

اشاره

با مفهوم تابع و تابع های یک به یک و پوششی، در پایه دوم متوسطه آشنا شده اید و مطالب تکمیلی را در حسابان سال سوم فرا گرفته اید. در این مقاله با استفاده از این مفاهیم نشان می دهیم که مجموعه ی اعداد گویا، قابل شمارش و نامتناهی (متناهی شمارا) هستند؛ یعنی مجموعه ی Q یا IN هم ارز است. به تعبیر دیگر، ثابت می کنیم که تعداد اعداد طبیعی و اعداد گویا با هم برابر است.

مجموعه ی Q متناهی شمارا است

میرشیرام صدر

مجموعه های متناهی و نامتناهی

شما با اصطلاحات «مجموعه ی متناهی» و «مجموعه ی نامتناهی» آشنایی دارید. مجموعه ی انگشتان یک دست خود را مجموعه ای متناهی و مجموعه ی اعداد طبیعی و مجموعه ی نقاط واقع بر یک قطعه خط مستقیم را نامتناهی می شماریم. در حالت کلی، مجموعه ای متناهی است که یا تهی و یا به طور دقیق شامل n عضو باشد، که n عدد صحیح مثبت است. یا به عبارت دیگر، مجموعه ای متناهی است که شامل تعداد معینی عضو متفاوت باشد و در شمارش عضوهای متفاوت مجموعه، کار شمارش به پایان برسد. در غیر این صورت مجموعه نامتناهی است.

مثال ۱. فرض کنیم مجموعه ی M روزهای هفته باشد، آن گاه M متناهی است.

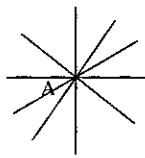
[جمعه، پنجشنبه، چهارشنبه، سهشنبه، دوشنبه، یکشنبه، شنبه] $M =$
مثال ۲. فرض کنیم: $\{x \mid x \text{ رودخانه ای در دنیا: } x\} = P$. اگرچه شمردن همه ی رودخانه های دنیا مشکل است، اما با توجه به تعریف، مجموعه ی P متناهی است.

مثال ۳. مجموعه ی دایره هایی که از مبدأ مختصات می گذرند، مجموعه ای نامتناهی است.



مثال ۴. مجموعه جواب‌های معادله‌ی $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ متناهی است، زیرا معادله دارای این مجموعه جواب است: $\{-3, -1, 1, 3\}$.

مثال ۵. مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی خطوط گذرنده از یک نقطه‌ی ثابت، مجموعه‌هایی نامتناهی می‌باشند.



عدد اصلی یک مجموعه

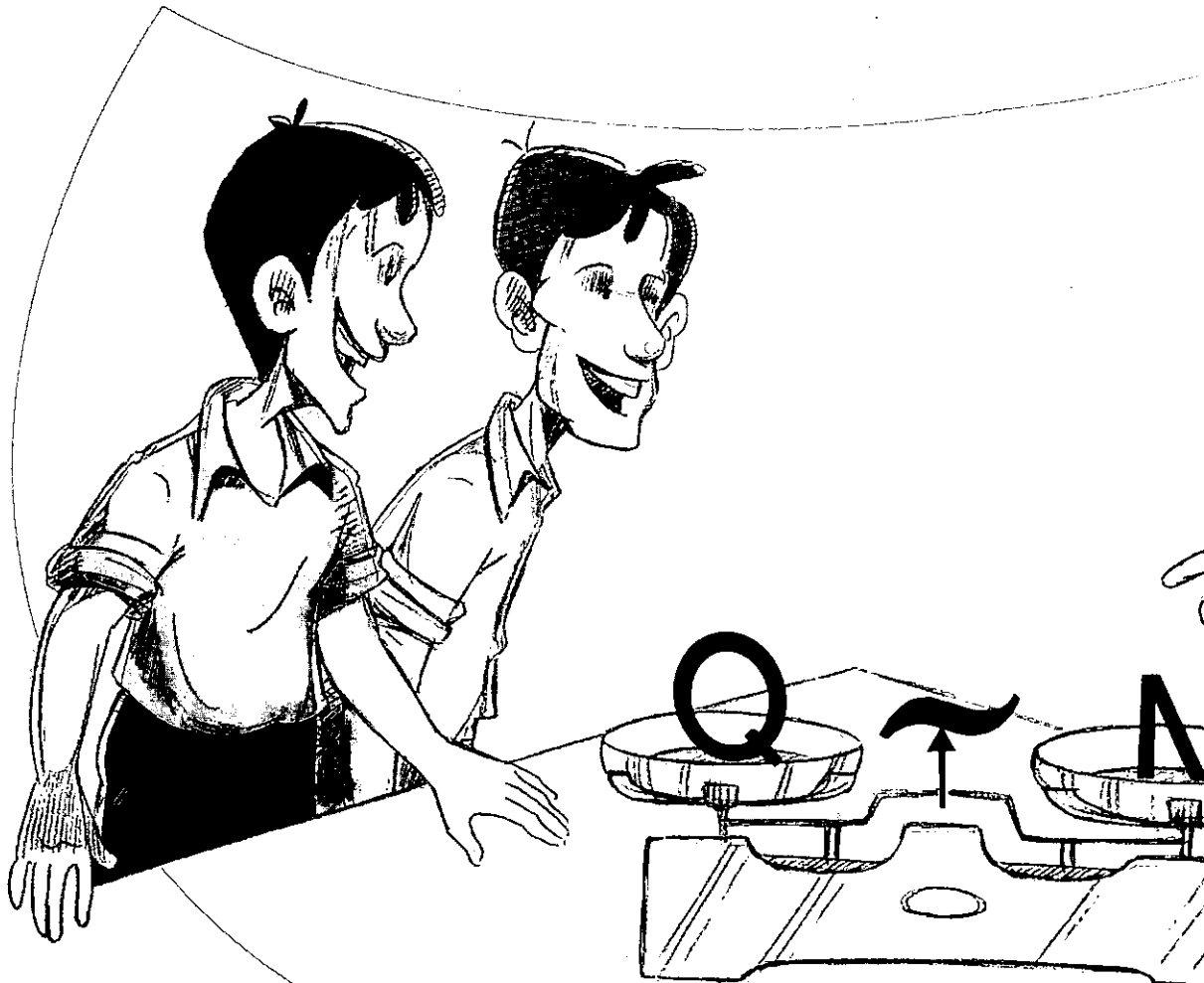
فرض کنیم، A مجموعه‌ای متناهی باشد. با توجه به تعریفی که از مجموعه‌ی متناهی بیان شد، اعضای مجموعه‌ی A قابل شمارش هستند. تعداد اعضای مجموعه A را عدد اصلی مجموعه‌ی A می‌گوییم و با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

عدد اصلی هر یک از مجموعه‌های $\emptyset$ ، $\{a_1\}$ ، $\{a_1, a_2\}$ ، $\{a_1, a_2, a_3\}$ ، $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ و ... به ترتیب برابر با 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 و ... است. بنابراین عدد اصلی هر مجموعه‌ی متناهی مانند A ، عدد صحیح و نامنفی $n(A)$ است، به طوری که: $0 \leq n(A) \leq k$; $k \in \mathbb{N}$.

عدد اصلی مجموعه‌های نامتناهی را در مبحث مجموعه‌های «شمارا» و «ناشمارا» بیان خواهیم کرد.

مجموعه‌ی هم‌ارز

فرض کنید کلاسی که شما در آن درس می‌خوانید، ۳۰ دانش‌آموز دارد. یک روز معلم ریاضی وارد کلاس می‌شود و به هر یک از دانش‌آموزان یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ را نسبت می‌دهد؛ به طوری که اگر هر عددی بین ۱ تا ۳۰ انتخاب شود، دانش‌آموزی هست که متناسب به آن عدد باشد و برعکس، اگر دانش‌آموزی را در نظر بگیریم، یکی از اعداد ۱ تا ۳۰ متناسب به آن دانش‌آموز است. در این حالت می‌گوییم، مجموعه‌ی دانش‌آموزان و مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۳۰ هم‌ارز هستند. بنابراین، مجموعه‌ی



ناتهی A را هم ارز با مجموعه ی ناتهی B گوئیم، هرگاه هر عضو A فقط و فقط با یک عضو B و هر عضو B فقط و فقط با یک عضو A مرتبط باشد، و می نویسیم: $A \sim B$.

نکته ی ۱. در صورتی که: $A \sim B$ ، آن گاه عدد اصلی A با عدد اصلی B برابر است؛ یعنی:

$$A \sim B \Rightarrow n(A) = n(B)$$

مسئله ی ۱. نشان دهید که مجموعه ی اعداد طبیعی با مجموعه ی اعداد زوج طبیعی هم عدد هستند.
حل: برای این که نشان دهیم، عدد اصلی دو مجموعه ی $\mathbb{N}$ و E با یکدیگر برابرند، کافی است نشان دهیم که این دو مجموعه می توانند هم ارز باشند. با توجه به نمودار ۱ ملاحظه می کنیم که: $\mathbb{N} \sim E$ ، در نتیجه دو مجموعه ی $\mathbb{N}$ و E هم عدد هستند.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ E: & 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & \dots \end{array} \quad (\text{نمودار ۱})$$

با توجه به نمودار ۱ ملاحظه می کنیم که برای هر عدد طبیعی n، فقط و فقط یک عضو منحصر به فرد مانند $2n$ از اعداد زوج وجود دارد که با آن مرتبط است. و برعکس، برای هر $2n$ از مجموعه ی E، فقط و فقط عضو منحصر به فرد $\frac{2n}{2} = n$ از $\mathbb{N}$ وجود دارد که با آن در ارتباط است.

نکته ی ۲. مجموعه ی $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}$ را قطعه ای از اعداد طبیعی می گوئیم، هرگاه A مجموعه ای متناهی باشد و: $A \neq \emptyset$. در این صورت A می تواند با قطعه ای از اعداد طبیعی هم ارز باشد. یعنی برای هر مجموعه ی متناهی $A \neq \emptyset$ داریم:

$$A \sim \mathbb{N}_k$$

اکنون این سؤال پیش می آید که آیا درباره ی هر دو مجموعه ی دل خواه می توان گفت تعداد عضوهایشان مساوی است یا نه. درباره ی مجموعه های متناهی با شمردن عضوها و یا جفت کردن اعضای آن می توان به این سؤال پاسخ داد، اما درباره ی مجموعه های نامتناهی، جواب سؤال بستگی به این دارد که تعداد مساوی عضو داشتن را چگونه تعریف کنیم تا بگوئیم دو مجموعه «هم عدد» هستند.

برای بررسی هم ارزی بین دو مجموعه ی نامتناهی، تعریف زیر را که نظریه ی مجموعه ها را دگرگون کرد و به ریاضی دان آلمانی، ژرژ کانتور منسوب است، مطرح کنیم.

مجموعه ی A هم ارز با مجموعه B است، اگر تابعی چون $f: A \rightarrow B$ موجود باشد، به طوری که f هم یک به یک و هم پوششی باشد. در این صورت می گوئیم: تابع f تناظری یک به یک بین مجموعه های A و B تعریف می کند.

مسئله ی ۲. مجموعه ی $M = \{1, 10, 100, 1000, \dots\}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید: $\mathbb{N} \sim M$.

حل: باید تابعی یک به یک و پوششی بین $\mathbb{N}$ و M تعریف کنیم. تابع f را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \longrightarrow M \\ f(n) = 10^{n-1} \end{cases}$$

این تابع یک به یک است، زیرا:

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\Rightarrow 10^{n_1-1} = 10^{n_2-1} \\ &\Rightarrow n_1 - 1 = n_2 - 1 \\ &\Rightarrow n_1 = n_2 \end{aligned}$$

تابع f پوششی است، زیرا برای هر $y \in M$ ، یک عدد طبیعی مانند $n = 1 + \log y$ وجود دارد، به طوری که: $y = f(n)$.

یعنی برای هر $y \in M$ ، وجود دارد: $n \in \mathbb{N}$ ، به طوری که:

$$\begin{aligned} y = 10^{n-1} &\Rightarrow \log y = \log 10^{n-1} \\ &\Rightarrow \log y = n - 1 \\ &\Rightarrow n = (1 + \log y) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

مثال ۶. بین مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی که مجذور کامل هستند، توسط تابع f به صورت زیر تناظری یک به یک موجود است.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}; \quad A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$$

مجموعه‌ی اعداد طبیعی مجذور کامل

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow A \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

تابع f با ضابطه‌ی فوق، یک به یک و پوششی است (چرا؟). لذا: $\mathbb{N} \sim A$.

مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

تا این جا دیدیم که مجموعه‌های متناهی قابل شمارش هستند. هم چنین، با مجموعه‌هایی نامتناهی آشنا شدیم که با اعداد طبیعی هم عدد یا هم ارز بودند. بنا به تعریف، مجموعه‌ی A را «شمارا» یا «شمارش پذیر» می‌گوییم، هرگاه متناهی باشد، یا: $A \sim \mathbb{N}$.

مجموعه‌های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{E}$ ، $\mathbb{O}$ (مجموعه‌ی اعداد فرد طبیعی) و هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbb{N}$ را مجموعه‌هایی «شمارا» و نامتناهی یا «متناهی شمارا» می‌گوییم.

مسئله‌ی ۳. ثابت کنید مجموعه‌ی اعداد صحیح «متناهی شمارا» است.

اثبات: به این منظور ثابت می‌کنیم که: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

تابع f با ضابطه‌ی زیر یک به یک و پوششی است (چرا؟)

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{زوج } n \\ \frac{1-n}{2} & \text{فرد } n \end{cases} \end{cases}$$

در نتیجه: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. چون نامتناهی و شماراست، در نتیجه $\mathbb{Z}$ متناهی شماراست. با توجه به تابع f ، دو مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ به صورت نمودار ۲ هم‌ارزند:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{Z}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \dots \end{array} \quad (\text{نمودار ۲})$$

نکته‌ی ۳. اگر A زیر مجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbb{Z}$ باشد، در این صورت داریم:

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{E} \sim \mathbb{O} \sim A$$

همه‌ی مجموعه‌های فوق هم‌عدد هستند و بنا به تعریف، عدد اصلی همگی آنان را $\aleph_0$ (الف صفر) می‌نامیم. بنابراین داریم:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{E}| = |\mathbb{O}| = |A| = \aleph_0$$

حال فرض کنیم، مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین ۲ و ۳ (شامل خود ۲ و خود ۳) در دست باشد و بخواهیم این مجموعه، یعنی $A = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 3\}$ را برچسب گذاری کنیم. واضح است که اولین عضو این مجموعه را می‌توان عدد ۲ در نظر گرفت و برچسب شماره‌ی ۱ را به عدد ۲ اختصاص داد. بلافاصله به دنبال دومین عدد بعد از ۲ می‌گردیم تا برچسب شماره‌ی ۲ را که آماده کرده‌ایم، روی آن بچسبانیم. آیا می‌توان یک عدد حقیقی بلافاصله بعد از ۲ نام برد؟ جواب منفی است. ما نمی‌توانیم عدد حقیقی بلافاصله پس از ۲ را معرفی یا پیدا کنیم؛ به گونه‌ای که بین آن عدد و عدد ۲ هیچ عدد حقیقی دیگری وجود نداشته باشد. زیرا ثابت شده است که: «همواره بین هر دو عدد حقیقی متمایز، بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد.» بنابراین، هم چنان در به کار بردن برچسب شماره‌ی ۲ ناتوان می‌مانیم. پس، مجموعه‌ی فوق شمارش ناپذیر یا ناشماراست. تعریف: مجموعه‌ی A را شمارش ناپذیر می‌نامیم، هرگاه شمارش پذیر نباشد و به عبارت دیگر «متناهی نباشد و با $\mathbb{N}$ هم‌ارز نباشد». پس:

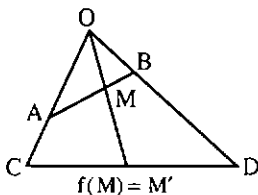
$A \sim \mathbb{N}$ و A نامتناهی است) $\Leftrightarrow A$ شمارش ناپذیر است.

مثال ۷. مجموعه‌ی اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ و تمام زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ به شکل $A = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ (که نقاط ابتدایی و انتهایی مجموعه‌ی A تأثیری در «ناشمارایی» ندارند.) و مجموعه‌ی اعداد گنگ، «ناشمارا» یا شمارش ناپذیر هستند.

مثال ۸. فرض کنیم: $G = [0, 1]$ و $H = [2, 5]$. ملاحظه می‌کنیم که دو مجموعه‌ی H و G ناشمارا هستند. تابع $f: G \rightarrow H$ با ضابطه‌ی $f(x) = 3x + 2$ را در نظر می‌گیریم. با کمی دقت ملاحظه می‌کنیم که f هم یک به یک است و هم پوششی. پس: $G \sim H$ ؛ یعنی G هم‌ارز H می‌باشد؛ زیرا:

$$y = [2, 5] \Rightarrow 2 \leq 3x + 2 \leq 5 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

مثال ۹. فرض کنیم پاره خط مستقیمی به طول یک سانتی متر و CD قطعه خطی مستقیم به طول دل‌خواه باشد. مطابق شکل ۲، تابع f را بر مجموعه‌ی نقاط AB با این ضابطه تعریف می‌کنیم که $f(M)$ یا M' نقطه‌ی تقاطع خط OM با CD است. به وضوح می‌توان دید که f تناظر یک به یک بین مجموعه‌ی نقاط پاره خط AB و مجموعه‌ی نقاط پاره خط CD برقرار می‌کند.

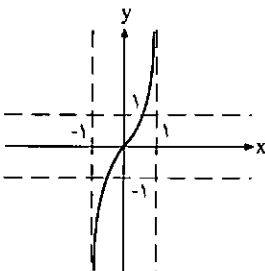


مثال ۱۰. تابع $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ یک به یک و پوشاست. بنابراین، بازه‌ی $(-1, 1)$ هم‌ارز

مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. یعنی مجموعه‌ی اعداد حقیقی و بازه‌ی $(-1, 1)$ «هم‌عدد» هستند. چون تابع $f(x)$ دارای قدر مطلق است، بنابراین $f(x)$ تابعی دوضابطه‌ای، به صورت زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x} & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به دامنه و ضابطه‌ی تابع f ، نمودار آن به صورت نمودار ۳ است. نمودار به روشنی نشان می‌دهد که f یک به یک و پوششی است.



نکته‌ی ۴. اگر A بازه‌ای از اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت داریم:

$$A \sim \mathbb{R}$$

بنا به تعریف، عدد اصلی $\mathbb{R}$ و A را با α نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$|\mathbb{R}| = |A| = \alpha$$

اگر بخواهیم مقایسه‌ای بین α و $\aleph_0$ داشته باشیم، باید بگوییم که α به مراتب بزرگ‌تر از $\aleph_0$ است. در تئوری مجموعه‌های پیشرفته ثابت می‌کنند که: $\alpha = 2^{\aleph_0}$.

مثال ۱۱. هر دنباله‌ی نامتناهی $a_1, a_2, a_3, \dots$ عضوهای متمایز شمارای نامتناهی است. زیرا هر دنباله، اساساً تابعی مانند

است که این تابع یک به یک و پوششی است. برای مثال، هر یک از مجموعه‌های زیر شمارای نامتناهی (متناهی شمارا) هستند:

$$\left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

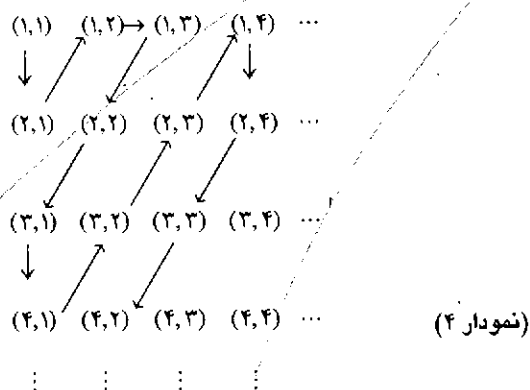
$$\{1, -2, 3, -4, \dots, (-1)^{n-1}n, \dots\}$$

$$\{(1,1), (4,8), (9,27), \dots, (n^2, n^3), \dots\}$$

مسئله ۴. ثابت کنید $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ متناهی شماراست.

حل:

روش اول: با توجه به مسئله ی قبل و نمودار زیر، مجموعه ی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ متناهی شماراست.



$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1,1), (2,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,1), (4,1), (3,2), \dots\}$$

روش دوم: تابع زیر یک به یک و پوششی است و نشان می دهد که: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. چون $\mathbb{N}$ متناهی شماراست، پس $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ نیز متناهی شماراست.

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1) \end{cases}$$

f یک به یک است، زیرا:

$$f(m_1, n_1) = f(m_2, n_2) \Rightarrow 2^{m_1-1}(2n_1-1) = 2^{m_2-1}(2n_2-1)$$

$$\Rightarrow m_1 = m_2, n_1 = n_2 \Rightarrow (m_1, n_1) = (m_2, n_2)$$

از طرف دیگر، برای هر $y \in \mathbb{N}$ می توان نوشت:

$$y = 2^{m-1}(2n-1)$$

زیرا با استفاده از تقسیم همواره می توان نوشت:

$$y = 2^i \times l; \quad i \in \mathbb{W}, l \in \mathbb{O}$$

اکنون اگر قرار دهیم: $m = i+1$ و $n = \frac{l}{2}(l+1)$ ، خواهیم داشت:

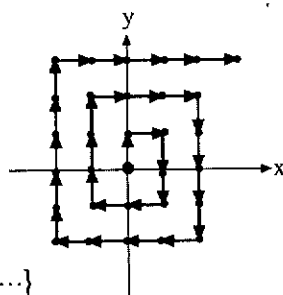
$$f(m, n) = y = 2^{m-1}(2n-1)$$

پس f پوششی است و در نتیجه: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

مسئله ۵. نشان دهید $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ متناهی شماراست.

حل:

روش اول: با توجه به مثال ۱۱ و نمودار ۵، می توان $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را به صورت دنباله ای نامتناهی نوشت:



$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,0), (1,-1), (0,-1), \dots\}$$

روش دوم: اجتماع چند مجموعه‌ی متناهی شمارا یک مجموعه‌ی متناهی شماراست.

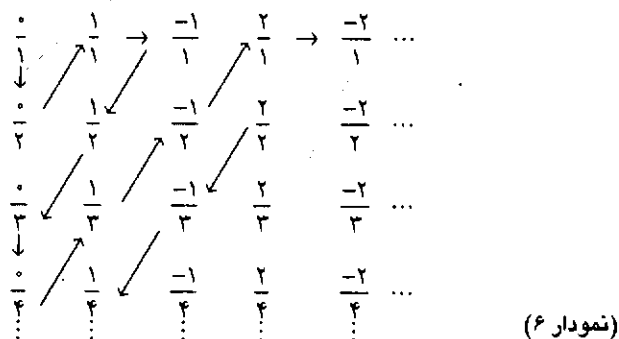
$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = [\mathbb{N} \times \mathbb{N}] \cup [-\mathbb{N} \times \mathbb{N}] \cup [\mathbb{N} \times (-\mathbb{N})] \cup [(-\mathbb{N}) \times (-\mathbb{N})] \cup [\mathbb{Z} \times \{0\}] \cup [\{0\} \times \mathbb{Z}]$$

نتیجه: $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ متناهی شماراست.

مسئله‌ی ۶. ثابت کنید Q متناهی شماراست.

حل:

روش اول: با توجه به مسئله‌ی ۱ و نمودار ۶، Q را به صورت دنباله‌ای نامتناهی می‌توان نوشت.



عوامل تکراری را حذف می‌کنیم و از روی نمودار ۶ مجموعه‌ی Q را می‌نویسیم:

$$Q = \left\{ 0, 1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 2, -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

روش دوم: مجموعه‌ی تمام اعداد گویای مثبت را با نماد Q^+ و مجموعه‌ی تمام اعداد گویای منفی را با نماد Q^- نمایش می‌دهیم. واضح است که:

$$Q = Q^+ \cup \{0\} \cup Q^-$$

چون: $Q^+ \sim Q^-$ ، پس برای این که ثابت کنیم Q متناهی شماراست، کافی است نشان دهیم که Q^+ متناهی شماراست. به این منظور تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} f: Q^+ \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ f\left(\frac{m}{n}\right) = (m, n) \end{cases}$$

در این تابع m و n نسبت به هم اول اند، یعنی: $(m, n) = 1$.

تابع f یک به یک و پوششی است. (چرا؟) پس داریم:

$$Q^+ \sim f(Q^+) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

چون $\mathbb{N}$ نامتناهی و $\mathbb{N} \subset Q^+$ ، پس Q^+ نامتناهی است. در نتیجه $f(Q^+)$ یک زیر مجموعه‌ی نامتناهی مجموعه‌ی متناهی شمارای $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ است. از این رو $f(Q^+)$ متناهی شمارا و در نتیجه Q^+ متناهی شماراست. در اثبات این قسمت، از قضیه‌ی زیر استفاده کرده‌ایم که آن را بدون اثبات می‌پذیریم:

قضیه: هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی از یک مجموعه‌ی متناهی شمارا، مجموعه‌ای متناهی شماراست.

ملاحظه کردید که Q^+ متناهی شماراست، چون: $Q^+ \sim Q^-$. پس Q^- نیز متناهی شماراست. از آن جا که اجتماع چند مجموعه‌ی متناهی شمارا، یک مجموعه‌ی متناهی شماراست، پس Q متناهی شماراست.