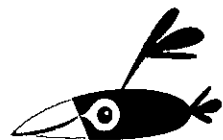


مجموعه‌ی زیرمجموعه‌ها



● حمیدرضا امیری



حل: ابتدا فرض می‌کنیم $A \subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $p(A) \subseteq p(B)$ (به روش عضوگیری دلخواه)
 $[X \in p(A) \Rightarrow X \subseteq A \xrightarrow{A \subseteq B} X \subseteq B \Rightarrow X \in p(B)]$
 $\Rightarrow p(A) \subseteq p(B)$

حال فرض می‌کنیم $p(A) \subseteq p(B)$ و ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$ ،
 $x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in p(A) \xrightarrow{p(A) \subseteq p(B)} \{x\} \in p(B)$
 $\Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B$

نتیجه: اگر A و B دو مجموعه باشند همواره داریم:

$$A = B \Leftrightarrow p(A) = p(B)$$

مثال ۵: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه مانند A و B ثابت کنید:

$$(I) \quad p(A) \cap p(B) = p(A \cap B)$$

$$(II) \quad p(A) \cup p(B) \subseteq p(A \cup B)$$

حل: برای اثبات روابط فوق نیاز به بیان دو ویژگی در مجموعه‌ها و بین اعمال اجتماع و اشتراک داریم یعنی:

$$I) \quad \begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{matrix} \Leftrightarrow A \subseteq (B \cap C)$$

$$II) \quad \begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq C \end{matrix} \Rightarrow A \subseteq (B \cup C)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید عکس رابطه‌ی (II) در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. و مثال‌های نقض فراوانی می‌توان برای آن یافت در صورتی که رابطه‌ی (I) به صورت یک قضیه‌ی دو شرطی بیان شده و اثبات این روابط به خصوص از روش عضوگیری دلخواه بسیار ساده است!

می‌دانیم اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد آنگاه 2^n زیرمجموعه دارد، حال اگر همه‌ی این زیرمجموعه‌ها را اعضای مجموعه‌ای در نظر بگیریم، آن را مجموعه‌ی توانی A نامیده و با $p(A)$ نمایش می‌دهیم. پس، $p(A)$ یعنی مجموعه‌ی شامل همه‌ی زیرمجموعه‌های A که اگر تعداد اعضای A را با $|A|$ و تعداد اعضای $p(A)$ را با $|p(A)|$ نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$I) \quad |A| = n \Leftrightarrow |p(A)| = 2^n$$

$$II) \quad B \subseteq A \Leftrightarrow B \in p(A)$$

تذکر مهم: چون همواره $\emptyset \subseteq A$ پس بنابر (II) همواره $\emptyset \in p(A)$ و بنابر این همواره برای هر مجموعه‌ی دلخواه مانند A داریم، $p(A) \neq \emptyset$.

مثال ۱: اگر $A = \{2, 3, 4\}$ در این صورت

$$p(A) = \{\emptyset, A, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

مثال ۲: اگر $A = \emptyset$ در این صورت

$$p(A) = \{\emptyset\}$$

مثال ۳: اگر $|A| = 2$ (مجموعه‌ای ۲ عضوی است) در این

صورت مجموعه‌ی $p(p(p(A)))$ چند عضو دارد؟

$$|A| = 2 \Rightarrow |p(A)| = 2^2 = 4 \Rightarrow |p(p(A))| = 2^4 = 16$$

$$\Rightarrow |p(p(p(A)))| = 2^{16}$$

مثال ۴: اگر A و B دو مجموعه باشند ثابت کنید:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow p(A) \subseteq p(B)$$

حال رابطه‌ی (I) را ثابت می‌کنیم،

$$\begin{aligned} x \in [p(A) \cap p(B)] &\Leftrightarrow x \in p(A), x \in p(B) \\ &\Leftrightarrow x \subseteq A, x \subseteq B \Leftrightarrow x \subseteq (A \cap B) \Leftrightarrow x \in p(A \cap B) \\ &\Rightarrow p(A) \cap p(B) = p(A \cap B) \end{aligned}$$

(توجه دارید که تمام روابط برگشت پذیر بوده و تساوی بین دو مجموعه حاصل شد)

در اثبات رابطه‌ی (II) که در زیر مشاهده خواهید کرد با توجه به رابطه‌ی ذکر شده که قبلاً یک طرفه بودن آن تأکید شد، فقط $p(A) \cup p(B) \subseteq p(A \cup B)$ ثابت می‌شود

$$\begin{aligned} x \in [p(A) \cup p(B)] &\Leftrightarrow x \in p(A), x \in p(B) \\ &\Leftrightarrow x \subseteq A, x \subseteq B \Rightarrow x \subseteq (A \cup B) \Rightarrow x \in p(A \cup B) \\ &\Rightarrow p(A) \cup p(B) \subseteq p(A \cup B) \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $A = \{1\}$ و $B = \{2, 4\}$ در این صورت $A \cup B = \{1, 2, 4\}$ و با تشکیل $p(A)$ و $p(B)$ و $p(A \cup B)$ مشاهده می‌کنید که $\{1, 2, 4\} \in p(A \cup B)$ ولی $\{1, 2, 4\} \notin p(A) \cup p(B)$ پس عکس رابطه‌ی (II) برقرار نمی‌باشد.

مثال ۶: اگر A و B دو مجموعه باشند ثابت کنید:

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow p(A) \cap p(B) = \{\emptyset\}$$

حل:

$$(1) \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cap B) = p(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$(2) \quad p(A \cap B) = p(A) \cap p(B) \quad \text{از طرفی}$$

$$(1), (2) \Rightarrow p(A) \cap p(B) = \{\emptyset\}$$

$$\xrightarrow{(2)} p(A) \cap p(B) = \{\emptyset\} \Rightarrow p(A \cap B) = \{\emptyset\}$$

$$p(A \cap B) = \{\emptyset\} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

مثال ۷: برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه ثابت کنید:

$$p(A - B) \subseteq p(A) - p(B)$$

و سپس برای عکس رابطه، مثال نقض بزنید.

$$x \in p(A - B) \Rightarrow x \subseteq (A - B) \xrightarrow{(A - B) \subseteq A} x \subseteq A$$

$$x \subseteq A, x \not\subseteq B \Rightarrow x \in p(A), x \notin p(B) \Rightarrow$$

$$x \in (p(A) - p(B)) \Rightarrow p(A - B) \subseteq p(A) - p(B)$$

حال اگر فرض کنیم $A = \{1, 2\}$ و $B = \{2, 3\}$ در این صورت

واضح است که، $\{1, 2\} \in p(A) - p(B)$ در صورتی که $(A - B) = \{1\}$ و $p(A - B) = \{\emptyset, \{1\}\}$ و $\{1, 2\} \notin p(A - B)$ بنابراین عکس رابطه‌ی فوق برقرار نمی‌باشد. مثال ۸: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند ثابت کنید:

$$p(A) - p(B) = p(A) - p(A \cap B)$$

حل: می‌دانیم در حالت کلی و برای هر دو مجموعه‌ی دلخواه

همواره $(A - B) = A - (A \cap B)$ ، بنابراین می‌توان نوشت:

$$p(A) - p(B) = p(A) - \underbrace{[p(A) \cap p(B)]}_{p(A \cap B)} = p(A) - p(A \cap B)$$

نتیجه‌ی مهم: با توجه به این که $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

$|A|$ یعنی تعداد اعضای A پس می‌توان نوشت:

$$|p(A) - p(B)| = |p(A)| - \underbrace{|p(A) \cap p(B)|}_{p(A \cap B)} = |p(A)| - |p(A \cap B)|$$

مثال ۹: اگر $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a, \{a\}\}\}, b\}$ و

$B = \{b, \{a\}, \{\{a\}\}, \{b\}\}$ در این صورت مجموعه‌ی

$p(A) - p(B)$ چند عضو دارد؟

حل: می‌دانیم $A \cap B = \{b, \{a\}\}$ مجموعه‌ای ۲ عضوی

است پس،

$$|p(A) - p(B)| = |p(A)| - |p(A \cap B)| = 2^4 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

مثال ۱۰: اگر $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$ در این صورت

مجموعه‌ی $p(A) - A$ چند عضو دارد؟

$$|p(A) - A| = |p(A)| - |p(A) \cap A|$$

حل:

بنابراین باید بررسی کنیم که $p(A)$ و A چند عضو مشترک

دارند، با توجه به تعریف مجموعه‌ی A واضح است که

$\{a\} \in p(A)$ و $\{\{a\}\} \in p(A)$ و $\{a, \{a\}\} \in p(A)$ که همگی

اعضای A نیز هستند پس، $|p(A) \cap A| = 3$ و لذا داریم،

$$|p(A)| - |p(A) \cap A| = 2^4 - 3 = 13$$