

مثلث ارتفاعیه چیست؟

تعریف: اگر پای ارتفاعهای یک مثلث را به هم وصل کنیم، مثلی بوجود می‌آید که مثلث ارتفاعیه نام دارد و ویژگیهای زیر را داراست.
(تذکر: مثلث ABC مثلث اصلی و مثلث HKL مثلث ارتفاعیه نام دارد)

ویژگی اول:

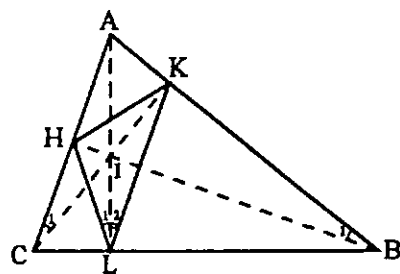
ارتفاعهای مثلث ABC، نیمسازهای زوایای مثلث ارتفاعیه‌اند.

چهارضلعی HKBC محاطی است زیرا نقاط H و K ضلع BC را با زاویه $\frac{\pi}{2}$ رؤیت می‌کنند. به همین ترتیب ثابت می‌شود چهارضلعیهای IKBL و HILC نیز محاطی هستند.

$$\text{محاطی HKBC} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1$$

$$\text{محاطی IKBL} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{L}_1 \Rightarrow \hat{L}_1 = \hat{L}_r$$

$$\text{محاطی HILC} \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{L}_1$$



لذا AL نیمساز زاویه L می‌باشد. برای دو رأس دیگر نیز به همین صورت اثبات می‌کنیم. این ویژگی در مثلث منفرجه الزامیه به صورت

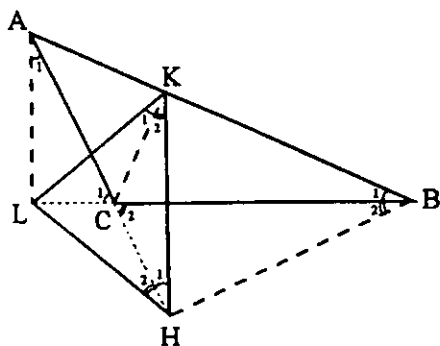
زیر است:

ارتفاع نظیر زاویه منفرجه و امتداد دو ضلع دیگر، نیمسازهای زوایای مثلث ارتفاعیه‌اند.

چهارضلعی AKCL محاطی است لذا:

$$\begin{cases} \hat{K}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_r \end{cases} \Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{B}_r \quad (\text{I})$$

$$\hat{A}_1 + \hat{C}_r = \hat{B}_r + \hat{C}_r = \frac{\pi}{2}$$



چهارضلعی KBHC محاطی است لذا:

$$\hat{K}_r = \hat{B}_r \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{K}_r$$

پس ارتفاع نظیر زاویه منفرجه نیمساز زاویه مقابل خود است.

چون داریم $\hat{A}_1 = \hat{B}_r$ لذا چهارضلعی ABHL محاطی است پس:

$$\hat{B}_1 = \hat{H}_r \quad (\text{III})$$

حال به بررسی این ویژگی در مثلث منفرجه الزاویه می پردازیم.

چهار ضلعی KBHC محاطی است پس:

$$\hat{B}_1 = \hat{H}_1 \quad (IV)$$

$$(III), (IV) \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_r$$

لذا AH امتداد AC، نیمساز زاویه H می باشد. به همین ترتیب ثابت می شود امتداد ضلع BC نیز نیمساز زاویه سوم مثلث ارتفاعیه است.

ویژگی دوم:

مرکز ارتفاعیه مثلث ABC بر مرکز دایره محاطی مثلث ارتفاعیه منطبق است.

در ویژگی قبل اثبات شد که سه ارتفاع مثلث ABC نیمساز زوایای مثلث HKL هستند پس I که مرکز ارتفاعیه مثلث ABC است، مرکز دایره محاطی مثلث ارتفاعیه نیز می باشد. (در مثلث منفرجه الزاویه این ویژگی برقرار نیست).

ویژگی سوم:

اندازه زوایای مثلث ارتفاعیه به ترتیب زیر به دست می آید:

$$\hat{K} = \pi - \hat{L} - \hat{H}$$

$$= \pi - 2\hat{A} - 2\hat{B}$$

$$= (\pi - \hat{A} - \hat{B}) - \hat{A} - \hat{B}$$

$$\hat{K} = \hat{C} - \hat{A} - \hat{B}$$

ویژگی چهارم:

شعاع دایره محیطی مثلث ABC دو برابر شعاع دایره محیطی مثلث ارتفاعیه است.

ارتفاعهای مثلث ABC را امتداد می دهیم تا دایره محیطی مثلث ABC را در نقاط N و N' و N'' قطع کنند.

$$\text{محاطی IKBL} \Rightarrow \hat{K}_r = \hat{B}_r$$

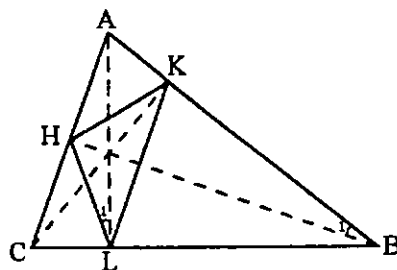
$$\hat{B}_r = \hat{N}'''_1 \Rightarrow \hat{K}_r = \hat{N}'''_1$$

$$\text{محاطی AKIH} \Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{A}_1$$

$$\hat{A}_1 = \hat{N}'''_r \Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{N}'''_r$$

$$\begin{cases} 2\hat{L}_1 = \hat{L} \\ \hat{L}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{L} = \pi - 2\hat{A} \\ \hat{B}_1 = \frac{\pi}{2} - \hat{A} \end{cases}$$

به همین ترتیب اثبات می شود: $\hat{K} = \pi - 2\hat{C}$ و $\hat{H} = \pi - 2\hat{B}$



$$m = \frac{1}{\gamma} = \frac{R'}{R} \Rightarrow R' = \frac{R}{\gamma}$$

(تذکر: شعاع دایره محیطی مثلث ABC و R' شعاع دایره محیطی مثلث ارتفاعیه است.)

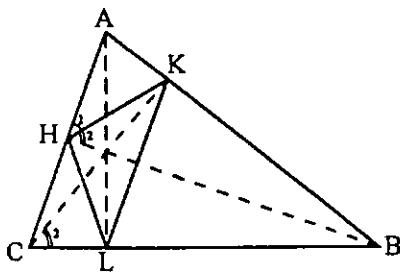
در اثبات این ویژگی نتیجه می گیریم قرینه مرکز ارتفاعیه نسبت به اضلاع مثلث ABC بر روی دایره محیطی آن مثلث واقع است.

ویژگی پنجم:

با رسم مثلث ارتفاعیه سه مثلث به وجود می آیند که با مثلث ABC متشابه اند.

$$\begin{cases} \hat{H}_1 = \frac{\pi}{\gamma} - \hat{H}_r \\ \hat{C}_r = \frac{\pi}{\gamma} - \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{H}_1 = \hat{C}_r \\ \hat{C}_r = \hat{H}_1 \end{cases} \Rightarrow \text{محاظی HKBC} \Rightarrow \hat{H}_r = \hat{C}_r$$

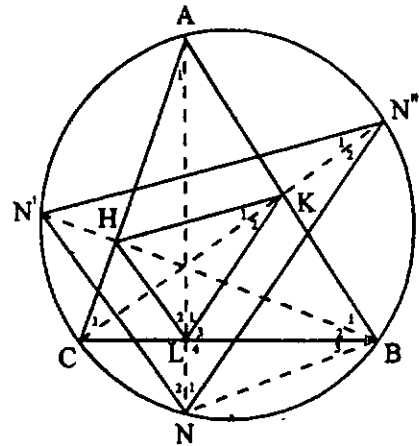
$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \hat{B} \\ \hat{A} &= \hat{A} \end{aligned} \Rightarrow \triangle AKH \sim \triangle ABC$$



به همین ترتیب ثابت می شود:

$$\triangle HLC \sim \triangle ABC \text{ و } \triangle KBL \sim \triangle ABC$$

$$\triangle HKL \sim \triangle ABC \text{ اگر } \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3} \text{ باشد، آنگاه:}$$



$$\hat{K}_r = \hat{N}'''_1$$

$$\hat{K}_1 = \hat{N}'''_r \Rightarrow \hat{N}'''_1 = \hat{N}'''_r, \hat{K} = \hat{N}'''$$

$$\hat{K}_1 = \hat{K}_r$$

به همین ترتیب ثابت می کنیم $\hat{L} = \hat{N}$ و نتیجه می گیریم:

$$\triangle NN'N'' \sim \triangle HKL$$

و از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \hat{B}_r = \hat{N}'''_1 \\ \hat{B}_r = \hat{N}'''_r \\ \hat{N}'''_1 = \hat{N}'''_r \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_r = \hat{B}_r$$

$$\begin{cases} BL = BL \\ \hat{B}_r = \hat{B}_r \\ \hat{L}_1 + \hat{L}_r = \hat{L}_r = \frac{\pi}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \triangle BLN = \triangle BLI \Rightarrow LI = LN$$

$$LI = LN \Rightarrow LI = \frac{NI}{\gamma} \Rightarrow \frac{LI}{NI} = \frac{1}{\gamma} = m$$

(که m نسبت تشابه دو مثلث HKL و $NN'N''$ می باشد.)

به همین ترتیب ثابت می شود: $\hat{KCH} = \frac{\pi}{2} + \hat{A}$

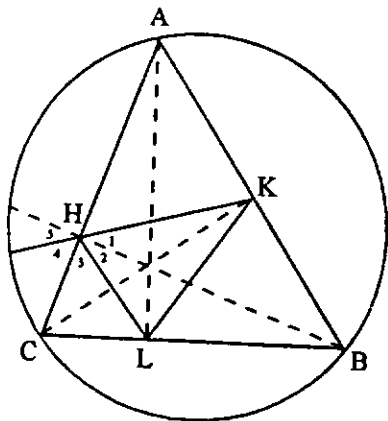
از طرفی $\hat{C}$ و $\hat{LCH}$ متقابل به رأسند پس: $\hat{LCH} = \hat{C}$

بنابراین در مثلث منفرجه الزاویه، رأس منفرجه سه ضلع HK، KL، HL از مثلث ارتفاعیه را به ترتیب با زوایای $\frac{\pi}{2} + A$ ، $\frac{\pi}{2} + B$ و C می بیند.

ویژگی هفتم:

اضلاع مثلث ABC، نیمساز زوایای خارجی مثلث ارتفاعیه اند.

$$\begin{cases} \hat{H}_d = \hat{H}_1 \\ \hat{H}_r = \hat{H}_1 \\ \hat{H}_d + \hat{H}_r = \frac{\pi}{2} \\ \hat{H}_r + \hat{H}_r = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \hat{H}_r = \hat{H}_r$$



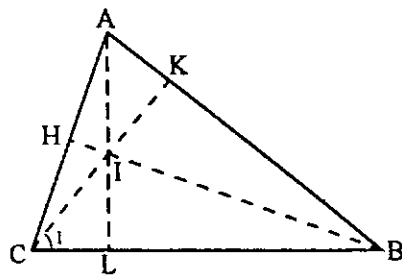
لذا AC نیمساز زاویه خارجی $\hat{H}$ از مثلث ارتفاعیه است. برای دو ضلع دیگر نیز به همین شکل ثابت می کنیم.

در مثلث منفرجه الزاویه ضلع مقابل به زاویه منفرجه و دو ارتفاع نظیر زوایای حاده، نیمساز خارجی زوایای مثلث ارتفاعیه اند. ادامه دارد

ویژگی ششم:

مرکز ارتفاعیه هر مثلث اضلاع AC، BC و AB را به ترتیب با زوایای $\pi - \hat{A}$ ، $\pi - \hat{B}$ و $\pi - \hat{C}$ رؤیت می کند.

$$\begin{cases} \hat{AIC} = \pi - \hat{LIC} \\ \hat{LIC} = \frac{\pi}{2} - \hat{C}_1 \\ \hat{C}_1 = \frac{\pi}{2} - \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \hat{AIC} = \pi - \hat{B}$$



به همین ترتیب ثابت می کنیم:

$$\hat{AIB} = \pi - \hat{C} \text{ و } \hat{BIC} = \pi - \hat{A}$$

این ویژگی در مثلث منفرجه الزاویه به صورت زیر مطرح است:

$$\begin{aligned} \text{مخاطی AKCL: } \hat{KCL} &= \pi - \hat{A}_1 - \hat{A}_r \quad (I) \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_r &= \frac{\pi}{2} - \hat{B} \quad (II) \\ (I), (II) &\Rightarrow \hat{KCL} = \frac{\pi}{2} + \hat{B} \end{aligned}$$

