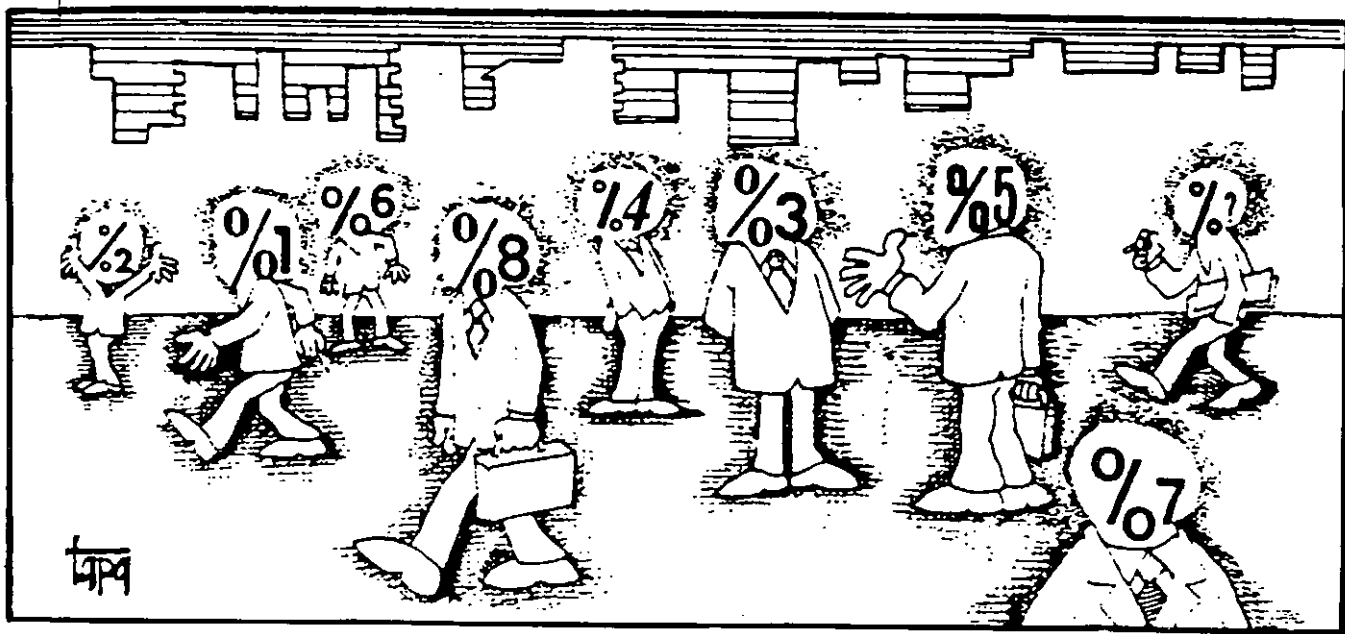




مبهم یا تعریف نشده؟

• احمد قندهاری

یک عدد بزرگ مثال می‌زنیم: مثلاً ۱۰ میلیارد یا ۱۰۰ میلیارد یا ۲۰۰ میلیارد. گرچه در زندگی روزمره با اعداد سر و کار داریم و امروزه بدون بیان اعداد، نمی‌توان زندگی کرد؛ مثلاً ساعت ده صبح به خیابان انقلاب، خیابان فروردین، کوچه هشتم، پلاک شماره (۷۵) مراجعه می‌کنیم. در همین جمله معمولی و عادی، از سه عدد (۱۰)، (۸) و (۷۵) استفاده کرده‌ایم. اگر ادامه دهیم: پس از ۴۵ دقیقه با اتوبوس خط (۱۱۲) به منزل می‌رویم و ... اگر کمی دقت کنیم، در هر روز، همه ما با بسیاری از اعداد سر و کار داریم.

به طور معمول اعداد را به سه دسته به نام‌های اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و اعداد شناسایی تقسیم‌بندی می‌توان کرد.

الف: اعداد اصلی: برای بیان کمیت به کار می‌روند؛ مثلاً ساعت ده صبح، مثلاً نمره (۱۵) در درس فیزیک یا ۲۰۰۰۰ تومان قرض. این اعداد قابل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم می‌باشند. این اعداد به این پرسش: چقدر یا چند تا پاسخ می‌دهند.
ب: اعداد ترتیبی: که صرفاً در مقایسه به کار می‌روند؛ مثلاً حسین در درس شیمی نفر دوم کلاس شد، یا علی نفر نهم در صف شیر است.
ج: اعداد شناسایی: که صرفاً برای شناسایی به کار می‌روند؛

اغلب سؤال می‌شود که چه برابر با چه عددی است؟ یا مقدار چه چیست؟ آیا چه مبهم است؟ یا می‌پرسند: عدد تقسیم بر صفر، برابر چه عددی است یا صفر تقسیم بر هر عدد، مساوی چند است و ...؟

در این مقاله قصد داریم هم سؤالها را بهتر و دقیق‌تر مطرح کنیم و هم پاسخ دقیق آنها را بیان کنیم.

سؤال (۱): صفر تقسیم بر هر عدد، برابر چیست؟
خود سؤال اشکال دارد، باید پرسید: صفر تقسیم بر هر عدد به جز صفر، برابر چند است؟
در جواب باید گفت:

صفر تقسیم بر هر عدد به جز صفر، برابر صفر است.

مثال بزنیم: فرض کنید صفر ریال پول را می‌خواهیم بین پنج نفر تقسیم کنیم، به طور مسلم، به هر نفر هیچ پولی نمی‌رسد. در نتیجه اگر به جای صفر ریال پول، صفر کیلو سیب هم داشتیم و می‌خواستیم بین پنج نفر تقسیم کنیم، نتیجه همان می‌شد.

سؤال (۲): ∞ (بی‌نهایت) چه گونه عددی است؟
جواب: ∞ (بی‌نهایت) عدد نیست؛ بلکه یک نماد ریاضی برای بیان اعداد خیلی بزرگ است. ابتدا توضیحی درباره اعداد بزرگ بیان می‌شود، سپس ∞ به طور دقیق تعریف می‌شود.

مانند کوچه پنجم، یا اتوبوس خط (۱۱۲).

همان طور که گفته شد، همه ما در هر روز، با این سه دسته اعداد کم و بیش سر و کار داریم؛ ولی در زندگی روزمره با اعداد ۱۰ میلیارد یا ۱۰۰ میلیارد سر و کار نداریم. گرچه آنها را می‌شناسیم؛ اما بزرگی آنها برای ما قابل لمس نیست، لذا کمی بیشتر در مورد اعداد بزرگ بحث خواهیم کرد.

شاید شنیده باشید که سرعت نور ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه است. با توجه به این که طول و عرض کشور عزیزمان ایران، حدود ۲۵۰۰ کیلومتر است، سیصد هزار کیلومتر در ثانیه غیر قابل لمس است؛ ولی وجود دارد و همه آن را قبول دارند. قابل لمس بودن، دلیل عدم وجود نیست.

به عدد ۱۰۰ میلیارد باز گردیم. این عدد چند رقمی است؟ یک میلیارد عددی ده رقمی و ۱۰۰ میلیارد عددی دوازده رقمی است. وقتی در ریاضی بحث درباره عددهای بزرگ است، تعداد ارقام مورد نظر است. ممکن است عددی بیست رقمی یا صد رقمی یا سه هزار رقمی یا بیشتر داشته باشیم، به مثال زیر دقت کنید:

می‌دانیم $\log 2 = 0.30103$ ، می‌خواهیم بدانیم عدد $N = 2^{1000000}$ ، عددی چند رقمی است؟ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} N = 2^{1000000} &\Rightarrow \log N = \log 2^{1000000} \\ &\Rightarrow \log N = 1000000 \log 2 \\ &= 1000000 (0.30103) = 301030.00 \end{aligned}$$

عدد (۳۰۱۰۳) مفسر $\log N$ است. بنا به قاعده اگر به مفسر، یک واحد اضافه کنیم، تعداد ارقام عدد N به دست می‌آید، پس عدد N عددی (۳۰۱۰۴) رقمی است.

با مقایسه عدد N که عددی است (۳۰۱۰۴) رقمی با عدد ۱۰۰ میلیارد که عددی است دوازده رقمی، متوجه می‌شویم که عدد N ، عدد بزرگی است.

حال اگر همین عدد N را به توان ۱۰۰۰ برسانیم و آن را M بنامیم، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} M = N^{1000} &= (2^{1000000})^{1000} = 2^{10^6} \\ &\Rightarrow \log M = \text{Log } 2^{10^6} = 10^6 \log 2 \\ &= 10^6 (0.30103) = 30103000.00 \end{aligned}$$

با توجه به مطالب گفته شده، عدد M عددی است (۳۰۱۰۳۰۰۰۱) رقمی. با مقایسه با عدد ۱۰۰ میلیارد که فقط دوازده رقم دارد، عدد فوق‌العاده بزرگی است. این عدد بیش از سی میلیون رقم دارد حال به بررسی ∞ می‌پردازیم.

تعبیری برای مفهوم $(+\infty)$: فرض کنیم متغیر x ، عددی است در حال زیاد شدن و به طور مرتب مقدار آن افزایش می‌یابد و اگر از هزار و میلیون و میلیارد و صد میلیارد و ... و N و ... و M بزرگتر شود، می‌گوییم x به سمت عدد بسیار بزرگی میل می‌کند و یا در این حالت می‌گوییم x به سمت $(+\infty)$ میل می‌کند.

اگر به همین تعریف دقیق شویم و چند بار آن را بخوانیم، ملاحظه می‌کنیم که $(+\infty)$ یک عدد نیست؛ بلکه یک علامت یا نماد ریاضی برای نشان دادن اعداد خیلی بزرگ است.

به عبارت دیگر، می‌توان گفت اگر متغیر x ، ضمن زیاد شدن از هر عدد فوق‌العاده بزرگ مفروضی مانند M بزرگتر شود، می‌گوییم x به سمت $(+\infty)$ میل می‌کند. در واقع $+\infty$ از هر عدد مثبت به دلخواه بزرگی مانند M ، بزرگتر است.

∞ ها قابل سنجش نمی‌باشند

اگر به تعبیر «نقطه» در هندسه دقت کنیم، می‌بینیم، نقطه، طول و عرض و ارتفاع ندارد. این نقطه اگر در صفحه باشد، طول و عرض ندارد. چنانچه در فضا باشد، طول، عرض و ارتفاع ندارد. بنابراین، همین صفحه مجله «برهان»، از بی‌نهایت نقطه تشکیل شده است (منظور آن است که از تعداد نامتناهی نقطه تشکیل شده است) و سطح میز تحریر نیز از بی‌نهایت نقطه تشکیل شده است و نمی‌توان گفت که تعداد نقاط روی سطح میز تحریر، از تعداد نقاط صفحه مجله برهان بیشتر است. مثال دیگری می‌آوریم.

مجموعه اعداد طبیعی: N را در نظر می‌گیریم.

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی زوج، زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است، آن را $(2N)$ می‌نامیم.

$$2N = \{2, 4, 6, \dots\}$$

چون مجموعه اعداد طبیعی نامتناهی است، پس مجموعه اعداد طبیعی زوج هم نامتناهی است. با این حال، نمی‌توان گفت تعداد

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x} = \frac{-5}{0^-} \rightarrow +\infty \right.$$

و به طور کلی تر می توان نوشت :

$$a \neq 0, \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a}{x} = \frac{a}{0^+} \rightarrow +\infty \right. \\ a > 0 \Rightarrow \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{x} = \frac{a}{0^-} \rightarrow -\infty \right. \end{cases}$$

$$a \neq 0, \begin{cases} a < 0 \Rightarrow \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a}{x} = \frac{a}{0^+} \rightarrow -\infty \right. \\ a < 0 \Rightarrow \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{x} = \frac{a}{0^-} \rightarrow +\infty \right. \end{cases}$$

حال به پاسخ سؤال تصحیح شده (۴) می پردازیم :

عدد مثبت تقسیم بر 0^+ به سمت $+\infty$ میل می کند.

عدد مثبت تقسیم بر 0^- به سمت $-\infty$ میل می کند.

عدد منفی تقسیم بر 0^+ به سمت $-\infty$ میل می کند.

عدد منفی تقسیم بر 0^- به سمت $+\infty$ میل می کند.

مثال: مقدار حد کسر $\frac{[x]-2}{x-2}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ چقدر است؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{[2^-]-2}{0^-} = \frac{1-2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} \rightarrow +\infty$$

سؤال (۵): مقدار $\frac{0}{0}$ چیست؟

جواب: $\frac{0}{0}$ در ریاضی تعریف نشده است و آنچه به نام $\frac{0}{0}$

در کتابها ملاحظه می کنید، عبارتهایی نظیر $\frac{0^+}{0^+}$ یا $\frac{0^+}{0^-}$ یا $\frac{0^-}{0^+}$ یا $\frac{0^-}{0^-}$ است.

در کسرهایی مانند $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر $g(a) = f(a) = 0$ وقتی $x \rightarrow a$ در این صورت، $f(x)$ و $g(x)$ به سمت صفر میل می کنند و دقیقاً مساوی با صفر نیستند، بنابراین بسته به این که x از چه سمتی به a میل کند، کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ به یکی از صورتهای $\frac{0^+}{0^+}$ ، $\frac{0^+}{0^-}$ ، $\frac{0^-}{0^+}$ ، $\frac{0^-}{0^-}$ تبدیل می شود که به اصطلاح آن را $\frac{0}{0}$ می گوئیم.

اعضای مجموعه اعداد طبیعی بیشتر از تعداد اعضای مجموعه اعداد طبیعی زوج است.

تعبیری برای مفهوم $(-\infty)$: اگر متغیر x ضمن کم شدن از هر عدد منفی فوق العاده کوچکی مانند $-M, \dots, -N$ کوچکتر شود، می گوئیم x به سمت عدد بسیار کوچک منفی میل می کند و می گوئیم x به سمت $(-\infty)$ میل می کند.

سؤال (۳): آیا حاصل $(-\infty)$ و $(+\infty)$ برابر صفر است؟ همان طور که پیش از این گفته شد، ∞ ها قابل سنجش نیستند، پس نمی توان گفت حاصل $(-\infty)$ و $(+\infty)$ صفر است. این نماد، یکی از صورتهای مبهم در جبر است.

سؤال (۴): هر عدد تقسیم بر صفر برابر چیست؟ یعنی $\frac{\text{عدد}}{0} = ?$ آیا این که می گویند $\frac{\text{عدد}}{0}$ برابر (∞) است، درست است؟

در پاسخ به این سؤال، باید گفت اولاً: $\frac{\text{عدد}}{0}$ در ریاضی تعریف نشده است؛ یعنی $\frac{\text{عدد}}{0}$ بی معناست. مانند این است که بگوئیم می خواهیم ۱۰۰۰۰ تومان پول را بین صفر نفر تقسیم کنیم. ملاحظه می کنیم خود عبارت بی معناست. ثانیاً: هیچ چیز در ریاضی مساوی ∞ نیست.

مثلاً نمی توان نوشت $x = \infty$ یا $y = \infty$ یا $t = \infty$.

باید نوشت $x \rightarrow \infty$ یا $y \rightarrow \infty$ یا $t \rightarrow \infty$.

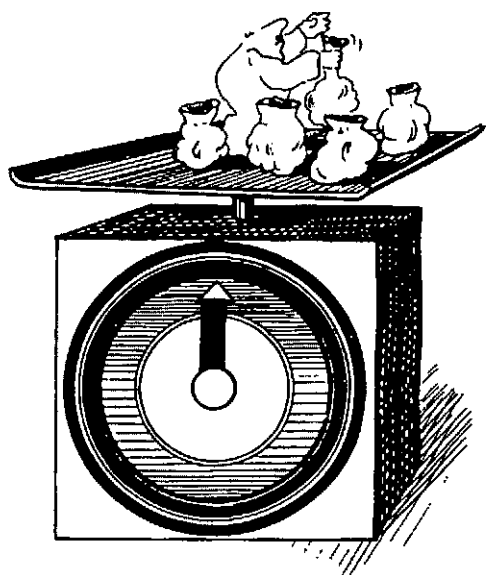
حال سؤال (۴) را به صورت دقیقتر مطرح می کنیم: هر عدد (به جز صفر) تقسیم بر 0^+ یا 0^- به سمت چه عددی میل می کند؟

در پاسخ باید گفت مثبت یا منفی بودن خود عدد (بجز صفر) هم مطرح است. برای درک بهتر به مثالهای زیر دقت کنیم که به طور طبیعی مفهوم حد را وارد این بحث خواهد کرد (که خود حد، بحث مفصل و جداگانه ای است).

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{+5}{x} = \frac{+5}{0^+} \rightarrow +\infty \right.$$

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{+5}{x} = \frac{+5}{0^-} \rightarrow -\infty \right.$$

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-5}{x} = \frac{-5}{0^+} \rightarrow -\infty \right.$$



۵ کیسه داریم که در هر کدام ۲۰ سکه وجود دارد. وزن هر سکه باید ۱۰ گرم باشد، اما در سه کیسه وزن هر سکه ۱۰ گرم، در یک کیسه ۹ گرم و در یک کیسه دیگر ۱۱ گرم است. چگونه می‌توانیم فقط با یک بار وزن کردن، کیسه‌ای را که دارای سکه‌های سنگین‌تر است و کیسه‌ای را که سکه‌های آن سبک‌تر می‌باشد مشخص کنیم. این اندازه‌گیری توسط یک ترازوی یک کفه‌ای انجام می‌گیرد که وزن وزنه‌های گذاشته شده روی آن را با دقت نشان می‌دهد.

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور
جواب در صفحه ۸۸

به مثال زیر توجه کنید.

مثال: مقدار حد کسر $\frac{x^2-1}{x-1}$ وقتی $x \rightarrow 1^+$ چیست؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^+-1}{1^+-1} = \frac{0^+}{0^+} \quad \text{مبهم است}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2^+ \text{ یا } ۲$$

مثال دیگر: مقدار حد کسر $\frac{8-x^2}{x^2-4}$ وقتی $x \rightarrow 2^+$ چیست؟

حل:

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8-x^2}{x^2-4} = \frac{8-2^+}{2^+-4} = \frac{0^-}{0^+} \right. \quad \text{مبهم است}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8-x^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)(4+x^2+2x)}{-(2-x)(2+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4+x^2+2x}{-(2+x)} = \frac{4+4^++4^+}{-(4^+)}$$

$$= \frac{۱۶}{-۴} = -۴$$

