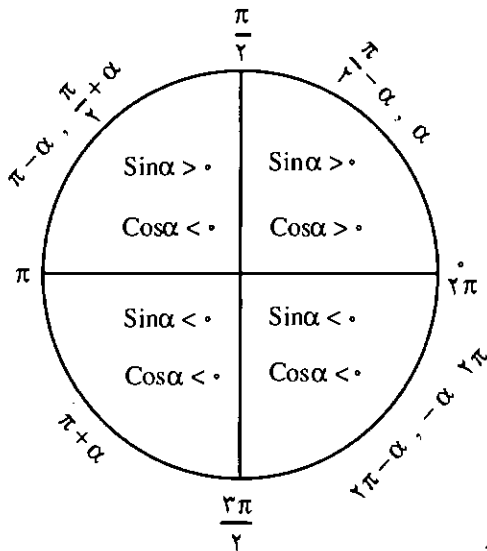


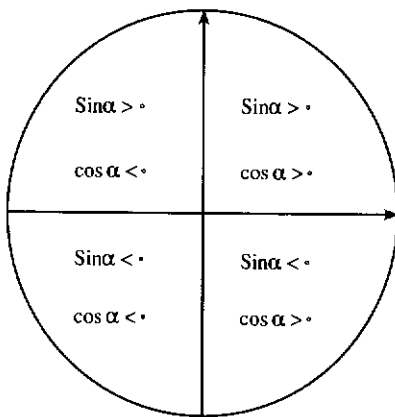
مثلثات



مقدمه

الف. دایره مثلثاتی و فرمول های اولیه مثلثات





در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد. $(\pi + \alpha)$
 $-\alpha$ ، در ربع چهارم است، لذا سینوس آن‌ها
 منفی است.

$$(1) \begin{cases} \sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}$$

در ربع دوم است، لذا کسینوس آن منفی است.

$$(2) \begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$$

در ربع سوم است، لذا سینوس و کسینوس آن
 منفی است.

$$(3) \begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$$

در ربع اول است، لذا سینوس و کسینوس آن
 مثبت است؛ ولی تابع مثلثاتی عوض می‌شود.

$$(4) \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \end{cases}$$

در ربع دوم است، لذا کسینوس آن منفی است و
 تابع مثلثاتی عوض می‌شود.

$$(5) \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha \end{cases}$$

از تقسیم فرمول‌های (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵) بر
 یکدیگر فرمول‌های، تانژانت و کتانژانت محاسبه می‌شود.

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

تمرین ۲. اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $a, b > 0$ ، $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ، $\sin \alpha$ ، $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ را بیابید.

حل:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{b}{a} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{a}{b}$$

ب. واحدهای کمان یا زاویه

۱. درجه: اگر محیط یک دایره را به (۳۶۰) قسمت
 مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی مقابل به هر قسمت
 را یک درجه گویند. علامت درجه (°) و مقدار زاویه بر حسب
 درجه را با D نشان می‌دهند.

۲. رادیان: اگر شعاع یک دایره را با یک تکه نخ اندازه
 بگیریم، سپس آن را روی محیط دایره منطبق کنیم، اندازه زاویه
 مرکزی مقابل به این کمان اشغال شده به وسیله نخ را یک رادیان
 گویند. علامت رادیان r و مقدار زاویه بر حسب رادیان را با R
 نشان می‌دهند. با اندازه گیری‌های دقیق متوجه شدند که محیط
 یک دایره تقریباً $\frac{6}{28}$ رادیان است که آن را با 2π نشان
 می‌دهند.

$$\text{رابطه بین درجه و رادیان: } \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

ج. رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی $(\pi - \alpha)$ ،
 $(\pi + \alpha)$ ، $(-\alpha)$ ، $(2\pi - \alpha)$ ، $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ و $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ بر
 حسب نسبت‌های مثلثاتی α . فرض می‌کنیم $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

توجه: α ، در ربع اول دایره مثلثاتی است.

$(\pi - \alpha)$ ، در ربع دوم دایره مثلثاتی است.

$(-\alpha)$ ، در ربع چهارم دایره مثلثاتی است.

تمرین ۳. حاصل کسری را بیابید.

$$A = \frac{\sin \frac{5\pi}{6} + \cos \frac{7\pi}{6} + \tan \frac{11\pi}{6} + \cot \frac{2\pi}{3}}{\sin \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \cot \frac{7\pi}{4}}$$

حل:

$$\begin{aligned}\sin \frac{5\pi}{6} &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{7\pi}{6} &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \frac{11\pi}{6} &= \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot \frac{2\pi}{3} &= \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{5\pi}{3} &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \tan \frac{3\pi}{4} &= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1 \\ \cot \frac{7\pi}{4} &= \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1 \\ A &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 1} \\ &= \frac{3 - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6\left(\frac{-\sqrt{3} + 1 - 4}{2}\right)} = \frac{3 - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{3(3 + \sqrt{3})}\end{aligned}$$

د. نسبت‌های مثلثاتی $(\alpha \pm \beta)$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α و β .

$$(۶) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$(۷) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$(۸) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

تمرین ۴. $\sin 15^\circ$ و $\tan 75^\circ$ را بیابید.

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$\tan 75^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \times \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

هـ. نسبت‌های مثلثاتی (2α)

اگر در فرمول‌های ۶، ۷ و ۸ را به α تبدیل کنیم:

$$(۹) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$(۱۰) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$(۱۱) \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$(۱۲) \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$(۱۳) \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$(۱۴) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$(۱۵) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

تمرین ۵. مطلوب است محاسبه حاصل کسر

$$P = \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos \alpha)}$$

حل:

$$P = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha}{(2 \cos^2 \alpha)(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2})} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha (2 \cos^2 \frac{\alpha}{2})} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$P = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

تمرین ۶. برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2}$ را بیابید.

حل: $D_f = \mathbb{R}$ می‌توان $x = \tan \alpha$ فرض کرد. پس:

$$f(x) = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$$

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{داریم:}$$

$$P = 1 - 2 \left(\sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \right)^2$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{12} \right)^2 = 1 - 2 \left(\frac{1}{4} \sin^2 \frac{\pi}{12} \right)$$

$$P = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{6 + \sqrt{3}}{8}$$

$$P = \frac{1 - \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}{1 + \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}$$

تمرین ۱۰. حاصل کسر را بیابید.

حل: $\frac{\pi}{4} + a = x$ فرض می شود: $\frac{1 - \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} \times \frac{\tan^2 x}{\tan^2 x}$

$$= \frac{\tan^2 x - 1}{\tan^2 x + 1} = -\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$P = -\cos 2x = -\cos 2 \left(\frac{\pi}{4} + a \right)$$

$$= -\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2a \right) = \sin 2a$$

تمرین ۱۱. اگر $\tan(2a + 2b) = 3$ و $\tan(2a - 2b) = 1$ ، آن گاه $\tan 6a$ را بیابید.

$$\begin{cases} 2a + 2b = x \\ 2a - 2b = y \end{cases} \Rightarrow 2a = x + y$$

حل:

$$2a = x + y \Rightarrow \tan 6a = \tan(x + y)$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{3 + 1}{1 - 3} = -2$$

تمرین ۱۲. با فرض $x \neq 2k\pi$ و $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، اگر تساوی زیر به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد، a ، b و c را بیابید.

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x - 1} = a \sin x + b \cos x + c$$

حل:

$$\text{عبارت سمت چپ} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{(\sin x + \cos x) - 1} \times \frac{(\sin x + \cos x) + 1}{(\sin x + \cos x) + 1}$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x + 1)}{1 + 2 \sin x \cos x - 1} = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2}$$

$$= a \sin x + b \cos x + c \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \leq \sqrt{2} \Rightarrow \text{برد تابع: } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

تمرین ۷. ثابت کنید: $\frac{1}{\sin 1^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 8^\circ} = 4$

حل: $\sin 8^\circ = \sin(9^\circ - 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{20} - 1^\circ\right) = \cos 1^\circ$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sin 1^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 8^\circ} = \frac{1}{\sin 1^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 1^\circ}$$

$$= \frac{\cos 1^\circ - \sqrt{3} \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ \cos 1^\circ}$$

$$= \frac{\cos 1^\circ - \tan 60^\circ \cdot \sin 1^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} \times \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{\cos 60^\circ \cos 1^\circ - \sin 60^\circ \sin 1^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ}$$

$$A = \frac{\cos(60^\circ + 1^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} = \frac{\cos 61^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} = \frac{\sin 29^\circ}{\frac{1}{2} \sin 2^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

تمرین ۸. ثابت کنید: $\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{4}$

حل:

در عبارت بالا قرار می دهیم. $\cos \frac{2\pi}{5} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos \frac{2\pi}{5}$

سمت چپ عبارت $= -\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \left(\frac{2 \sin \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5}} \right)$

$$= \frac{-2 \times \left(2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5} \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{-2 \left(\sin \frac{2\pi}{5} \right) \cdot \cos \frac{2\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{-\sin \frac{4\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = -\frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{5}} = -\frac{1}{2}$$

تمرین ۹. مطلوب است محاسبه $P = \sin^4 \frac{\pi}{24} + \cos^4 \frac{\pi}{24}$

حل: داریم: $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$

$$P = \sin^4 \frac{\pi}{24} + \cos^4 \frac{\pi}{24}$$

$$= \left(\sin^2 \frac{\pi}{24} + \cos^2 \frac{\pi}{24} \right)^2 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{24} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{24}$$