نسبتاً آسان برگزار می شود.
- سطح متوسط: که با ۱۵ سؤال تشریحی متوسط برگزار می شود.

● سطح عالی: که همان المپیاد ملی ریاضی کشور امریکاست و مشابه المپیاد بین المللی برگزار می شود.

در شماره ی قبل ۹ مسأله از سؤال های منتخب سطح متوسط (AIME) دهه ی ۱۹۸۰ میلادی را با حل کامل ملاحظه کردید، اینک در ادامه، بقیه مسائل را با حل تشریحی می آوریم.