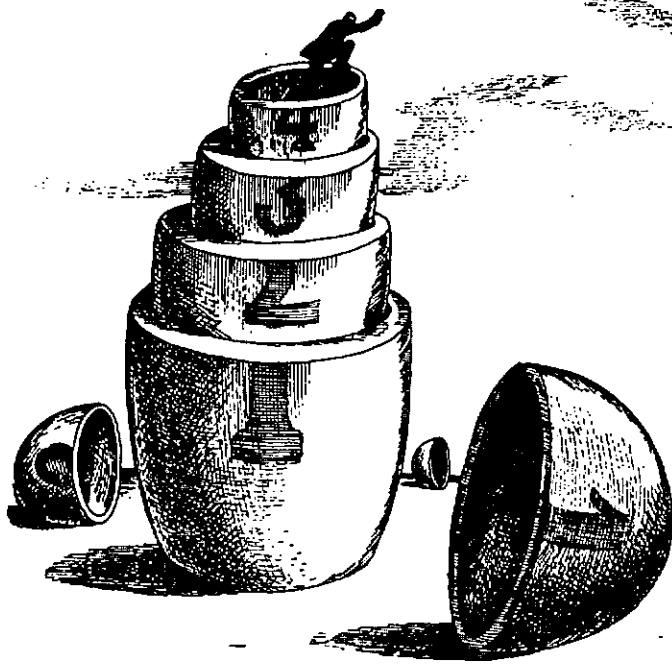




مجموع K عدد طبیعی متوالی اولیه

● میر شهرام صدر

طبیعی به دست می‌آید، مجموعه اعداد فرد طبیعی را با حرف
 $O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ نمایش می‌دهیم:

با دقت در جدول: $(k \in \mathbb{N})$

$2k$	2	4	6
$2k-1$	$2-1=1$	$4-1=3$	$6-1=5$
	$8-1=7$	...	$2k$
	7	...	$2k-1$

می‌بینیم که مجموعه اعداد فرد طبیعی را می‌توان به صورت
 $O = \{2k-1 | k \in \mathbb{N}\}$ نشان داد، یا اینکه k امین عدد فرد
طبیعی برابر با $2k-1$ $(k \in \mathbb{N})$ می‌باشد، برای مثال هشتمین
عدد فرد طبیعی $2 \times 8 - 1 = 15$ یا سی‌امین عدد فرد طبیعی
 $2 \times 30 - 1 = 59$ می‌باشد.

هدف از این مقاله این است که مجموع k عدد طبیعی متوالی
اولیه را به دست آوریم، برای این منظور k عدد طبیعی متوالی
اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$1, 2, 3, \dots, k-2, k-1, k$$

فرض کنیم مجموع این عددها برابر با S باشند:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (k-2) + (k-1) + k$$

اکنون مجموع S را دوبار می‌نویسیم، با این شرط که در

سطر دوم، ردیف جمله‌ها برعکس باشند؛ اگر اعداد دو سطر را

تحصیل ریاضی با حساب ابتدایی آغاز می‌گردد که در آن با
اعداد طبیعی و «چهار عمل اصلی» بر آنها آشنا شده‌اید، این
اعداد وسیله‌ای برای شمردن و شماره‌گذاری هستند.

همان‌طور که می‌دانید مجموعه اعداد طبیعی $(\mathbb{N})$ متشکل
از اعداد زوج و فرد است، هر عدد طبیعی مضرب ۲ را زوج و
هر عدد طبیعی را که مضرب ۲ نباشد، فرد گوئیم.

مجموعه اعداد زوج طبیعی را با حرف E نمایش
می‌دهیم:

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

با دقت در جدول:

$(k \in \mathbb{N})$

k	1	2	3	4	...	k
$2k$	$2 \times 1 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 3 = 6$	$2 \times 4 = 8$		$2k$

ملاحظه می‌کنید که مجموعه اعداد زوج طبیعی را می‌توان به
صورت $E = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$ نشان داد، یا اینکه k امین عدد زوج
طبیعی برابر با $2k$ $(k \in \mathbb{N})$ است، به عنوان مثال دهمین عدد
زوج طبیعی $2 \times 10 = 20$ یا سی‌امین عدد زوج طبیعی
 $2 \times 30 = 60$ می‌باشد.

اگر از هر عدد زوج طبیعی یک واحد کم کنیم، یک عدد فرد

۱. Natural numbers

۲. Even

۳. odd

نظیر به نظیر با هم جمع کنیم :

$$2S = k(2k+2) \Rightarrow 2S = 2k(k+1)$$

با تقسیم طرفین برابری بالا بر عدد ۲ داریم :

$$S = k(k+1) \quad (2)$$

به عنوان مثال مجموع پنج عدد زوج اولیه به کمک رابطه (۲) برابر است با :

$$S = 2+4+6+8+10 = 5(5+1) = 30$$

همچنین مجموع هفتاد عدد زوج اولیه برابر است با :

$$S = 2+4+6+\dots+140 = 70(70+1) = 4970$$

اگر k عدد فرد طبیعی را به صورت زیر در نظر بگیریم، مشابه با روند قبل می توان مجموع k عدد فرد اولیه را به دست آورد :

$$1, 3, 5, \dots, (2k-5), (2k-3), 2k-1$$

فرض کنیم مجموع این عددها برابر با S باشند، اگر مجموع S را در دو سطر بنویسیم، به طوری که در سطر دوم ترتیب عددها برعکس باشند و اعداد دو سطر را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم :

$$S = 1+3+5+\dots+(2k-5)+(2k-3)+(2k-1)$$

$$S = (2k-1)+(2k-3)+(2k-5)+\dots+5+3+1$$

$$S+S = (2k-1+1)+(2k-3+3)+(2k-5+5)$$

$$+\dots+(5+2k-5)+(3+2k-3)+(1+2k-1)$$

$$2S = 2k+2k+2k+\dots+2k+2k+2k$$

k بار

$$2S = k \times 2k \Rightarrow 2S = 2k^2$$

با تقسیم طرفین برابری بالا بر عدد ۲ داریم :

$$S = k^2 \quad (3)$$

با توجه به رابطه (۳) ملاحظه می کنیم که مجموع k عدد فرد متوالی اولیه برابر با k^2 و مربع کامل است. به عنوان مثال به کمک رابطه (۳) مجموع ۱۵ عدد فرد متوالی اولیه برابر است با :

$$S = 1+3+5+\dots+29 = 15^2 = 225$$

همچنین مجموع ۵۰ عدد فرد اولیه برابر است با :

$$S = 1+3+5+\dots+99 = 50^2 = 2500$$

$$S = 1+2+3+\dots+(k-2)+(k-1)+k$$

$$+ S = k+(k-1)+(k-2)+\dots+3+2+1$$

$$S+S = (k+1)+(k-1+2)+(k-2+3)+\dots$$

$$+(k-2+3)+(k-1+2)+(k+1)$$

$$2S = (k+1)+(k+1)+(k+1)+\dots+(k+1)+$$

$$(k+1)+(k+1)$$

k مرتبه

$$2S = k \times (k+1)$$

با تقسیم طرفین برابری بالا بر عدد ۲ داریم :

$$S = \frac{k(k+1)}{2} \quad (1)$$

روایتی درباره ریاضیدان نامی، کارل فردریش گوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵) وقتی دانش آموز دبستان بود وجود دارد که راه حل فوق را در پاسخ به معلم ریاضی خود برای مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰ به کار برد. به عنوان مثال ؛ مجموع ۲۰ عدد طبیعی اولیه متوالی به کمک رابطه (۱) برابر است با :

$$S = 1+2+3+\dots+20 = \frac{20(20+1)}{2} = 210$$

همچنین مجموع ۱۰۰ عدد طبیعی متوالی اولیه برابر است

$$S = 1+2+3+\dots+100 = \frac{100(100+1)}{2} = 5050 \quad \text{با :}$$

به همین ترتیب می توان مجموع k عدد زوج طبیعی اولیه را محاسبه کرد، برای این منظور k عدد زوج اولیه را به صورت زیر در نظر می گیریم :

$$2, 4, 6, 8, \dots, (2k-4), (2k-2), 2k$$

اکنون اگر مجموع عددهای بالا را برابر با S بگیریم و آن را مانند قبل دوبار بنویسیم، سپس اعداد دو سطر را نظیر به نظیر با هم جمع کنیم :

$$S = 2+4+6+\dots+(2k-4)+(2k-2)+2k$$

$$S = 2k+(2k-2)+(2k-4)+\dots+6+4+2$$

$$S+S = (2k+2)+(2k-2+4)+(2k-4+6)+\dots+$$

$$(2k-4+6)+(2k-2+4)+(2k+2)$$

$$2S = (2k+2)+(2k+2)+(2k+2)+\dots+(2k+2)+$$

$$(2k+2)+(2k+2)$$

k بار

منابع:

۱- آنالیز ریاضی - دکتر غلامحسین مصاحب

۲- خلاصه ریاضی، تألیف جورج بؤلیا، ترجمه پرویز شهریاری