

مجموعه های

متناهی، نامتناهی

شمارا و ناشمارا

• حمیدرضا امیری

تناظر یک به یک: اگر A و B دو مجموعه باشند و به ازای هر عضو از A یک عضو از B و به ازای هر عضو از B یک عضو از A وجود داشته باشد، می‌گوییم A و B تناظر یک به یک دارند و می‌نویسیم $A \approx B$.

برای مثال، اگر فرض کنیم $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ در این صورت واضح است که $A \approx B$ که این تناظر یک به یک را به شکل زیر ملاحظه می‌کنید:

A:	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
B:	a	b	c	d	e	f

همان‌طور که در تعریف دقت کردید، مفهوم تناظر یک به یک بین دو مجموعه‌ی A و B هیچ محدودیتی برای نامتناهی بودن این دو مجموعه ایجاد نمی‌کند و اگر این مفهوم را به دقت به کار ببریم، به سادگی و به صورت زیر می‌توان

وقتی صحبت از مجموعه‌های متناهی و در مقابل آن‌ها مجموعه‌های نامتناهی می‌شود، مجموعه‌هایی چون مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی یا مجموعه‌ی اعداد فرد دو رقمی به عنوان مجموعه‌های متناهی، و مجموعه‌هایی مانند مجموعه‌ی اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) یا مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) را می‌توان به عنوان مجموعه‌های نامتناهی در نظر گرفت. حال این سؤال پیش می‌آید که آیا مجموعه‌های نامتناهی مانند $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ در یک گروه محسوب می‌شوند؟!

در این مقاله می‌کوشیم، علاوه بر معرفی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، مجموعه‌های نامتناهی را به دو دسته‌ی نامتناهی شمارا و نامتناهی ناشمارا تقسیم و با مثال‌هایی تفاوت این دو گروه از مجموعه‌های نامتناهی را مشخص کنیم. قبل از هر چیز به تعریف مفهوم تناظر یک به یک نیاز داریم که این مفهوم را به این صورت بیان می‌کنیم:

وابستگی این دو مفهوم به مفهوم «تعداد اعضا»، ابتدا مفهوم تعداد اعضا را بررسی می‌کنیم.

در مورد مجموعه‌هایی مانند مجموعه‌ی دانش‌آموزان و مجموعه‌ی صندلی‌ها، راه مستقیمی که برای مقایسه‌ی تعداد اعضای این دو مجموعه وجود دارد، شمارش تعداد اعضای هر مجموعه و مقایسه‌ی اعداد حاصل است.

اما آیا از این طریق می‌توان تعداد نقاط دو قطعه خط یا تعداد اعداد طبیعی و اعداد طبیعی زوج را با هم مقایسه کرد؟ برای رهایی از این مشکل، استفاده از روش کانتور بهترین راه حل است و آن برقراری تناظر یک به یک بین دو مجموعه است.

اگر مجموعه‌ی A را مجموعه‌ی دانش‌آموزان خارج از کلاس و مجموعه‌ی B را مجموعه‌ی صندلی‌های داخل کلاس تصور کنیم و بخواهیم بین A و B تناظری یک به یک برقرار سازیم، سه حالت ممکن است رخ بدهد:

۱. حالتی که هیچ دانش‌آموزی خارج از کلاس نمانده باشد و هیچ صندلی خالی نیز در کلاس نباشد. در این حالت، بین دو مجموعه‌ی A و B تناظری یک به یک برقرار شده است که می‌گوییم تعداد اعضای A و B با هم برابرند (A و B هم عدد هستند).

۲. حالتی که همه‌ی صندلی‌ها اشغال شده باشند و تعدادی دانش‌آموز نیز در خارج کلاس باقی مانده باشند. در این جا تعداد اعضای A بیش‌تر از تعداد صندلی‌ها بوده است. در این حالت، B با زیرمجموعه‌ای از A هم عدد شده است و نیز A با هیچ زیرمجموعه‌ای از B هم عدد نیست.

۳. حالتی که همه‌ی دانش‌آموزان روی صندلی نشسته باشند، ولی بعضی از صندلی‌ها خالی مانده باشند. در این حالت می‌توان گفت: تعداد اعضای B بیش‌تر از تعداد اعضای A است.

حال می‌توان با استمداد از مفهوم تناظر یک به یک، مقایسه‌ی بین تعداد اعضای دو مجموعه مانند A و B را مستقل از مفهوم عدد به صورت این تعریف‌ها تعمیم داد:

تعریف: دو مجموعه‌ی A و B را هم عدد می‌گوییم و می‌نویسیم: $A \approx B$ ؛ هرگاه تناظری یک به یک بین A و B برقرار باشد.

تعریف: اگر مجموعه‌ی A با زیرمجموعه‌ای از B هم عدد باشد، ولی B با هیچ زیرمجموعه‌ای از A هم عدد نباشد، می‌گوییم A ضعیف‌تر از B است و می‌نویسیم $A < B$.



نشان داد که مجموعه‌ی اعداد طبیعی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج تناظر یک به یک دارند؛ یعنی $N \approx 2N$

$N:$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
$2N:$	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	

(کمی جلوتر همین تناظر یک به یک بین مجموعه‌های نامتناهی را به صورتی دقیق‌تر و با تعریف تابعی دوسویی، یعنی تابعی یک به یک و پوشا بین دو مجموعه، نشان خواهیم داد.) حال به سراغ بحث اصلی می‌رویم و با تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی آغاز می‌کنیم.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعداد حروف صدا دار انگلیسی از تعداد حروف انگلیسی کم‌تر است زیرا مجموعه‌ی اول جزو مجموعه‌ی دوم است. آیا این اصل در مورد مجموعه‌هایی چون N و زیرمجموعه‌های آن نیز صادق است؟ آیا می‌توان گفت تعداد اعضای مجموعه‌ی اعداد طبیعی و زوج، از تعداد اعضای N کم‌تر است؟

برای پاسخ به این سؤال باید مفاهیم متناهی و نامتناهی را در مجموعه‌ها بررسی کنیم و برای آن تعریفی جامع و مانع ارائه دهیم.

قبل از بررسی دو مفهوم متناهی و نامتناهی، به دلیل

است) k می نامیم و می نویسیم: $n(A) = k$

در واقع وقتی $A \approx N_k$ ، بنابر مطالب گفته شده، بین A و N_k تناظری یک به یک برقرار می شود و این به نوعی شمارش اعضای A توسط N_k محسوب می شود.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

$$N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), \dots, (k, a_k)\}$$

مجموعه های متناهی ویژگی هایی دارند که آن ها را از مجموعه های نامتناهی جدا می کنند. مهم ترین آن ها عبارتند از:

قضیه ۱: هر زیر مجموعه ای یک مجموعه ای متناهی، متناهی است و اگر A مجموعه ای متناهی باشد و $B \subseteq A$ ، آن گاه $0 \leq n(B) \leq n(A)$

قضیه ۲: هیچ مجموعه ای متناهی نمی تواند با یک زیر مجموعه ای حقیقی خود (زیر مجموعه ای حقیقی A مجموعه ای است چون B که $B \approx A$ و $B \subset A$) هم عدد باشد.

قضیه ۳: اگر A و B مجموعه هایی متناهی باشند، در این صورت:

(I) $(A \cup B)$ و $(A \cap B)$ و $(A - B)$ متناهی هستند

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (II)$$

$$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) \quad (III)$$

حال این مسأله پیش می آید که مجموعه ای چون $\mathbb{N}$ با هیچ قطعه ای از $\mathbb{N}$ یعنی با هیچ قطعه ای از خودش هم عدد نیست. پس متناهی نیست. به چنین مجموعه هایی چه می توان گفت؟ درست است این مجموعه ها که متناهی نیستند، نامتناهی نامیده می شوند، یعنی در حالت کلی:

تعریف: مجموعه ای A را نامتناهی می نامیم، هرگاه متناهی نباشد. به عبارت دیگر، مجموعه ای A نامتناهی است، هرگاه تهی نباشد و با هیچ قطعه ای از اعداد طبیعی هم عدد نباشد.

مجموعه های نامتناهی نیز ویژگی های خاص خود را دارند که مهم ترین آن ها عبارتند از:

قضیه ۱: هر مجموعه که زیر مجموعه ای نامتناهی داشته باشد، نامتناهی است.

قضیه ۲: هر مجموعه که با یک زیر مجموعه ای حقیقی خود هم عدد باشد، نامتناهی است.

قضیه: رابطه ای هم عددی در مجموعه ای مجموعه ها یک رابطه ای هم ارزی است.

$$I) A \approx A$$

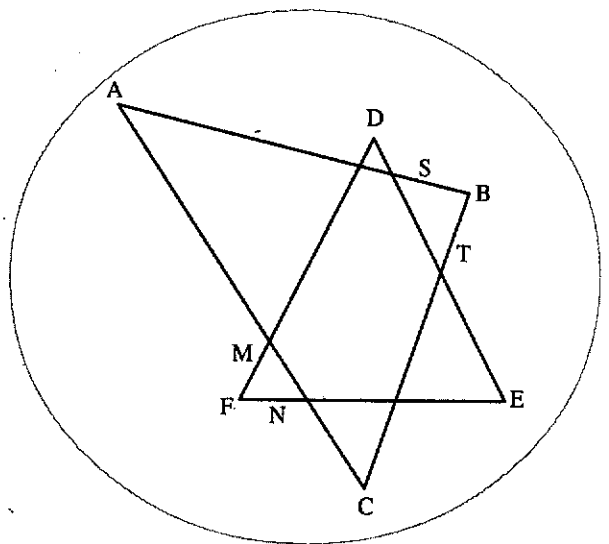
$$II) A \approx B \Rightarrow B \approx A$$

$$III) A \approx B \text{ و } B \approx C \Rightarrow A \approx C$$

قضیه ای زیر را که به قضیه ی «کانتور و برنشتاین» یا قضیه ی «هم ارزی» معروف است، می پذیریم:

قضیه: اگر مجموعه ای A با زیر مجموعه ای از B و نیز مجموعه ای B با زیر مجموعه ای از A هم عدد باشند، آن گاه دو مجموعه ای A و B با یکدیگر هم عدد خواهند بود.

مسأله: ثابت کنید مجموعه نقاط پاره خط AC و DE با یکدیگر هم عدد هستند.



اثبات: تناظری یک به یک بین مجموعه نقاط دو پاره خط AC و ST وجود دارد. پس AC با زیر مجموعه ای از DE هم عدد است و نیز بین مجموعه نقاط DE و MN تناظر یک به یک وجود دارد. پس DE با زیر مجموعه ای از AC هم عدد است. پس بنابر قضیه ی هم ارزی، AC و DE هم عددند.

تعریف: به ازای عدد طبیعی k ، مجموعه ای اعداد طبیعی کوچک تر یا مساوی با k را قطعه ای k ام از اعداد طبیعی می نامیم و با N_k نشان می دهیم:

$$N_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$$

مثال:

$$N_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ و } N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

تعریف: مجموعه ای A را متناهی می نامیم، هرگاه تهی باشد یا با قطعه ای مانند N_k از اعداد طبیعی هم عدد باشد. اگر $A = \emptyset$ باشد، می گوئیم تعداد اعضای A صفر است و اگر $A \approx N_k$ باشد، تعداد اعضای A را (که عددی منحصر به فرد

۶. مجموعه‌ی $N \times N$ شماراست؛

$$f: N \times N \rightarrow N$$

$$f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$$

(به عنوان تمرین ثابت کنید این تابع دوسویی است)

۷. مجموعه‌ی Z (اعداد صحیح) شماراست.

(ثابت می‌شود که f تابعی دوسویی است و

$$f: N \rightarrow Z$$

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \times (-1)^n$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اعداد صحیح و مثبت توسط تأثیر f روی اعداد طبیعی زوج و بقیه توسط اعداد طبیعی فرد تولید می‌شوند).

$$f(1) = 0 \times (-1)^1 = 0, \quad f(2) = 1 \times (-1)^2 = 1$$

$$f(3) = 1 \times (-1)^3 = -1, \quad f(4) = 2 \times (-1)^4 = 2$$

$$f(5) = 2 \times (-1)^5 = -2, \quad f(6) = 3 \times (-1)^6 = 3$$

$$f(2n+1) = \left\lfloor \frac{2n+1}{2} \right\rfloor \times (-1)^{2n+1} = n + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \times (-1)^{2n+1} = -n$$

$$f(2n) = \left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor \times (-1)^{2n} = n \times (-1)^{2n} = n$$

قضیه‌های مربوط به مجموعه‌های شمارا

قضیه‌ی ۱: هر مجموعه‌ی نامتناهی، زیرمجموعه‌ای شمارا دارد.

اثبات: فرض کنیم A مجموعه‌ای نامتناهی باشد. عضو دلخواهی از A انتخاب می‌کنیم و آن را a_1 می‌نامیم. چون A نامتناهی است، پس $A - \{a_1\}$ تهی نیست. عضو دلخواهی از $A - \{a_1\}$ انتخاب می‌کنیم و آن را a_2 می‌نامیم. پس $a_1 \neq a_2$. به همین ترتیب، به ازای عدد طبیعی n اعضای a_1 و a_2 و... و a_n را به طریق فوق که همگی دوه‌دو متمایز هستند، انتخاب می‌کنیم و از مجموعه‌ی $A - \{a_1, \dots, a_n\}$ نیز عضو دلخواه a_{n+1} را. در نهایت مجموعه‌ی $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ را که مجموعه‌ای شمارا و زیرمجموعه‌ی A است می‌سازیم.

قضیه‌ی ۲: هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی شمارا، حداکثر شماراست.

اثبات: فرض کنیم A مجموعه‌ای شمارا باشد و $E \subseteq A$ ، اگر E متناهی باشد که حکم ثابت است و اگر E متناهی نباشد،

قضیه‌ی ۳: مجموعه‌ی اعداد طبیعی نامتناهی است (کاربرد قضیه‌ی ۲) (زیرا N با $2N$ تناظر یک‌به‌یک دارد).

$$\begin{array}{ccccccc} N: & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\ 2N: & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \end{array} \quad \begin{array}{l} f: N \rightarrow 2N \\ f(n) = 2n \end{array}$$

(تابعی دوسویی است)

قضیه‌ی ۴: هر مجموعه که با یک مجموعه‌ی نامتناهی هم‌عدد باشد، نامتناهی است. نتیجه: Z نامتناهی است.

$$f: N \rightarrow Z$$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{زوج } n \\ \frac{1-n}{2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

(f تناظری یک‌به‌یک است یا تابعی دوسویی است) سرانجام به بحث بسیار مهم و شاید تا حدی چالش‌برانگیز می‌رسیم به نام مفهوم شمارایی و ناشمارایی!

چه مجموعه‌هایی شمارا یا شمارش‌پذیرند؟ آیا مفهوم شمارش‌پذیری و مفهوم متناهی در مجموعه‌ها معادل یکدیگرند؟ برای پاسخ به این سؤال‌ها باید تعریف مجموعه‌های شمارا و ناشمارا به درستی تبیین شود.

تعریف: مجموعه‌ی A را شمارا یا شمارش‌پذیر می‌نامیم، هرگاه با N هم‌عدد باشد و اگر مجموعه‌ای متناهی یا شمارا باشد، آن را حداکثر شمارا می‌نامیم. با توجه به تعریف بالا می‌توان گفت:

۱. مجموعه‌های شمارا نامتناهی هستند (زیرا با N هم‌عدد هستند)؛

۲. هر مجموعه‌ی متناهی حداکثر شماراست؛

۳. اعضای مجموعه‌های شمارا را می‌توان توسط N برچسب‌گذاری کرد. در واقع N مجموعه‌ای برچسب‌گذار است، همان‌طور که اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد و $n(A) = k$ ، مجموعه‌ی A را می‌توان توسط N_k برچسب‌گذاری کرد؛

۴. مجموعه‌های شمارا دوه‌دو هم‌عدد هستند؛

۵. هر یک از مجموعه‌های N و $2N$ (اعداد طبیعی زوج) و $2N+1$ و Z و W شمارا هستند؛

تفصیح اندیشه

● حسین نامی ساعی

کی حوض پر می شود؟

یک لوله ی آب، حوضی را در ۳۵ دقیقه، لوله ی دیگری در ۴۰ دقیقه، و لوله ی بعدی در ۵۰ دقیقه پر می کنند. اگر هر سه لوله ی آب هم زمان باز باشند، در چه مدت حوض پر می شود؟

حل: حجم حوض را x لیتر فرض می کنیم. در این صورت، سرعت جریان آب از لوله ی اول برابر $\frac{x}{۳۵}$ لیتر در دقیقه است.

(چون: زمان $\times$ سرعت = حجم حوض)
بنابراین، مقدار آبی که در T دقیقه، از لوله ی اول جاری می شود، برابر است با: $\frac{x}{۳۵} \times T$ لیتر.
با باز بودن هر سه لوله در T دقیقه، زمان T به روش زیر محاسبه می شود:

$$\left(\frac{x}{۳۵} \times T\right) + \left(\frac{x}{۴۰} \times T\right) + \left(\frac{x}{۵۰} \times T\right) = x$$

$$\frac{T}{۳۵} + \frac{T}{۴۰} + \frac{T}{۵۰} = ۱$$

$$\frac{۴۰T + ۳۵T + ۲۸T}{۱۴۰۰} = ۱$$

$$\frac{۱۰۳T}{۱۴۰۰} = ۱ \Rightarrow T = \frac{۱۴۰۰}{۱۰۳} \approx ۱۳\frac{۶}{۱۰۳}$$

یعنی $۱۳\frac{۶}{۱۰۳}$ دقیقه زمان لازم است تا با باز بودن هر سه لوله، حوض پر شود.

بنابر قضیه ی قبل، زیر مجموعه ای شمارا چون E_1 دارد. و چون A شماراست، پس $E_1 \approx A$. از طرف دیگر، $E \subseteq A$ و $E \approx E$ پس A زیر مجموعه ای هم عدد با E و E نیز زیر مجموعه ای هم عدد با A دارد. پس بنابر قضیه ی هم ارزی، $E \approx A$ و بنابرین E شماراست.

قضیه ی ۳: اگر A مجموعه ای شمارا و B مجموعه ای حداکثر شمارا و ناتهی باشد، مجموعه ی $A \times B$ شماراست.

$$\left. \begin{array}{l} A \Rightarrow A \approx \mathbb{N} \\ B \Rightarrow B \approx \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow A \times B \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \Rightarrow A \times B \text{ شماراست}$$

در اثبات فوق، از قضیه ی زیر که آن را بدون اثبات می پذیریم استفاده شده است:

$$\begin{array}{l} A \approx B \\ C \approx D \end{array} \Rightarrow A \times C \approx B \times D$$

قضیه ی ۴: اگر E مجموعه ای ناشمارا باشد و $A - E \approx E$ باشد، آن گاه $E - A \approx E$.
قضیه ی ۵: هر مجموعه ی نامتناهی حداقل با یک زیر مجموعه ی حقیقی خود هم عدد است. اگر A نامتناهی باشد و B زیر مجموعه ای متاهی و ناتهی از A باشد، واضح است که $(A - B)$ یک زیر مجموعه ی حقیقی A است و بنابر قضیه ی ۴، $A - B \approx A$.

شاید جالب ترین نتیجه ای که بتوان از مطالب گفته شده گرفت، شمارش پذیر بودن مجموعه ی اعداد گویا یعنی $\mathbb{Q}$ باشد که اگر فرض کنیم:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

واضح است که با فرض $(m, n) = ۱$ و n نسبت به m اول باشند، هر $\frac{m}{n}$ را به شکل منحصر به فردی می توان به صورت زوج مرتب (m, n) نمایش داد. در این حالت و با توجه به تعریف ضرب دکارتی می توان نوشت:

$$\{(m, n) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

پس ملاحظه می کنید که $Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ و چون قبلاً ثابت شد که $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ شماراست، پس Q نیز شماراست و نیز می توان نتیجه گرفت که $(\mathbb{R} - Q)$ یعنی مجموعه ی اعداد گنگ، مجموعه ای ناشماراست.