

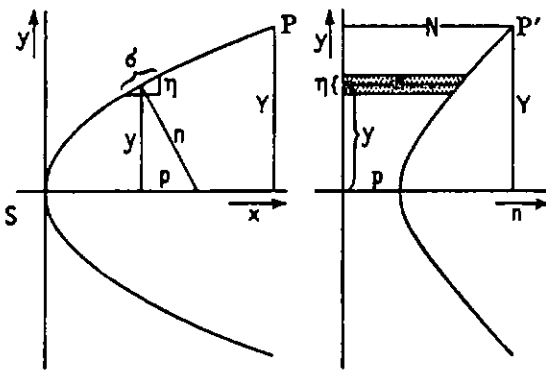
طرح و حل مسائل اساسی

ریاضی به روشهای مقدماتی

(۱۹)

محاسبه طول سهمی

نشان می‌دهیم که PL ، P برابر SP ، طول کمان سهمی، از لحاظ عددی برابر F ، مساحت ذوزنقه هذلولی‌ای است که توسط این هذلولی، محورهای آن، و عمود N محصور شده است که از P' ، نظیر نقطه P هذلولی، بر محور اقصر آن فرود آمده است. (N هم طول P' ، نقطه هذلولی، هم قائم سهمی در نقطه P از سهمی است.)



قطعه $AB = \delta$ از کمان سهمی SP را در نظر می‌گیریم که آن قدر کوچک است که فاصله‌ای راست (موسوم به عنصر) در نظر گرفته شود و از دو انتهای آن AC را، موازی با محور سهمی و $BC = b$ را، موازی با مماس رأسی سهمی، رسم می‌کنیم. در ضمن عرض y و n ، قائم نقطه وسط AB را رسم می‌کنیم، که مثلث قائم‌الزاویه‌ای را با اضلاع y ، n ، و p می‌دهند که مشابه مثلث ABC است. در نتیجه این تشابه تناسب

تعیین طول کمان سهمی. راه حل ابتکاری زیرین در حل این مسأله از کتاب معروف «*Lectiones Geometricae*» اثر اسحق بارو «*Isaac Barrow*» (۱۶۷۷ – ۱۶۳۰) ریاضیدان انگلیسی است که در ۱۶۷۰ در لندن به چاپ رسید.

دستگاه مختصاتی را به سهمی نسبت می‌دهیم که محور x ‌های آن محور سهمی و محور y ‌های آن مماس به سهمی در رأس آن باشد. در این صورت، معادله سهمی به صورت $y^2 = 2px$ درمی‌آید. به این ترتیب، تنها به این نیاز داریم که طول کمان رأسی «*apex arc*» آن را حساب کنیم، یعنی کمانی از سهمی را که مبدأش رأس S سهمی است، زیرا هر کمان را می‌توان به صورت مجموع با تفاضل دو کمان رأسی نمایش داد. فرض می‌کنیم p ، انتهای کمان رأسی SP دارای مختصات x و y ، و طول کمان مورد نظر ما باشد.

از آن جا که تحت قائم سهمی برابر نصف پارامتر P است، بین y ، عرض نقطه‌ای از سهمی، و n ، قائم نظیر این نقطه، رابطه زیر برقرار است.

$$n^2 - y^2 = p^2$$

در این صورت اگر $x|y$ ، هر نقطه سهمی از دستگاه مختصاتمان نقطه $n|y$ را در دستگاه مختصات جدید $n|y$ تخصیص دهیم، در دستگاه جدیدمان هذلولی متساوی‌الساقینی با نیم محور p به دست می‌آوریم.

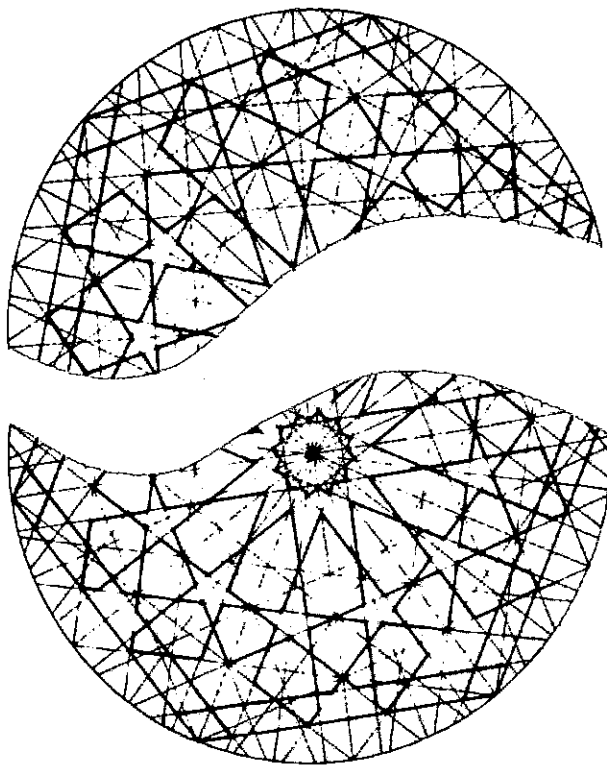
$$\frac{Ny}{\gamma P} = \frac{Xy}{\gamma P \cos \tau} = \frac{X}{\cos \tau} = T$$

$$\frac{N+y}{P} = \frac{N+N \cos \tau}{N \sin \tau} = \frac{1+\cos \tau}{\sin \tau} = \frac{\gamma \cos^2 \frac{\tau}{2}}{\gamma \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2}} = \cot g \frac{\tau}{2}$$

در نتیجه

$$L = T + KL \cot g \frac{\tau}{2}$$

که در آن به جای $\frac{1}{\gamma} P$ کوتاهترین شعاع کانونی را قرار داده ایم.



را به دست می آوریم، و از آن معادله زیر را

$$p\delta = nb \quad (1)$$

از نقاط A' و B' نظیرهای نقاط A و B عمودهایی بر محور اقصی هذلولی وارد می کنیم، و دوزنقه هذلولی ای باریکی را به دست می آوریم که نظیر کمان $A'B'$ است. φ ، مساحت این دوزنقه، حاصل ضرب b ، ارتفاع آن و n ، خط میانه آن است (مورد اخیر به این علت n است که از مرکز ارتفاع مزبور می گذرد و بنابراین از نقطه انتهایی y ، عرض هذلولی، عبور می کند):

$$\varphi = nb \quad (2)$$

از (۱) و (۲) به دست می آوریم

$$p\delta = \varphi$$

اگر این معادله را در مورد هر عنصر کمان سهمی ای SP و دوزنقه هذلولی ای کوچک نظیر آن تشکیل دهیم، و اگر معادلات حاصل را با هم جمع کنیم، در سمت چپ p برابر طول کمان L و در سمت راست F ، مساحت دوزنقه هذلولی ای موصوف در فوق، یعنی معادله زیر را به دست می آوریم.

$$PL = F$$

اکنون از رابطه مربوط به مساحت F ، یعنی

$$F = \frac{Ny}{\gamma} + \frac{P^2}{\gamma} L \frac{N+y}{P}$$

طول کمان مطلوب را به دست می آوریم.

$$L = \frac{Ny}{\gamma P} + \frac{P}{\gamma} L \frac{N+y}{P}$$

که در آن y نمایشگر عرض، و N نمایشگر قائم نقطه انتهایی کمان است.

اکنون معادله به دست آمده را اندکی تغییر می دهیم.

فرض می کنیم T قسمتی از مماس سهمی گذرنده از P ، محصور با P و محور y ها، و τ زاویه شیب سهمی در نقطه P ، یعنی زاویه حاصل از مماس مزبور با محور x ها (و، در عین حال زاویه حاصل از قائم N با محور y ها) باشد. در این صورت