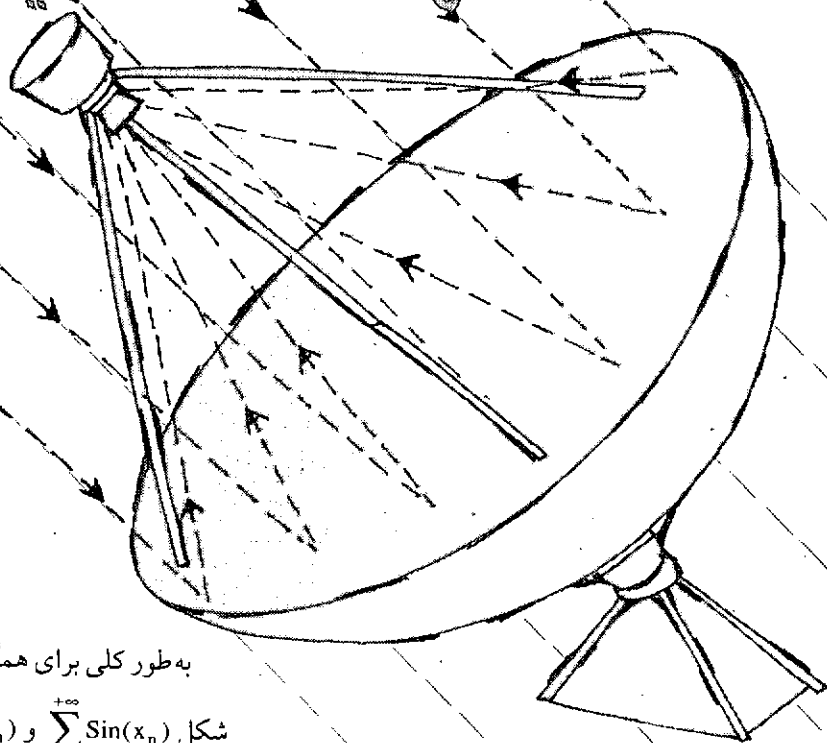


در همگرایی مجموعه سری خاصه

احسان یارمحمدی



به طور کلی برای همگرایی یا واگرایی، سری هایی به شکل $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \sin(x_n)$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$ معمولاً آزمون مقایسه حدی استفاده می کنند.

بدین ترتیب که اگر $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \sin(x_n)$ دو سری نامتناهی با جملات مثبت باشند، آن گاه:

۱. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = \lambda > 0$ بنابراین یا هر دو سری همگرایند یا هر دو سری واگرایند.

۲. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 0$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ همگرا باشند، بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \sin(x_n)$ همگراست.

۳. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = +\infty$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ واگرا باشند، بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \sin(x_n)$ واگراست.

در سری هایی به شکل $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \sin(x_n)$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$ که در آن ها x_n دنباله ای از اعداد طبیعی است، داریم:

الف) اگر x_n دنباله ای واگرا باشد، آن گاه دنباله $\sin(x_n)$ واگراست؛ بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \sin(x_n)$ واگراست (درباره سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$ این مطلب صادق است).

ب) اگر x_n دنباله ای همگرا باشد، آن گاه دنباله $\sin(x_n)$ همگراست؛ ولی نمی توان نتیجه گرفت که سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \sin(x_n)$ همگرا باشد (در مورد سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$ این مطلب صادق است).

برهان:

در مورد سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \tan(x_n)$ نیز این مطلب صادق است

چون داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = \lambda > 0$ ، بنابراین:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} :$$

$$n \geq M \Rightarrow \left| \frac{\sin(x_n)}{x_n} - \lambda \right| < \varepsilon, \varepsilon = \frac{\lambda}{\gamma}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \frac{\sin(x_n)}{x_n} - \lambda \right| < \frac{\lambda}{\gamma} \Rightarrow \frac{\lambda}{\gamma} < \frac{\sin(x_n)}{x_n} < \frac{3\lambda}{\gamma}$$

$$\Rightarrow \sin(x_n) < \frac{3\lambda}{\gamma} x_n \text{ یا } x_n < \frac{\gamma}{\lambda} \sin(x_n)$$

حالت اول:

(۱) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ همگرا باشد سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{3\lambda}{\gamma} x_n$ همگرا است پس بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(x_n)$ همگرا می باشد.

(۲) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(x_n)$ همگرا باشد سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\gamma}{\lambda} \sin(x_n)$ همگرا است پس بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ همگرا می باشد.

حالت دوم:

(۱) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(x_n)$ واگرا باشد پس بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{3\lambda}{\gamma} x_n$ واگرا است بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ واگرا می باشد.

(۲) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ واگرا باشد پس بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\gamma}{\lambda} \sin(x_n)$ واگرا است بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(x_n)$ واگرا می باشد.

اکنون اگر فرض کنیم که x_n دنباله ای همگرا باشد که سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ تشکیل یک سری همگرای تلسکوپی یا همگرای هندسی را بدهد، می توانیم الگوریتمی را برای محاسبه کران بالا و کران پایین حد مجموع جزئی سری های $\sum_{n=n_0}^{\infty} \tan(x_n)$ و $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(x_n)$ مطرح کنیم. به بیان دیگر، مشخص می کنیم که حد مجموع جزئی سری های $\sum_{n=n_0}^{\infty} \tan(x_n)$ و $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(x_n)$ بین کدام دو عدد حقیقی قرار دارد.

حالت اول - سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(x_n)$

ابتدا مقدار سری همگرای تلسکوپی یا هندسی $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ را به دست می آوریم و سپس بنابر نامساوی $\sin x < x$ ، سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ را با سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(x_n)$ مقایسه می کنیم تا یک کران بالا را برای سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(x_n)$ به دست آوریم. سپس جملات سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \sin(x_n)$ را به ازای n_0 های متفاوت یادداشت می کنیم و بایکدیگر جمع می زنیم تا مجموع جملات این سری به دست آید. اگر مجموع جملات این سری عددی مثبت باشد، لذا صفر می تواند یک کران پایین در این نوع از سری ها باشد.

آزمون ۱. کدام گزینه درباره سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ صحیح است؟

- (۱) همگرا به صفر (۲) همگرا به ۱
(۳) همگرا به -۱ (۴) واگرا

برهان: قسمت های دیگر قضیه بالا نیز به همین روش قابل بیان است که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

آزمون ۳. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \tan(\frac{1}{\sqrt{n}})$

صحیح است؟

(۱) همگرا به صفر (۲) همگرا به ۱

(۳) همگرا به -۱ (۴) واگرا

جواب: گزینه (۴) صحیح است؛ چون بنابر آزمون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 > 0$$

مقایسه حدی داریم:

از طرفی چون سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست، لذا هر دو سری واگرايند.

آزمون ۴. کدام گزینه در مورد سری

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \tan(\frac{1}{n(n+1)})$$

صحیح است؟

(۱) $S = 1$ (۲) $S > 1$

(۳) $S < 1$ (۴) واگرا

جواب: گزینه (۲) صحیح است؛ چون بنابر آزمون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tan(\frac{1}{n(n+1)})}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 > 0$$

مقایسه حدی داریم:

از طرفی چون سری تلسکوپی $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ همگرا به

یک است، لذا هر دو سری همگرايند. در ضمن، بنابر الگوریتمی که ارائه شد، داریم:

$$\frac{1}{n(n+1)} < \tan(\frac{1}{n(n+1)}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \tan(\frac{1}{n(n+1)}) > 1$$

پس نتیجه می گیریم که $S > 1$ است.

جواب: گزینه (۴) صحیح است؛ چون بنابر آزمون

مقایسه حدی داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} = 1 > 0$$

از طرفی چون سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n})$ واگراست، لذا هر دو سری واگرايند.

آزمون ۲. کدام گزینه در مورد سری $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$

صحیح است؟

(۱) $S = 1$ (۲) $0 < S < 1$

(۳) $-1 < S < 0$ (۴) واگرا

جواب: گزینه (۲) صحیح است؛ چون بنابر آزمون

مقایسه حدی داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 > 0$$

از طرفی چون سری هندسی $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ همگرا به یک است، لذا هر دو سری همگرايند.

در ضمن، بنابر الگوریتمی که ارائه شده، داریم:

$$\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) < 1$$

بنابراین که:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \sin(\frac{1}{\sqrt{1}}) + \sin(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \sin(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \dots > 0$$

پس نتیجه می گیریم که $0 < S < 1$ است.

حالت دوم - سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$

ابتدا مقدار سری همگرای تلسکوپی یا هندسی $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$

را به دست می آوریم سپس بنابر نامساوی $x < \tan x$ ، سری

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ را با سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$ مقایسه می کنیم تا یک کران

پایین را برای سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$ به دست آوریم.

منابع

[۱] آنالیز ریاضی تام. م. آپوستل، ترجمه: علی اکبر عالم زاده، انتشارات دانشگاه

صنعتی شریف.

[۲] حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی، دفتر برنامه ریزی و تألیف

کتاب های درسی.

[۳] حساب دیفرانسیل و انتگرال تام. م. آپوستل، ترجمه: علی اکبر عالم زاده و

همکاران انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.