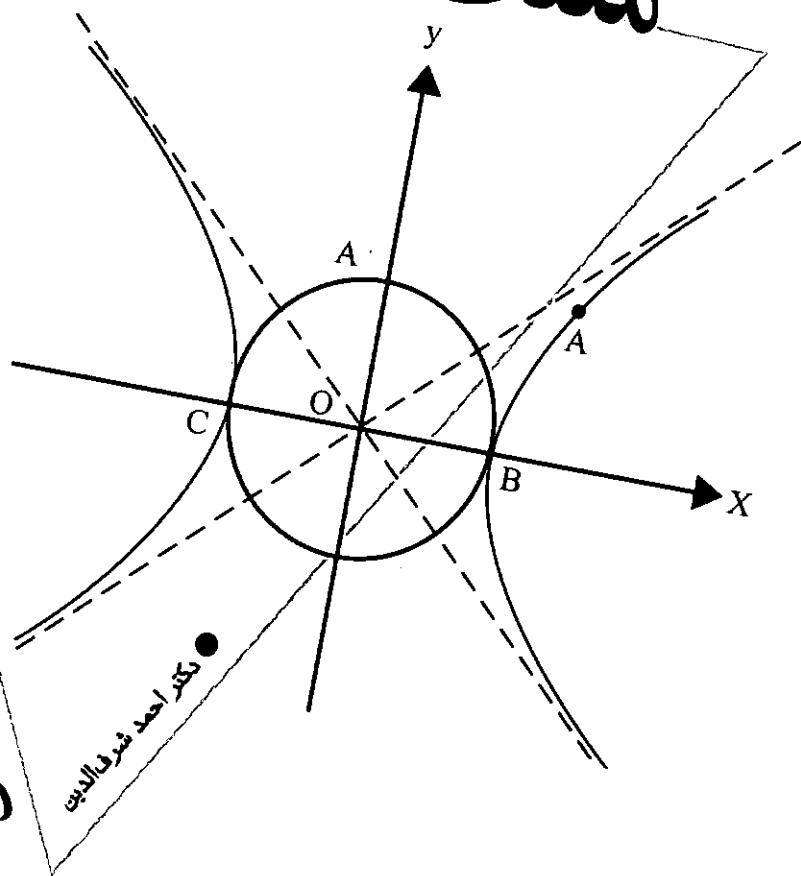


مثلث‌های مزدوج

یکسانی و همسانی

تفاضل دو زاویه

در مثلث‌هایی که مجموع یا



چکیده

دیگری تفاضل دو زاویه، مساوی 90° باشد، دارای برخی خواص یکسان و برخی خواص همانند هستند. بر چنین دو مثلثی، دو مثلث «مزدوج» نام می‌نهم.

چند حکم در مثلث قائم الزاویه

در مثلث قائم الزاویه ABC که در آن A زاویه قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است، رابطه‌های ذیل برقرارند (در بیان مطالب آینده، طول پاره خط AB را با AB و اندازه‌ی جبری بردار $\vec{AB}$ را

مثلث قائم الزاویه ABC را که در آن A زاویه قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است، در نظر می‌گیریم. قرینه‌ی نقطه‌ی B را نسبت به نقطه‌ی H با B' نشان می‌دهیم. با به کارگیری علامت جبری ثابت می‌کنیم، دو مثلث ABC و $AB'C$ دارای برخی خواص یکسان و برخی خواص همانند هستند. برای آن که خواص مورد نظر را به آسانی بیان کنیم، دو مثلث ABC و $AB'C$ را دو مثلث «مزدوج» می‌نامیم. به طور کلی نیز، دو مثلث که در یکی از آن‌ها مجموع دو زاویه، مساوی 90° و در

اشاره

استاد دکتر شرف الدین، همکار گرامی، مجله‌ی برهان، سال هجدهم، مقالات ارزشمندی برای مجله‌ی برهان می‌نویسد که مورد استفاده‌ی مخاطبان مجله قرار گرفته‌اند. ایشان در هندسه، جبر بول و تاریخ ریاضی تحقیقات متنوعی دارند و به طرح چند دستگاه فیزیکی نیز نائل آمده‌اند. ایشان به نازکی یک ماشین الکترونیکی نازک کارگیری تحقیقی در جبر بول طراحی کرده‌اند و آن را در کنفرانس بین‌المللی ریاضی دانان در شهر یور اسال عرضه کرده‌اند.

محور $x'x$ را منطبق بر خط BC و با جهت دلخواه (شکل‌های ۱ و ۲)، و نقطه‌ی H را به عنوان مبدأ محور اختیار می‌کنیم. چنین داریم:

$$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC} = \overline{HC} - \overline{HB}$$

$$\overline{BC} = \overline{HC} - \overline{HB} \quad (۶)$$

بررسی بعضی خواص همانند در دو مثلث مزدوج

الف) در شکل ۱، در مثلث ABC، این رابطه برقرار است:

$$AH^2 = HB \cdot HC \quad (۷)$$

رابطه‌ی (۷)، با توجه به تشابه دو مثلث AHB و AHC ثابت می‌شود. در شکل ۲، در مثلث ABC رابطه زیر برقرار است:

$$AH^2 = HB \cdot HC \quad (۸)$$

رابطه‌ی (۸) با توجه به تشابه دو مثلث AHB و AHC ثابت می‌شود.

اکنون با توجه به اندازه‌ی جبری دو بردار $\overrightarrow{HB}$ و $\overrightarrow{HC}$ ، روی محور $x'x$ چنین داریم:

$$AH^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{HC} \quad (۹)$$

$$AH^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC} \quad (۱۰)$$

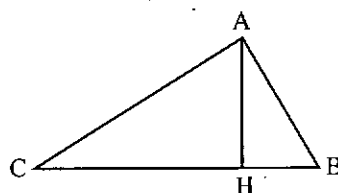
رابطه‌های (۹) و (۱۰) فقط در یک علامت متفاوت اند (نوعی همانندی خاصیت دو مثلث مزدوج).

اکنون مسئله را با به کارگیری مکان هندسی بررسی می‌کنیم. مسئله: در صفحه‌ی P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را در نظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی A، به طوری که اگر H پای عمود وارد از نقطه‌ی A بر خط BC باشد، این رابطه برقرار باشد: $AH^2 = HB \cdot HC$

حل: دستگاه مختصات دکارتی xy را طوری انتخاب می‌کنیم که محور $x'x$ آن بر خط BC منطبق باشد. نقطه‌ی O وسط پاره خط BC را مبدأ محور $x'x$ اختیار می‌کنیم. طول $OB=OC$ را a می‌نامیم. مختصات دو نقطه‌ی B و C چنین اند: $B(a, 0)$ و $C(-a, 0)$. مختصات نقطه‌ی متحرک A را (x, y) می‌نامیم. مکان هندسی نقطه‌ی A با رابطه‌ی (۸) تعیین می‌شود. رابطه‌ی A به این صورت نوشته می‌شود:

روی محور منطبق بر آن با

AB نشان می‌دهیم).



(شکل ۱)

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad (۱)$$

$$AH^2 = HB \cdot HC \quad (۲)$$

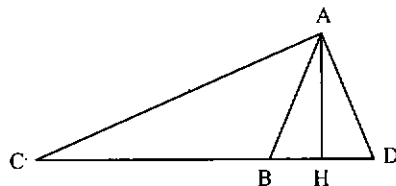
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \quad (۳)$$

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH \quad (۴)$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC} \quad (۵)$$

مثلی که تفاضل دو زاویه‌ی آن ۹۰° است

مثلث ABC را که تفاضل دو زاویه‌ی B و C آن قائمه است، در نظر می‌گیریم ($B - C = 90^\circ$) و ارتفاع AH آن را رسم می‌کنیم. قرینه‌ی نقطه‌ی B را نسبت به نقطه‌ی H با D نشان می‌دهیم. به آسانی می‌توان ثابت کرد که مثلث ACD قائم‌الزاویه است.



(شکل ۲)

به کارگیری عدد جبری

در شکل‌های ۱ و ۲، با به کارگیری یک محور منطبق بر خط BC و به کارگیری عدد جبری نشان می‌دهیم، در دو مثلث مزدوج، بعضی رابطه‌های یکسان و نیز بعضی رابطه‌های همانند وجود دارند.

است: $AB \cdot AC = BC \cdot AH$ ، از رابطه‌ی (۱۲)، رابطه‌ی (۱۱) حاصل می‌شود.

خاصیت ۱۱ در مثلث مزدوج

از مقایسه‌ی دو شکل ۱ و ۲ معلوم است که دو مثلث ABC در هر دو شکل، ضلع‌های مساوی AB و ضلع‌های مساوی AC و ارتفاع‌های مساوی AH دارند. پس رابطه‌ی ۱۱ در این دو مثلث مزدوج برقرار است.

به‌کارگیری مکان هندسی

در صفحه‌ی P دو نقطه‌ی ثابت B و C و نقطه‌ی متحرک A را در نظر می‌گیریم و پای عمود وارد از نقطه‌ی A بر خط BC را H می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ی A به طوری که رابطه‌ی (۱۱) برقرار باشد.

حل: دستگاه مختصات دکارتی xy را طوری اختیار می‌کنیم که محور x ها بر خط BC منطبق و مبدأ آن نقطه‌ی O وسط پاره خط BC باشد. رابطه‌ی (۱۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} \quad (12)$$

معادله‌ی (۱۲) پس از عمل‌های جبری متعدد، به صورت زیر درمی‌آید:

$$(x^2 + y^2 - a^2)(x^2 - y^2 - a^2) = 0 \quad (13)$$

از رابطه‌ی (۱۳) نتیجه می‌شود:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (14)$$

یا

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0 \quad (15)$$

نمودار معادله‌ی (۱۴) دایره‌ای به قطر BC و نمودار معادله‌ی (۱۵) یک هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C است. پس مکان هندسی نقطه‌ی A که در رابطه‌ی (۱۲) صدق کند، عبارت است از اجتماع دایره‌ای به قطر BC و هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C .

تبصره: از آن‌چه در سطرهای گذشته نوشته شد، خاصیتی از هذلولی متساوی‌الساقین نتیجه می‌شود که در زیر یاد می‌کنیم:

اگر از نقطه‌ی A واقع بر هذلولی متساوی‌الساقین، به رأس‌های B و C عمود AH را بر خط BC وارد کنیم، این خاصیت

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

خاصیت مذکور، هم در دایره‌ی به قطر BC و هم در هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C معتبر است (یکسانی یک

$$y^2 = \pm(a-x)(-a-x)$$

معادله‌ی $y^2 = -(a-x)(-a-x)$ معادله‌ی دایره‌ی

$x^2 + y^2 = a^2$ است؛ یعنی دایره‌ای به قطر BC . معادله‌ی

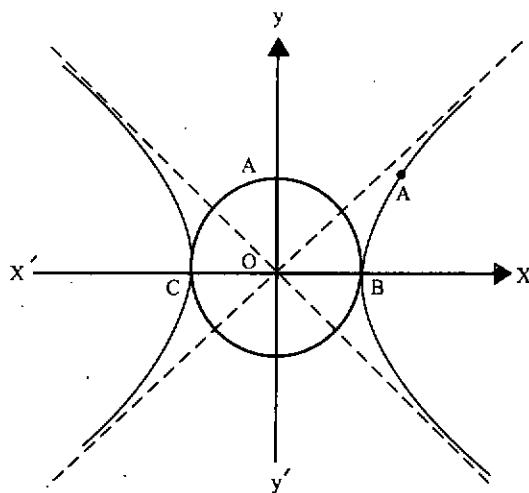
$y^2 = (a-x)(-a-x)$ معادله‌ی هذلولی متساوی‌الساقین به

معادله‌ی $x^2 - y^2 = a^2$ است. این هذلولی دو مجانب به

معادله‌های $y = \pm x$ دارد و در نقاط B و C بر خط BC عمود

است. مکان هندسی نقطه‌ی متحرک A که در معادله‌ی ۸ صدق

می‌کند، اجتماع دایره و هذلولی است (شکل ۳).



(شکل ۳)

تبصره: نتیجه شد که در هذلولی متساوی‌الساقین، خاصیت

زیر وجود دارد:

هذلولی متساوی‌الساقین با رأس‌های B و C را در نظر می‌گیریم. اگر نقطه‌ی دلخواهی واقع بر این هذلولی باشد، چنین داریم:

$$| \text{اندازه‌ی زاویه‌ی } C - \text{اندازه‌ی زاویه‌ی } \theta | = 90^\circ$$

ب) ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC که در آن نقطه‌ی A رأس زاویه‌ی قائمه و AH ارتفاع وارد بر وتر است، رابطه‌ی زیر محقق است:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \quad (11)$$

اثبات: در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC چنین داریم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

دو طرف رابطه‌ی بالا را بر $AB^2 \cdot AC^2$ بخش می‌کنیم. حاصل می‌شود:

$$\frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2} \quad (12)$$

با توجه به این که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC این رابطه مسلم

خاصیت در دو مثلث مزدوج).

ب) در مثلث قائم الزاویه ABC که BC وتر است، رابطه ی زیر برقرار است (قضیه ی فیثاغورس):

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad (16)$$

اکنون سعی می کنیم رابطه ی (۱۶) را به صورتی بنویسیم که هم در مثلث قائم الزاویه و هم در مثلث مزدوج آن معتبر باشد. رابطه ی ۱۶ را به صورت زیر می نویسیم:

$$AB^2 + AC^2 = (\overline{HC} - \overline{HB})^2 \quad (17)$$

رابطه ی (۱۷) در مورد مثلث مزدوج یعنی مثلث ABC رسم شده در شکل (۲) نیز معتبر است، زیرا در شکل ۲ چنین داریم:

$$|\overline{HC} - \overline{HB}| = CD$$

رابطه ی (۱۷) در مثلث قائم الزاویه و در مثلث مزدوج آن معتبر است (همسانی خاصیت در دو مثلث مزدوج).

ت) در مثلث قائم الزاویه ABC با زاویه ی قائمه ی A که نقطه ی H پای ارتفاع AH است، رابطه ی زیر مسلم است:

$$AH^2 = HB \cdot HC \quad (18)$$

رابطه ی ۱۸ از تشابه دو مثلث AHB و AHC نتیجه می شود. در مثلث ABC در شکل ۲، رابطه ی (۱۸) نیز معتبر است. از تشابه دو مثلث AHB و AHC، رابطه ی (۱۸) به دست می آید. با به کارگیری محور و عدد جبری، در مثلث قائم الزاویه ی ABC چنین داریم:

$$AH^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{HC} \quad (19)$$

و در مثلث مزدوج مثلث قائم الزاویه چنین داریم:

$$AH^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC} \quad (20)$$

دو رابطه ی (۱۹) و (۲۰) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$AH^2 = \varepsilon \overline{HB} \cdot \overline{HC}; \quad \varepsilon \in \{-1, 1\} \quad (21)$$

رابطه ی ۲۱ همسانی یک خاصیت را در دو مثلث مزدوج بیان می کند.

به کارگیری مکان هندسی

در صفحه ی P دو نقطه ی ثابت B و C و نقطه ی متحرک A را در نظر می گیریم. پای عمود وارد از نقطه ی A بر خط BC را H می نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه ی A، به طوری که رابطه ی زیر برقرار باشد:

$$AH^2 = HB \cdot HC \quad (22)$$

دستگاه محورهای مختصات مانند مسائل پیشین انتخاب می کنیم. رابطه ی (۲۲) با این رابطه بیان می شود:

$$AH^2 = |\overline{HB} \cdot \overline{HC}| \quad (23)$$

رابطه ی ۲۳ با معادلات زیر بیان می شود:

$$y^2 = \pm(a-x)(a+x)$$

معادله ی $y^2 = (a-x)(a+x)$ معادله ی دایره به قطر BC

است. معادله ی $y^2 = -(a-x)(a+x)$ معادله ی هذلولی متساوی الساقینی با رأس های B و C است.

مکان هندسی مورد نظر، اجتماع دایره به قطر BC و هذلولی متساوی الساقین با دو رأس B و C است.

ث) در مثلث قائم الزاویه ی ABC که نقطه A رأس زاویه ی قائمه است، ارتفاع AH را رسم می کنیم. رابطه ی زیر محقق است:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC} \quad (22)$$

اثبات: دو رابطه ی زیر در مثلث ABC محقق هستند:

$$AB^2 = BC \cdot HB$$

$$AC^2 = BC \cdot HC$$

از دو رابطه ی اخیر، رابطه ی (۲۲) به دست می آید.

با به کارگیری محور و عدد جبری (مانند آن چه گفتیم)، می توان رابطه های زیر را نوشت:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = -\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \quad (23)$$

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} \quad (24)$$

(رابطه ی (۲۳)، در مثلث قائم الزاویه و رابطه ی (۲۴) در مثلث مزدوج مثلث قائم الزاویه)

دو رابطه ی (۲۳) و (۲۴) را می توان به صورت فشرده ی زیر نوشت:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \varepsilon \frac{\overline{HB}}{\overline{HC}}; \quad \varepsilon \in \{-1, 1\} \quad (25)$$

رابطه ی (۲۵)، همسانی یک خاصیت را در دو مثلث مزدوج بیان می کند.

مطالعه ی مسئله با به کارگیری مکان هندسی

در صفحه P دو نقطه ی ثابت B و C و نقطه ی متحرک A را در نظر می گیریم. تصویر نقطه ی A را روی خط BC با H نشان می دهیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه A برای آن که رابطه ی زیر برقرار باشد:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{HB}{HC} \quad (26)$$

معادله ی (۲۶) با به کارگیری دستگاه مختصات مناسب که در

مدار دو طرفه

مسئله: دو دوچرخه سوار دور میدان دایره ای شکلی حرکت می کنند. وقتی در خلاف مسیر هم حرکت کنند، هر ۱۰ ثانیه یک بار یکدیگر را ملاقات می کنند و وقتی در یک جهت حرکت کنند، هر ۱۷۰ ثانیه یک بار به هم می رسند. اگر محیط میدان ۱۷۰ متر باشد، سرعت هر یک از دوچرخه سوارها را پیدا کنید.

حل: اگر سرعت دوچرخه سوار اول را x فرض کنیم، بعد از ۱۰ ثانیه، $10x$ متر از راه را می رود. در همین مدت، دوچرخه سوار دوم باید بقیه ی راه، یعنی $(170 - 10x)$ متر را پیماید تا بتواند دوچرخه سوار اول را ملاقات کند. اگر سرعت دوچرخه سوار دوم را y فرض بگیریم، معادله ی زیر را خواهیم داشت:

$$170 - 10x = 10y$$

وقتی که دو دوچرخه سوار به دنبال هم می روند، در ۱۷۰ ثانیه، اولی $170x$ متر و دومی $170y$ متر راه را طی می کنند. اگر فرض کنیم سرعت اولی بیشتر باشد، باید از یک برخورد تا برخورد دیگر، به اندازه ی یک دور کامل میدان بیشتر راه برود؛ یعنی:

$$170x - 170y = 170$$

که پس از ساده کردن، دو معادله ی زیر را داریم:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

و از آن جا:

$$x = 9 \text{ (متر در ثانیه)} \text{ و } y = 8 \text{ (متر در ثانیه)}$$

صفحات پیشین ذکر شد، به این صورت نوشته می شود:

$$\frac{(a-x)^2 + y^2}{(a+y)^2 + y^2} = \frac{a-x}{a+x}$$

معادله ی اخیر، پس از عملیات جبری به صورت زیر درمی آید:

$$(x^2 + y^2 - a^2)(x^2 - y^2 - a^2) = 0 \quad (27)$$

از معادله ی (۲۷) معلوم می شود که مکان هندسی موردنظر شکلی است که از اجتماع دایره ی $x^2 + y^2 = a^2$ و هذلولی $x^2 - y^2 = a^2$ تشکیل می شود.

عکس برخی قضیه های مثلث قائم الزاویه

در مثلث قائم الزاویه ی ABC که نقطه ی A رأس زاویه ی قائمه است، روابط ۱، ۲، ۳، ۴، و ۵ مسلم اند.

۱. عکس قضیه ی فیثاغورس

رابطه ی ۱، بیان قضیه ی فیثاغورس است. اگر در مثلث ABC رابطه ی ۱ برقرار باشد، آن مثلث قائم الزاویه است (عکس قضیه ی فیثاغورس).

۲. آیا عکس قضیه هایی که با رابطه های ۲ تا ۵ بیان می شوند، صحیح اند؟

اگر در مثلث ABC رابطه های ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ برقرار باشند، آن مثلث می تواند قائم الزاویه یا مزدوج مثلث قائم الزاویه باشد. به عبارت دیگر، اگر در مثلث ABC یکی از رابطه های ۲، ۳، ۴ و ۵ برقرار باشد، در آن مثلث مجموع دو زاویه ی B و C، ۹۰ درجه است. و یا تفاضل دو زاویه ی B و C آن، ۹۰ درجه است.

دایره ی C به قطر BC و نقطه ی متحرک A را بر محیط آن در نظر می گیریم و تصویر نقطه ی A بر خط BC را H می نامیم. ثابت کنید بین طول های AB و AC و AH رابطه ی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \quad (28)$$

اکنون مطالعه کنیم که آیا عکس حکم اخیر صحیح است؟ در صفحه ی P دو نقطه ی ثابت B و C و نقطه ی متحرک A را در نظر می گیریم. مکان هندسی نقطه ی متحرک A را تعیین کنید، به طوری که رابطه ی (۲۸) بین طول های AB، AC و AH برقرار باشد. مکان هندسی مطلوب، تنها دایره به قطر BC نیست، بلکه مکان مطلوب اجتماع دایره به قطر BC و یک هذلولی متساوی الساقین است که دو نقطه ی B و C در رأس آن هستند.

زیر نویس