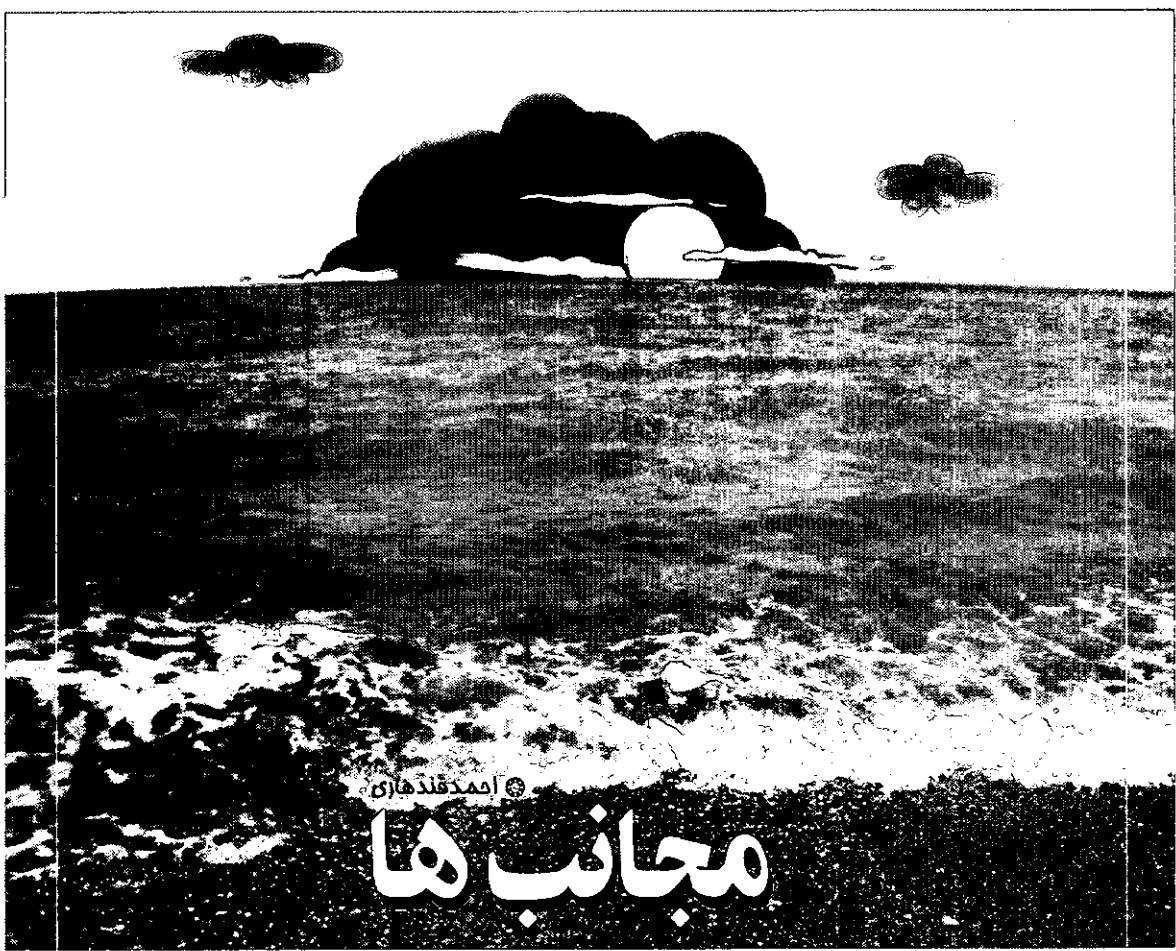




ایمدهای

مجانباها

شاخه بی نهایت منحنی

مثال ۳. منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = \frac{x^2+1}{x}$ دارای

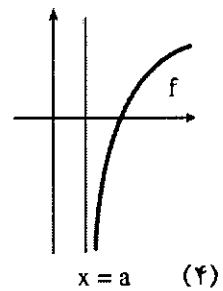
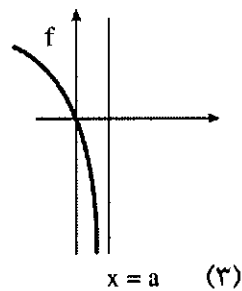
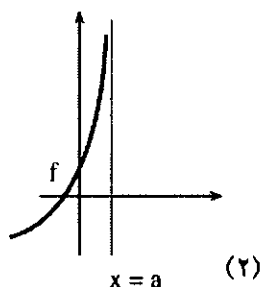
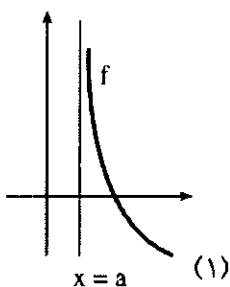
شاخه بی نهایت است؛ زیرا: $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$

تعریف خط مجانب

هرگاه نمودار (C) نمایش تابع با ضابطه $y = f(x)$ دارای شاخه بی نهایت باشد، خط (D) را مجانب آن شاخه منحنی گوئیم؛ هرگاه: فاصله نقطه متغیر M روی آن شاخه تا خط D، وقتی نقطه M روی آن شاخه بی نهایت دور شود، به سمت صفر میل کند.

۱. مجانب قائم

به چهار شکل زیر توجه کنید.



می گوئیم منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = f(x)$ دارای شاخه بی نهایت است؛ هرگاه نقطه یا نقاطی روی نمودار تابع f وجود داشته باشد که لا اقل یکی از مختصات آن ها به سمت بی نهایت میل کند.

مثال ۱. منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = x^2 + x$ دارای شاخه بی نهایت است؛ زیرا:

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$$

مثال ۲. منحنی نمایش تابع با ضابطه $y = \frac{x-1}{x-4}$ دارای

شاخه بی نهایت است؛ زیرا:

$$x \rightarrow 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-1}{x-4} = \infty \text{ یا } y \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow 1 \Rightarrow y \rightarrow \frac{6}{\pm} \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$$

پس خط به معادله $x=1$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

$$x \rightarrow -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

پس خط به معادله $x=-1$ مجانب قائم تابع فوق نیست.

$$\text{مثال ۶. تابع با ضابطه } y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2(x-3)}$$

در نظر می گیریم.

$$(x-2)^2(x-3) = 0 \Rightarrow x=2 \text{ یا } x=3$$

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} y = \frac{0}{\pm} = \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$$

پس خط به معادله $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow y \rightarrow \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{(x-2)(x-3)} = \frac{4}{\pm} \rightarrow \pm\infty$$

$$\Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$$

پس خط به معادله $x=2$ هم مجانب قائم تابع فوق است.

تذکر ۳. اگر در یک تابع، $x \rightarrow a$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} y = \frac{0}{0}$ ،

چنانچه پس از رفع ابهام $\lim_{x \rightarrow a} y = \infty$ ، آن گاه خط به معادله $x=a$ مجانب قائم نمودار تابع است.

$$\text{مسئله ۱. در تابع با ضابطه } f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + (m-1)x + 1}$$

m را چنان بیابید تا منحنی تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: باید معادله $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ فقط یک ریشه

داشته باشد، لذا باید $\Delta = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow m-1 = \pm 2 \Rightarrow m = 1 \pm 2 \Rightarrow m = 3 \text{ یا } m = -1$$

در شکل (۱) داریم: $x \rightarrow a^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

در شکل (۲) داریم: $x \rightarrow a^- \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

در شکل (۳) داریم: $x \rightarrow a^- \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

در شکل (۴) داریم: $x \rightarrow a^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

در هر چهار شکل، خط به معادله $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f گوئیم.

تعریف: اگر در تابع با ضابطه $y = f(x)$ داشته باشیم:

$x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ ، آن گاه $y \rightarrow +\infty$ یا $y \rightarrow -\infty$ ،

در این صورت خط به معادله $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع f گوئیم.

تذکر ۱. در چهار شکل بالا، تابع f در $x=a$ تعریف نشده است؛ یعنی اگر $x=a$ ، آن گاه y وجود ندارد؛ ولی اگر $x \rightarrow a$ ، آن گاه $y \rightarrow +\infty$ یا $y \rightarrow -\infty$.

مثال ۴. تابع با ضابطه $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ را در نظر

می گیریم. در این تابع داریم:

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ و اگر $x \rightarrow 2$ ، آن گاه $y \rightarrow \pm\infty$ ، پس بنا به تعریف، خط

به معادله $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع f است و $x=2$ در دامنه تعریف تابع نیست.

حال تابع با ضابطه $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$ را در نظر

می گیریم.

در این تابع داریم:

$$D_f = [1, +\infty) - \{2\}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2$$

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$$

پس خط به معادله $x=2$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

در این تابع، x نمی تواند به سمت -2 میل کند؛ زیرا هیچ

یک از دو طرف -2 ، در دامنه تعریف تابع واقع نیست.

تذکر ۲. اگر خط به معادله $x=a$ مجانب قائم نمودار یک

تابع مانند f باشد، آن گاه $x=a$ عضو دامنه نیست؛ ولی لااقل

a^+ یا a^- باید عضو دامنه f باشند.

مثال ۵. تابع با ضابطه $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$ را

در نظر می گیریم.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -1$$

مسئله ۲. در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-2}{x^2 + (m-4)x - 2}$ را چنان بیابید تا نمودار تابع یک مجانب قائم داشته باشد. حل: مانند مسئله قبل عمل می کنیم. می گوئیم باید معادله $x^2 + (m-4)x - 2 = 0$ یک ریشه داشته باشد؛ یعنی باید $\Delta = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (m-4)^2 + 8$ ملاحظه می کنیم که عبارت $(m-4)^2 + 8$ همواره مثبت است و نمی تواند برابر صفر باشد، پس چه باید کرد؟ باید m را چنان پیدا کرد تا نمودار تابع، یک مجانب قائم داشته باشد. (به مثال ۵ دقت کنید.) m را چنان پیدا می کنیم تا یکی از دو ریشه مخرج عدد ۲ باشد؛ یعنی $x = 2$ را در معادله $x^2 + (m-4)x - 2 = 0$ قرار می دهیم، بنابراین:

$$4 + (m-4)(2) - 2 = 0 \Rightarrow 2m - 6 = 0 \Rightarrow m = 3$$

حال $m = 3$ را بررسی می کنیم.

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2 + (m-4)x - 2}$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2 - x - 2}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 2$$

$$x \rightarrow -1 \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm \infty$$

$$x \rightarrow 2 \Rightarrow f(x) = \frac{0}{0} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

پس خط به معادله $x = 2$ نمی تواند مجانب قائم تابع f باشد؛ زیرا g آن به سمت ∞ میل نکرده است. بنابراین نمودار تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

مسئله ۳. در تابع با ضابطه زیر:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{(m-4)x^2 - 2x + 1}$$

m را چنان بیابید تا منحنی تابع یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: به حل این مسئله بیشتر توجه کنید. باید m را چنان

بیابیم تا نمودار تابع f یک مجانب قائم داشته باشد.

$$(m-4)x^2 - 2x + 1 = 0$$

بنابراین سه حالت زیر را دارد:

$$\Delta' = b'^2 - ac = 0 \Rightarrow 1 - (m-4) = 0 \Rightarrow m = 5 \quad (1)$$

$$a = 0 \text{ یا } m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \quad (2)$$

(۳) یکی از جواب های معادله «مخرج»، برابر یکی از

جواب های معادله «صورت» باشد.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2$$

$$x = 2 \xrightarrow{\text{در معادله «مخرج»}} (m-4)(4) - 4 + 1 = 0 \Rightarrow 4m - 19 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{19}{4}$$

$$x = -2 \xrightarrow{\text{در معادله «مخرج»}} (m-4)(4) + 4 + 1 = 0 \Rightarrow 4m - 11 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{11}{4}$$

$$a, y = \frac{x^2 + 5}{x^2 + (a+b)x + 2a} \text{ مسئله ۴. در تابع با ضابطه}$$

و b را چنان بیابید تا دو خط به معادله های $x = 2\sqrt{3} - 2$ و $x = 2\sqrt{3} + 2$ مجانب های قائم نمودار تابع باشد.

حل: در واقع ریشه های معادله $x^2 + (a+b)x + 2a = 0$

$(2\sqrt{3} - 2)$ و $(2\sqrt{3} + 2)$ هستند. اگر x' و x''

ریشه های معادله فوق باشند، داریم:

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = 2a$$

$$x' \cdot x'' = (2\sqrt{3} - 2)(2\sqrt{3} + 2) = 12 - 4 = 8$$

$$2a = 8 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -(a+b)$$

$$x' + x'' = 2\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{3} + 2 = 4\sqrt{3}$$

$$-(a+b) = 4\sqrt{3} \Rightarrow a+b = -4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 4+b = -4\sqrt{3} \Rightarrow b = -4\sqrt{3} - 4 \text{ یا } \boxed{b = -4(\sqrt{3} + 1)}$$

مسئله ۵. معادله مجانب قائم به معادله

$$\frac{x-2}{x} + \frac{y-1}{y+1} = 4 \text{ را بیابید.}$$

حل: روش اول:

$$\frac{(x-2)(y+1) + x(y-1)}{x(y+1)} = 4$$

$$\Rightarrow 4xy + 4x = xy + x - 2y - 2 + xy - x$$

$$\Rightarrow 2xy + 2y = -4x \Rightarrow 2(x+1)y = -4x$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2x}{x+1}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

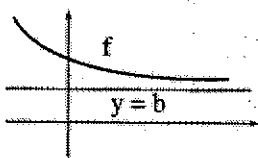
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \frac{5\pi}{3}$$

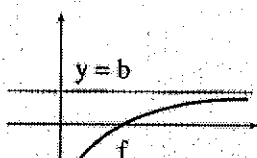
پس خط‌های به معادله‌های $x = 0$ و $x = 2\pi$ و $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$ مجانب‌های قائم منحنی تابع فوق است.

۲. مجانب افقی

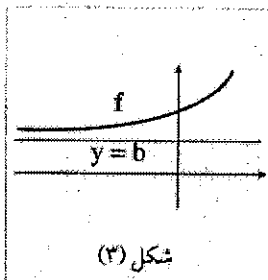
به نمودارهای زیر توجه کنید.



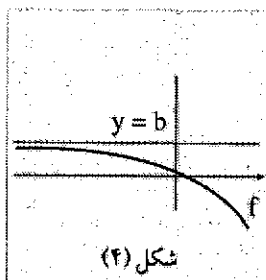
شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)



شکل (۴)

در شکل ۱: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim f(x) = b$

در شکل ۲: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim f(x) = b$

در شکل ۳: $x \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim f(x) = b$

در شکل ۴: $x \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim f(x) = b$

خط به معادله $y = b$ را در شکل‌های فوق، مجانب افقی تابع f گویند.

تعریف: اگر در تابع f فقط و فقط وقتی $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ یا $x \rightarrow \pm\infty$ ، آن‌گاه $\lim f(x) = b$ ، آن‌گاه خط به معادله $y = b$ را مجانب افقی نمودار تابع f گویند.

مثال ۷. مجانب‌های افقی هریک از تابع‌های به معادله‌های زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-4} \quad (۱)$$

پس خط به معادله $x = -1$ ، مجانب قائم منحنی تابع است.

$$x \rightarrow -1 \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$$

روش دوم:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} + \frac{y-1}{y+1} \right) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x} + 1 = 4 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x} = 3 \Rightarrow x \rightarrow -1$$

پس خط به معادله $x = -1$ مجانب قائم نمودار تابع فوق است.

مسئله ۶. معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی مکان هندسی نقطه $M\left(\frac{t}{t^2+1}, \frac{t^2}{t^2-4}\right)$ را وقتی t تغییر می‌کند، بیابید.

حل: برای تعیین معادله‌های مجانب قائم، y را به سمت ∞ میل می‌دهیم.

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{t^2}{t^2-4} \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} t^2-4 \rightarrow 0 \\ \text{یا} \\ t \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \rightarrow \pm 2 \\ \text{یا} \\ t \rightarrow \infty \end{cases}$$

حال وقتی $t \rightarrow 2$ ، $t \rightarrow -2$ و $t \rightarrow \infty$ ، حد x را محاسبه می‌کنیم:

$$t \rightarrow 2 \Rightarrow \lim x = \frac{2}{4+1} = \frac{2}{5}$$

$$t \rightarrow -2 \Rightarrow \lim x = \frac{-2}{4+1} = -\frac{2}{5}$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \lim x = 0$$

پس خط‌های به معادله‌های $x = \frac{2}{5}$ و $x = -\frac{2}{5}$ و $x = 0$ مجانب‌های قائم منحنی مکان نقطه M است.

مسئله ۷. معادله‌های مجانب‌های قائم تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\tan x}{2\cos x - 1}$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بیابید.

$$f(x) = \frac{\sin x}{2\cos x - 1} = \frac{\sin x}{\cos x(2\cos x - 1)} \quad \text{حل:}$$

$$\text{الف) } \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{k=0,1} x = 0, 2\pi$$

$$\text{ب) } 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{2x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$

پس خط به معادله $y = -\frac{1}{2}$ نیز مجانب افقی این تابع است.

مثال ۹. معادله مجانب افقی تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x}$ را بیابید.

حل:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x} = (x + \sqrt{x^2 - 4x}) \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} = \frac{4x}{x - |x|\sqrt{1 - \frac{4}{x}}}$$

$$\text{الف) } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{4x}{x - x\sqrt{1 - \frac{4}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{x}}} = \frac{4}{0^+} \rightarrow +\infty$$

پس در این تابع، وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، منحنی تابع مجانب افقی ندارد.

$$\text{ب) } x \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{4x}{x + x\sqrt{1 - \frac{4}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x}})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x}}} = \frac{4}{1+1} = 2$$

پس خط به معادله $y = 2$ ، معادله مجانب افقی این تابع است.

$$\text{مجانب افقی: } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{2x-1}{x-4} = 2$$

پس خط به معادله $y = 2$ مجانب افقی منحنی تابع f است.

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{x^2 + x} \quad (2)$$

$$\text{مجانب افقی: } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{2x^2 - x + 5}{x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

پس خط به معادله $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع f است.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} \quad (3)$$

$$\text{مجانب افقی: } x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x) = \pm\infty$$

پس نمودار این تابع مجانب افقی ندارد.

تذکره ۱. یک تابع با ضابطه کسری وقتی مجانب افقی دارد که درجه صورت از درجه مخرج بیشتر نباشد.

مثال ۸. معادله های مجانب افقی تابع با ضابطه

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1} \text{ را بیابید.}$$

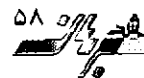
حل:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{2x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

پس $y = \frac{1}{2}$ معادله مجانب افقی این تابع است.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt{4x^2 - 24x})$$

حل:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt{4x^2 - 24x}) \times \frac{ax + b + \sqrt{4x^2 - 24x}}{ax + b + \sqrt{4x^2 - 24x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^2 x^2 + 2abx + b^2 - 4x^2 + 24x}{ax + b + \sqrt{x^2(4 - \frac{24}{x})}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^2 - 4)x^2 + (2ab + 24)x + b^2}{ax + b + x\sqrt{4 - \frac{24}{x}}}$$

باید $a^2 - 4 = 0$ ، پس $a = 2$ یا $a = -2$ ، با توجه به شرط مسأله فقط $a = 2$ قابل قبول است.

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2ab + 24)x + b^2}{x(a + \frac{b}{x} + \sqrt{4 - \frac{24}{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2ab + 24 + \frac{b^2}{x})}{x(a + \frac{b}{x} + \sqrt{4 - \frac{24}{x}})}$$

$$= \frac{2ab + 24}{a + 2}$$

پس $y = \frac{2ab + 24}{a + 2}$ معادله مجانب افقی است.

$$\frac{2ab + 24}{a + 2} = 2 \Rightarrow 2ab + 24 = 2a + 4, a = 2$$

$$4b + 24 = 8 \Rightarrow 4b = -16 \Rightarrow \boxed{b = -4}$$

مثال ۱۳. معادله های مجانب های افقی مکان هندسی

نقطه $M(\frac{t^2 + 4}{t^2 - 1}, \frac{t + 4}{t})$ را وقتی تغییر می کند، بیابید.

حل:

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \frac{t^2 + 4}{t^2 - 1} \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2 - 1 \rightarrow 0 \\ \text{یا} \\ t \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \rightarrow 1 \text{ یا } t \rightarrow -1 \\ \text{یا} \\ t \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$t \rightarrow 1 \Rightarrow \lim y = \frac{1 + 4}{1} = 5 \Rightarrow y = 5$$

$$t \rightarrow -1 \Rightarrow \lim y = \frac{-1 + 4}{-1} = -3 \Rightarrow y = -3$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \lim y = 1 \Rightarrow y = 1$$

پس خط های $y = 5$ و $y = -3$ و $y = 1$

مجانب های افقی است.

مثال ۱۰. معادله مجانب افقی تابع با ضابطه

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 4x^3}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x^3})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - \sqrt{x^2 + 4x^3}) \times \frac{x^2 + \sqrt{(x^2 + 4x^3)^2} + x\sqrt{x^2 + 4x^3}}{x^2 + \sqrt{(x^2 + 4x^3)^2} + x\sqrt{x^2 + 4x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 - 4x^3}{x^2 + \sqrt{(x^2 + 4x^3)^2} + x\sqrt{x^2 + 4x^3}}$$

$$\sim \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x^3}{x^2 + \sqrt{x^6} + x\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x^3}{x^2 + x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x^3}{3x^3} = -\frac{4}{3}$$

پس خط به معادله $y = -\frac{4}{3}$ مجانب افقی تابع f است.

مثال ۱۱. اگر خط به معادله $y = 2$ مجانب افقی تابع با

$$f(x) = \frac{(a-2)x^2 + (ab-8)x^2 + (ac-20)x + 4}{x-10}$$

باشد، a, b و c را بیابید.

حل: بنابه تذکر (۱) مجانب افقی، این تابع کسری وقتی

مجانب افقی دارد که ضریب های x^2 و x^2 در صورت کسر

صفر باشد؛ یعنی:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$ab - 8 = 0 \Rightarrow 2b - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

$$f(x) = \frac{(2c-20)x + 4}{x-10}$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \lim f(x) = \frac{2c-20}{1} \Rightarrow y = 2c-20$$

معادله مجانب افقی این تابع است. از طرفی $y = 2$

معادله مجانب افقی است؛ پس:

$$2c - 20 = 2 \Rightarrow 2c = 22 \Rightarrow \boxed{c = 11}$$

مثال ۱۲. اگر در تابع با ضابطه زیر:

$$f(x) = ax + b - \sqrt{4x^2 - 24x}$$

وقتی $x \rightarrow +\infty$ منحنی تابع مجانب افقی به معادله $y = 2$

داشته باشد، a و b را بیابید. ($a > 0$)