

مبحث تقارن

● محمد عابدی

(مورد استفاده دانش آموزان سال چهارم ریاضی)

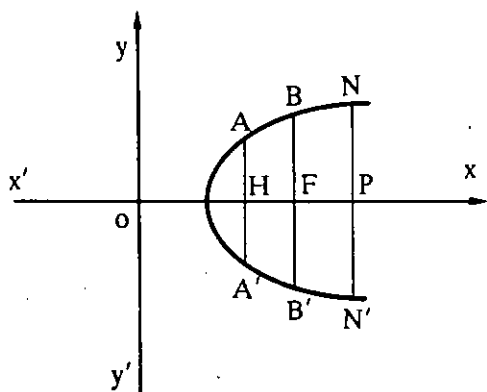
$$y_A = -y_{A'} \Rightarrow n + 6 = -2n \Rightarrow 3n = -6 \Rightarrow \boxed{n = -2}$$

$$\Rightarrow A(-2+4, -2+6) \Rightarrow A(2, 4) \text{ و } A'(2, -4)$$

مثال ۳: معادله قرینه خط به معادله $y = x + 2$ را نسبت به محور x ها بیابید.

$$y \rightarrow -y \Rightarrow -y = x + 2 \Rightarrow \boxed{y = -x - 2} \quad \text{حل:}$$

تبصره ۱: محور x ها را محور تقارن یک منحنی گویند اگر قرینه هر نقطه منحنی نسبت به محور x ها روی خود منحنی باشد. (شکل ۲)



شکل ۲

$$AH = HA' \text{ و } BF = FB' \text{ و } NP = PN'$$

مثال ۴: محور تقارن منحنی به معادله $y^2 = x$ کدام است؟

حل: اگر y را به $-y$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین محور تقارن منحنی محور x ها می‌باشد.

مثال ۵: اگر محور تقارن منحنی به معادله

$$x = y^2 - (m-1)y^2 + 2 \text{ محور } x \text{ ها باشد } m \text{ کدام است؟}$$

حل: اگر y را به $-y$ تبدیل نماییم باید معادله تغییر نکند.

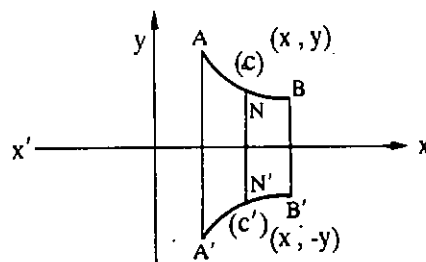
$$(-y)^2 - (m-1)(-y)^2 + 2 = x \Rightarrow y^2 + (m-1)y^2 + 2 = x$$

با مقایسه معادله اخیر با معادله منحنی داریم:

$$-(m-1) = m-1 \Rightarrow 2(m-1) = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

۱: تقارن منحنی نسبت به محور x ها: برای به دست آوردن

قرینه نقطه A نسبت به محور x ها از نقطه A عمود AH را بر محور x ها فرود آورده، AH را به اندازه خود امتداد داده تا نقطه A' به دست آید در این صورت نقطه A' را قرینه نقطه A نسبت به محور x نامیده و محور x ها را محور تقارن می‌نامند. اگر قرینه هر نقطه منحنی (C) را نسبت به محور x ها به دست آوریم و این نقاط را به هم وصل نماییم شکل (C') را قرینه منحنی (C) نسبت به محور x ها می‌نامند.



شکل ۱

اگر مختصات نقطه A را (x, y) فرض نماییم مختصات نقطه A' به صورت $(x, -y)$ می‌باشد اگر معادله منحنی (C) به صورت $y = f(x)$ باشد برای به دست آوردن معادله منحنی C' بایستی در معادله منحنی (C) ، x را تغییر نداده و y را به $-y$ تبدیل نماییم. (شکل ۱)

مثال ۱: مختصات قرینه نقطه $A(2, 3)$ را نسبت به محور x ها

بیابید.

حل: کافی است y را به $-y$ یعنی ۳ را به -3 تبدیل نماییم،

داریم: $A'(2, -3)$.

مثال ۲: اگر نقاط $A(m+4, n+6)$ و $A'(-m, 2n)$

نسبت به محور x ها قرینه باشند m و n کدام است؟

حل:

$$x_A = x_{A'} \Rightarrow -m = m + 4 \Rightarrow -2m = 4 \Rightarrow \boxed{m = -2}$$

یامی توانیم بگوییم با تبدیل y به $-y$ ، y^2 تغییر می کند پس باید y^2 وجود نداشته باشد و این در صورتی است که ضریب y^2 یعنی

$$-(m-1) = 0 \quad \text{یا} \quad \boxed{m=1} \quad \text{باشد.}$$

مثال ۶: محور تقارن منحنی $|y| = x^2 - x$ کدام است؟

حل: اگر y را به $-y$ تبدیل کنیم چون $|-y| = |y|$ می باشد پس معادله $|y| = x^2 - x$ همان معادله داده شده می باشد بنابراین چون معادله تغییر نمی کند لذا محور تقارن منحنی محور x ها می باشد. تبصره ۲: نشان دهید محور تقارن منحنی به معادله

$$y = \pm f(x) \sqrt{g(x)}$$

حل: اگر طرفین معادله را به توان (۲) برسانیم معادله به صورت $y^2 = f^2(x) g(x)$ در آمده اگر در این معادله y را به $-y$ تبدیل نماییم معادله تغییر نمی کند پس محور تقارن منحنی محور x ها می باشد مثلاً محور تقارن $y = \pm x \sqrt{x^2 + 1}$ محور x ها است.

مثال ۷: اگر محور تقارن منحنی به معادله $y = m - 2 \pm x \sqrt{x} - 2$ محور x ها باشد m کدام است؟

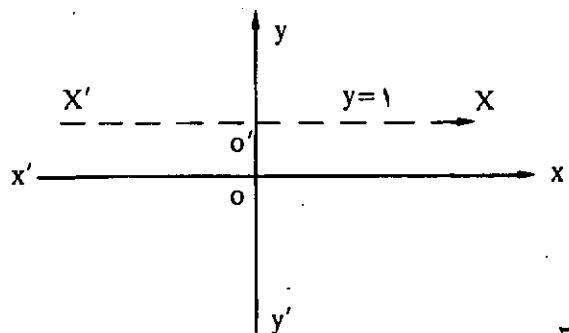
حل: اگر $m - 2 = 0$ یا $\boxed{m=2}$ باشد معادله به صورت $y = \pm x \sqrt{x} - 2$ در آمده پس محور تقارن منحنی محور x ها خواهد بود.

مثال ۸: نشان دهید محور تقارن منحنی به معادله $y^2 - 2y - x = 0$ خط $y = 1$ می باشد.

حل: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha = 0, \beta = 1)$ انتقال داده، معادله منحنی را در دستگاه جدید می نویسیم:

$$x = X + \alpha \Rightarrow x = X + 0 = X, y = Y + \beta = Y + 1$$

به جای x در معادله X و به جای y در معادله $Y + 1$ قرار داده داریم:



شکل ۳

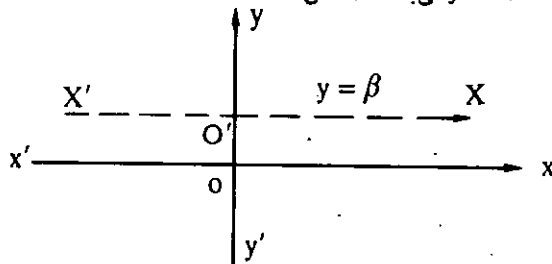
$$(Y+1)^2 - 2(Y+1) - X = 0 \Rightarrow Y^2 + 2Y + 1 - 2Y - 2 - X = 0 \Rightarrow Y^2 - X - 1 = 0$$

اگر در این معادله Y را به $-Y$ تبدیل نماییم معادله تغییر نمی کند پس محور تقارن محور x های جدید یعنی خط $y = 1$ محور تقارن منحنی می باشد. (شکل ۳)

مثال ۹: اگر محور تقارن منحنی به معادله $y^2 - 2y - x = 0$ خطی موازی محور x ها باشد معادله محور تقارن را بیابید. حل: مطابق فرض خط $y = \beta$ محور تقارن منحنی بوده مبدأ مختصات را به نقطه $O'(0, \beta)$ انتقال داده داریم:

$$x = X + 0 = X, y = Y + \beta, (Y + \beta)^2 - 2(Y + \beta) - X = 0 \Rightarrow Y^2 + 2\beta Y + \beta^2 - 2Y - 2\beta - X = 0 \Rightarrow Y^2 + 2Y(\beta - 1) - X + \beta^2 - 2\beta = 0$$

اگر در معادله اخیر Y را به $-Y$ تبدیل نماییم معادله نباید تغییر کند و این در صورتی است که $\beta - 1 = 0$ یا $\beta = 1$ پس محور تقارن منحنی خط $y = 1$ می باشد. (شکل ۴)

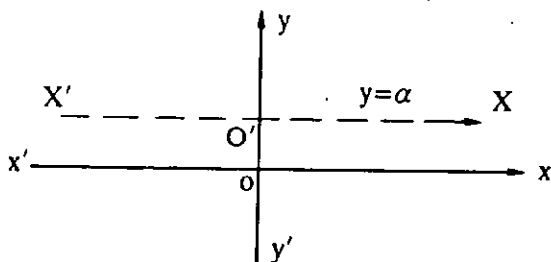


شکل ۴

تبصره ۳: نشان دهید محور تقارن منحنی به معادله $y = a \pm f(x) \sqrt{g(x)}$ خط $y = a$ می باشد.

حل: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha = 0, \beta = a)$ انتقال داده داریم:

$$x = X + 0 = X, y = Y + \beta = Y + a, Y + a = a \pm f(x) \sqrt{g(x)} \Rightarrow Y = \pm f(x) \sqrt{g(x)}$$



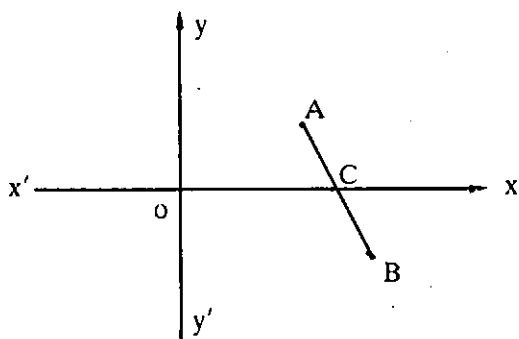
شکل ۵

یعنی محور x های جدید یا خط $y = a$ محور تقارن است. (شکل ۵)

$$y=0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = 4 \Rightarrow 4x-4 = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$M\left(\frac{5}{4}, 0\right)$$

مثال ۱۲: نقطه‌ای روی محور x ها بیابید که مجموع فواصل آن از دو نقطه $A(1, 1)$ و $B(2, -1)$ می‌نیم باشد.
حل: چون دو نقطه A و B در طرفین محور x ها قرار دارند جواب مسأله نقطه برخورد خط AB با محور x ها یعنی نقطه C است.



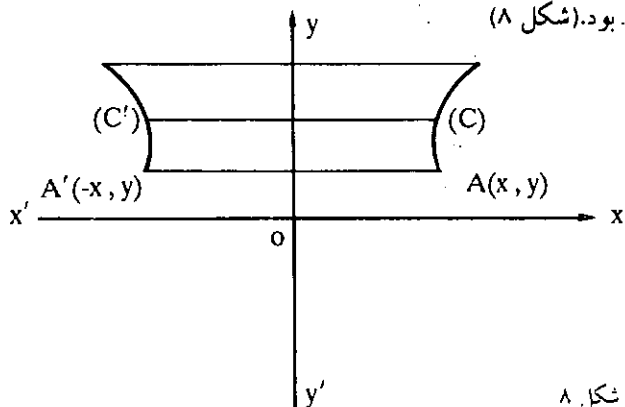
شکل ۷

$$A(x_1=1, y_1=1) \text{ و } B(x_2=2, y_2=-1), AB \equiv$$

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{-1-1}{2-1} = -2 \text{ و } y_c=0 \Rightarrow \frac{-1}{x-1} = -2 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = 2 \Rightarrow$$

$$2x-2 = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

۲: تقارن منحنی نسبت به محور y ها: برای به دست آوردن قرینه منحنی (C) نسبت به محور y ها قرینه هر نقطه منحنی را نسبت به محور y ها به دست آورده این نقاط را به هم وصل نموده شکل به دست آمده یعنی (C') قرینه منحنی نسبت به محور y ها خواهد بود. (شکل ۸)



شکل ۸

مثال ۱۰: اگر خط $y = 1$ معادله محور تقارن منحنی $y = m - 1 \pm x\sqrt{x}$ باشد m کدام است؟

حل: با توجه به تبصره (۳) خط $y = m - 1 = 1$ محور تقارن

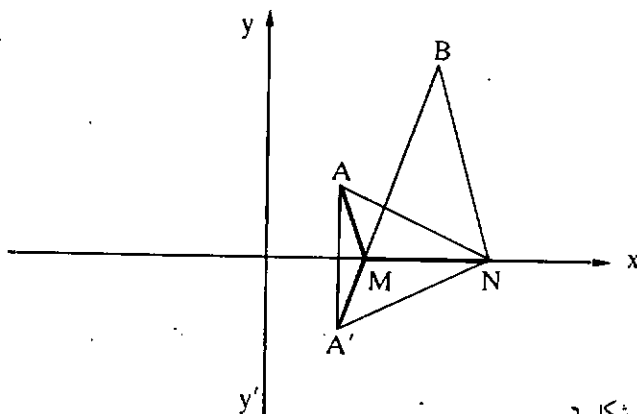
بوده پس $m = 2$ می‌باشد.

مثال ۱۱: نقطه‌ای روی محور x ها بیابید که مجموع فواصل آن نقطه از نقاط $A(1, 1)$ و $B(2, 3)$ می‌نیم باشد.
حل: قرینه نقطه A را نسبت به محور x ها به دست آورده آن را نقطه A' می‌نامیم نقطه A' را به B وصل نموده تا محور x ها را در نقطه M قطع نماید نقطه M جواب مسأله است زیرا اگر نقطه دیگری مانند N روی محور x ها در نظر بگیریم نشان خواهیم داد که $MA + MB > NA + NB$ می‌باشد. چون نقاط M و N روی عمود منصف AA' می‌باشند پس $MA = MA'$ و $NA = NA'$ (هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط فاصله‌اش از دو سر آن پاره خط به یک اندازه می‌باشد) و در مثل $NA'B$ داریم:

$$A'B < NA' + NB \Rightarrow A'M + MB < NA' + NB \Rightarrow$$

$$MA + MB < NA + NB$$

برای به دست آوردن نقطه M معادله خط $A'B$ را نوشته در این معادله به جای y صفر قرار داده طول نقطه M به دست می‌آید.



شکل ۹

$$A'(x_1=1, y_1=-1) \text{ و } B(x_2=2, y_2=3), A'B \equiv$$

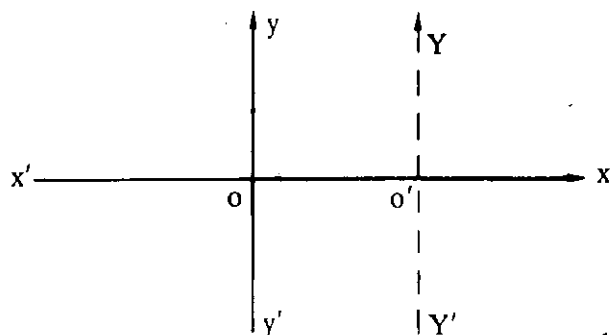
$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = \frac{3+1}{2-1} \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = 4,$$

مثال ۵: نشان دهید محور تقارن منحنی به معادله $y = x^2 - 4x + 1$ خط $x = 2$ می باشد.

حل: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha = 2, \beta = 0)$ انتقال داده داریم:

$$x = X + \alpha = X + 2, y = Y + \beta = Y + 0 = Y, Y = (X + 2)^2 - 4(X + 2) + 1 \Rightarrow Y = X^2 + 4X + 4 - 4X - 8 + 1 \Rightarrow Y = X^2 - 2$$

اگر در این معادله X را به $-X$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی کند لذا محور تقارن منحنی محور Y های جدید یعنی خط $x = 2$ می باشد. (شکل ۱۰)



شکل ۱۰

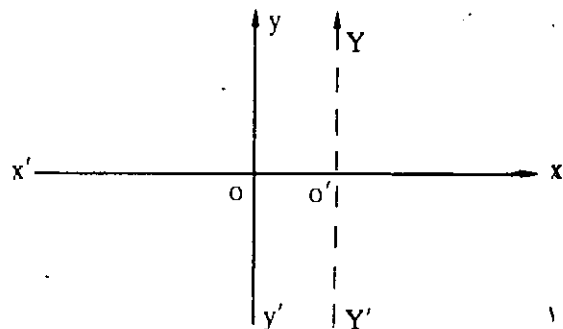
مثال ۶: اگر محور تقارن منحنی $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x + 6}$ موازی Y ها باشد معادله این محور تقارن کدام است؟

حل: محور تقارن را خط $x = \alpha$ فرض کرده مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha, 0)$ انتقال داده داریم:

$$x = X + \alpha, y = Y + 0 = Y \Rightarrow Y =$$

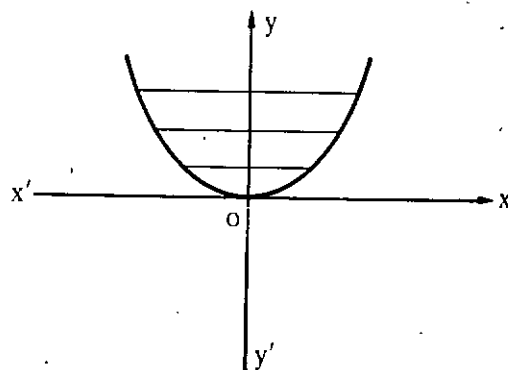
$$\frac{X^2 + 2\alpha X + \alpha^2 - 2X - 2\alpha + 3}{X^2 + 2\alpha X + \alpha^2 - 2X - 2\alpha + 6} =$$

$$\frac{X^2 + 2(\alpha - 1)X + \alpha^2 - 2\alpha + 3}{X^2 + 2(\alpha - 1)X + \alpha^2 - 2\alpha + 6}$$



شکل ۱۱

به خصوص اگر قرینه هر نقطه منحنی نسبت به محور Y ها روی خود منحنی باشد در این صورت می گوئیم محور Y ها محور تقارن منحنی است. (شکل ۹)



شکل ۹

برای به دست آوردن قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به محور Y ها کافی است x را به $-x$ تبدیل نماییم یعنی نقطه $A'(-x, y)$ قرینه نقطه A می باشد. و برای به دست آوردن معادله منحنی (C') در معادله منحنی (C) بایستی x را به $-x$ تبدیل نماییم و y را تغییر ندهیم.

مثال ۱: مختصات قرینه نقطه $A(2, 3)$ نسبت به محور Y ها کدام است؟

حل: کافی است x نقطه A را به $-x$ یعنی -2 را به -2 تبدیل نماییم پس قرینه نقطه A نقطه $A'(-2, 3)$ می باشد.

مثال ۲: اگر دو نقطه $A(a + 2, 3)$ و $A'(2, 3)$ قرینه یکدیگر باشند مقدار a کدام است؟

$$x_{A'} = -x_A \Rightarrow 2 = -a - 2 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

مثال ۳: معادله قرینه پاره خط AB که در آن $B(2, 3)$ و $A(1, 1)$ می باشد نسبت به محور Y ها کدام است؟

حل: $A(x_1 = 1, y_1 = 1)$ و $B(x_2 = 2, y_2 = 3)$,

$$AB \equiv \frac{y-1}{x-1} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

کافی است در این معادله x را به $-x$ تبدیل نماییم داریم:

$$\frac{y-1}{-x-1} = 2 \Rightarrow y-1 = -2x-2 \Rightarrow \boxed{y = -2x-1}$$

مثال ۴: محور تقارن شکل به معادله $y = |x|$ کدام است؟

حل: اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم $y = |-x| = |x|$ چون معادله تغییر نکرد لذا محور Y ها محور تقارن است.

اگر در معادله اخیر X را به $-X$ تبدیل نمایم معادله نباید تغییر کند و این در صورتی است که $\alpha - 1 = 1$ یا $\alpha = 1$ پس $X = 1$ محور تقارن منحنی می باشد. (شکل ۱۱)

تبصره ۴: شرط آنکه منحنی به معادله $y = \frac{aX^2 + bX + c}{a'X^2 + b'X + c'}$ فقط دارای یک محور تقارن موازی y ها باشد چیست؟ و معادله محور تقارن را بیابید.

حل: محور تقارن را خط $X = \alpha$ فرض نموده مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha, 0)$ انتقال داده داریم:

$$X = X + \alpha, y = Y + 0 = Y \Rightarrow Y =$$

$$\frac{a(X+\alpha)^2 + b(X+\alpha) + c}{a'(X+\alpha)^2 + b'(X+\alpha) + c'} = \frac{aX^2 + 2a\alpha X + a\alpha^2 + bX + b\alpha + c}{a'X^2 + 2a'\alpha X + a'\alpha^2 + b'X + b'\alpha + c'}$$

$$\frac{aX^2 + (2a\alpha + b)X + a\alpha^2 + b\alpha + c}{a'X^2 + (2a'\alpha + b')X + a'\alpha^2 + b'\alpha + c'}$$

اگر X را به $-X$ تبدیل نمایم باید معادله تغییر نکند و این در صورتی است که

$$2a\alpha + b = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ و } 2a'\alpha + b' = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{b'}{2a'}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{b'}{2a'} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Rightarrow \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$$

اگر چنانچه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = K$ باشد در این صورت

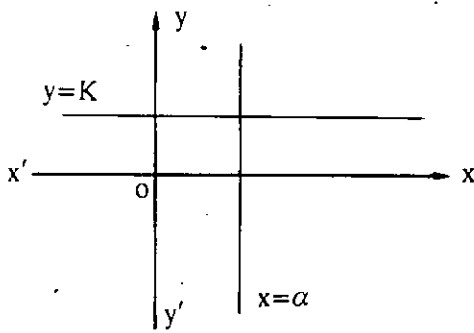
$$a = a'K, b = b'K, c = c'K,$$

$$y = \frac{a'Kx^2 + b'Kx + c'K}{a'x^2 + b'x + c'} =$$

$$\frac{K(a'x^2 + b'x + c')}{a'x^2 + b'x + c'} = K \Rightarrow y = K$$

زیرا خط $y = K$ دارای بی شمار محور تقارن موازی y ها دارد.

در شکل (۱۲) اگر مثلاً خط $x = \alpha$ را در نظر بگیریم قرینه هر نقطه خط $y = K$ نسبت به خط $x = \alpha$ روی خط $y = K$ قرار خواهد گرفت. لذا بایستی $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد و معادله محور تقارن



شکل ۱۲

$$\text{خط } x = \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-b'}{2a'}$$

مثال ۷: معادله محور تقارن منحنی به معادله

$$y = \frac{x^2 - (\alpha - 1)x + 2}{3x^2 + 2x + 1}$$

حل:

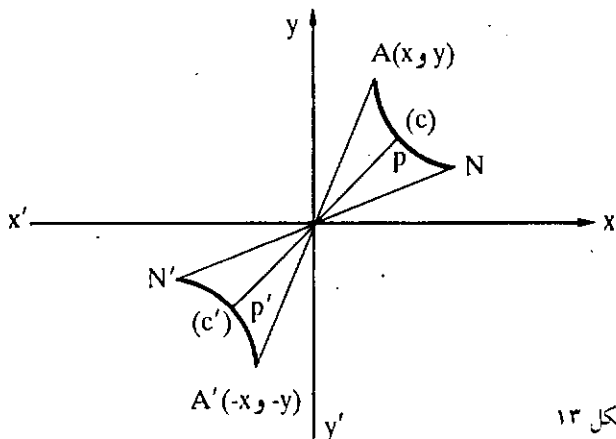
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \text{ و } \frac{1}{3} = \frac{-\alpha + 1}{2} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$2 = -3\alpha + 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \text{ و } x = -\frac{b}{2a} = \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{2} =$$

$$-\frac{1}{3} \text{ یا } x = -\frac{b'}{2a'} = -\frac{2}{1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$$

۳: تقارن منحنی نسبت به مبدأ مختصات: برای به دست

آوردن قرینه نقطه A نسبت به مبدأ O از نقطه A به O وصل کرده، OA را به اندازه خود امتداد می دهیم تا A' به دست آید نقطه A' قرینه نقطه A نسبت به مبدأ O نامیده و نقطه O را مرکز تقارن



شکل ۱۳

مثال ۳: مرکز تقارن شکل به معادله $|y| = |x|$ کدام است؟

حل: x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کرده داریم:

$$|-y| = |-x| \Rightarrow |y| = |x|$$

چون معادله تغییر نکرد پس مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی می باشد.

مثال ۴: اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی:

$$y = x^2 - (a+b-2)x^2 + x + 2a - b + 2 \quad (1)$$

باشد a و b کدام است؟

حل: x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نموده معادله نباید تغییر کند.

$$-y = -x^2 - (a+b-2)x^2 - x + 2a - b + 2$$

طرفین معادله را در منها ضرب کرده داریم:

$$y = x^2 + (a+b-2)x^2 + x - 2a + b - 2 \quad (2)$$

با مقایسه معادله های (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} -(a+b-2) = a+b-2 \\ 2a-b+2 = -2a+b-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a+b-2) = 0 \\ 2(2a-b+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b-2 = 0 \\ 2a-b+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a+1 = 0 \Rightarrow$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ و } \frac{-1}{2} + b - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{5}{2}}$$

یا می توانیم بگوییم جملاتی که تغییر می کنند باید وجود نداشته باشند یعنی بایستی ضرایب آنها صفر باشند.

مثال ۵: معادله قرینه منحنی به معادله $y = x^2 - x$ نسبت به مبدأ O کدام است؟

حل: x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نموده داریم:

$$-y = -x^2 + x \Rightarrow \boxed{y = x^2 - x}$$

چون معادله به دست آمده همان معادله اولیه می باشد لذا مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است.

مثال ۶: نشان دهید نقطه $O'(1, 1)$ مرکز تقارن منحنی به

$$\text{معادله } y = \frac{x+1}{x-1} \text{ می باشد.}$$

حل: مبدأ مختصات را به نقطه $O'(\alpha = 1, \beta = 1)$ انتقال

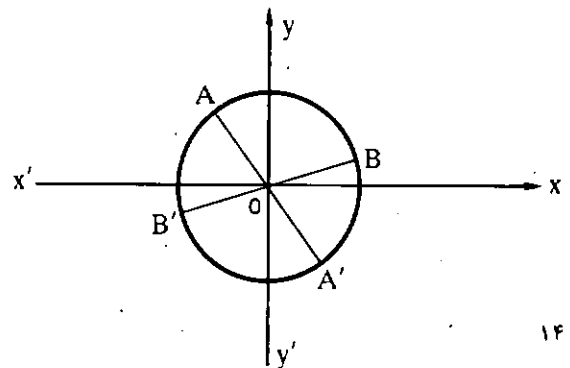
داده داریم:

می نامند و برای به دست آوردن قرینه مرکزی منحنی (c) نسبت به مبدأ O قرینه های مرکزی هر یک از نقاط منحنی (c) را به دست آورده این نقاط را به هم وصل می نمایم منحنی (c') قرینه منحنی (c) نسبت به مبدأ O می باشد. (شکل ۱۳)

$$OA = OA', OP = OP', ON = ON'$$

بخصوص اگر قرینه هر نقطه از منحنی (c) نسبت به مبدأ O بر خود منحنی (c) منطبق باشد مبدأ O را مرکز تقارن منحنی نامند. (شکل ۱۴)

$$OA = OA', OB = OB'$$



شکل ۱۴

و نیز اگر نقطه $A(x, y)$ باشد مختصات نقطه A' قرینه نقطه A به صورت $A'(-x, -y)$ است. یعنی برای به دست آوردن مختصات قرینه نقطه A نسبت به مبدأ O بایستی x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نمایم و برای به دست آوردن معادله منحنی (c') در معادله منحنی (c) بایستی x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نمایم.

مثال ۱: مختصات قرینه نقطه $A(2, 3)$ نسبت به مبدأ O کدام است؟

حل: x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل می نمایم قرینه نقطه A نقطه $A'(-2, -3)$ می باشد.

مثال ۲: اگر نقاط $A(a+b, 2a-b)$ و $B(2, 2)$ نسبت به مبدأ O قرینه باشند a و b کدام است؟

$$\begin{cases} x_A = -x_B \\ y_A = -y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -2 \\ 2a-b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = -6 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$-Y = \frac{X' - (\alpha - \beta - 1)X + \alpha' - \alpha\beta + \beta - \alpha + 2}{-X + \alpha - 1} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{X' - (\alpha - \beta - 1)X + \alpha' - \alpha\beta + \beta - \alpha + 2}{X - \alpha + 1} \quad (2)$$

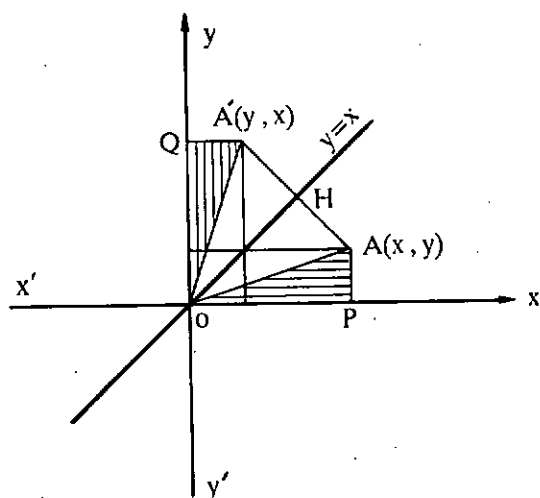
با توجه به معادلات (۱) و (۲) جملاتی که تغییر می‌کنند ضرایب آنها را صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta - 1 = 0 \\ \alpha - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow O'(1, 1)$$

۴: تقارن منحنی نسبت به نمیشازهای $y=x$ و $y=-x$: قرینه

نقطه A را نسبت به خط $y=x$ نقطه A' می‌نامیم چون خط $y=x$ عمود منصف AA' می‌باشد پس

$$OA = OA' \text{ و نیز } \angle AOH = \angle A'OH$$



شکل ۱۶

و چون $\angle POH = \angle QOH$ بنابراین داریم:

$$\angle POH - \angle AOH = \angle QOH - \angle A'OH \Rightarrow \angle POA = \angle QOA'$$

دو مثلث قائم الزاویه AOP و A'OQ بنا به حالت تساوی وتر و یک زاویه حاده برابر بوده داریم:

$$\overline{OP} = \overline{OQ} \text{ و } \overline{PA} = \overline{QA'} \Rightarrow x_A = y_A \text{ و } y_A = x_{A'}$$

یعنی قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم نقطه $A'(y, x)$ می‌باشد. (شکل ۱۶)

و برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=x$

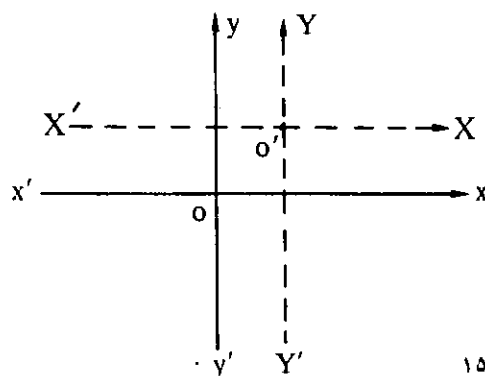
$$x = X + \alpha = X + 1, y = Y + \beta = Y + 1, Y + 1 = \frac{X + 1 + 1}{X + 1 - 1}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{X + 2}{X} - 1 = 1 + \frac{2}{X} - 1 \Rightarrow Y = \frac{2}{X}$$

اگر در این معادله X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل کنیم معادله نباید تغییر کند داریم:

$$-Y = -\frac{1}{X} \Rightarrow Y = \frac{1}{X}$$

لذا مبدأ جدید یعنی $O'(1, 1)$ مرکز تقارن منحنی می‌باشد. (شکل ۱۵)



شکل ۱۵

مثال ۷: مطلوب است مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$

حل: فرض می‌کنیم نقطه $O'(\alpha, \beta)$ مرکز تقارن منحنی باشد مبدأ مختصات را به نقطه O' انتقال داده داریم:

$$x = X + \alpha, y = Y + \beta, Y + \beta = \frac{X' + 2\alpha X + \alpha' - X - \alpha + 2}{X + \alpha - 1}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{X' + 2\alpha X + \alpha' - X - \alpha + 2}{X + \alpha - 1} - \beta \Rightarrow$$

$$Y = \frac{X' + 2\alpha X + \alpha' - X - \alpha + 2 - \beta X - \alpha\beta + \beta}{X + \alpha - 1} \Rightarrow$$

$$Y = \frac{X' + (2\alpha - \beta - 1)X + \alpha' - \alpha\beta + \beta - \alpha + 2}{X + \alpha - 1} \quad (1)$$

X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل نموده سپس طرفین معادله را در آنها ضرب می‌کنیم باید معادله تغییر نکند.

$$\begin{cases} x_A = -y_{A'} \\ y_A = -x_{A'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -2 \\ a-b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{5}{2}$$

مثال ۳: محورهای تقارن منحنی به معادله $x^2 + y^2 = 4$ را بیابید.
حل: اگر در معادله منحنی x را به $-x$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین محور y ها یعنی خط $x=0$ محور تقارن است. اگر در معادله منحنی y را به $-y$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین محور x ها یعنی خط $y=0$ محور تقارن است. اگر در معادله منحنی x را به y و y را به x تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین خط $y=x$ محور تقارن است. و اگر در معادله منحنی x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند بنابراین خط $y=-x$ محور تقارن است.

مثال ۴: معادله قرینه منحنی به معادله $y = x^2 - x$ را نسبت به نیمساز ربع دوم بیابید.

حل: در معادله داده شده x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل نموده داریم:

$$-x = y^2 - y \Rightarrow x = y - y^2$$

۵: طریقه به دست آوردن مرکز تقارن منحنیهای درجه دوم یعنی منحنیهایی که معادله آنها شامل x^2 یا y^2 یا xy بوده و به صورت

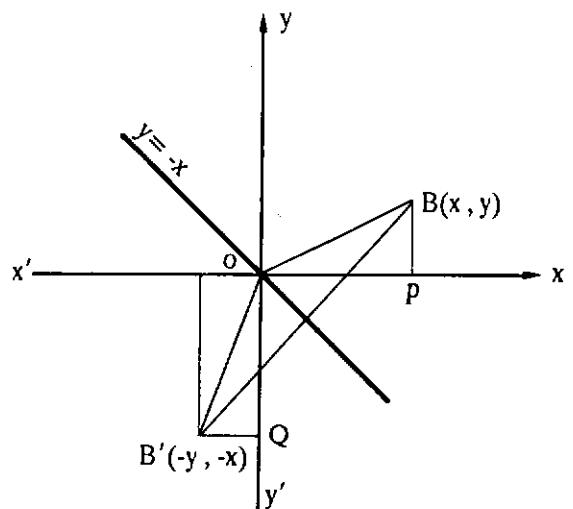
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \text{ می باشد.}$$

حل: نقطه $O'(\alpha, \beta)$ را مرکز تقارن فرض نموده مبدأ مختصات را به این نقطه انتقال داده داریم:

$$\begin{aligned} X = x + \alpha, y = y + \beta &\Rightarrow a(X + \alpha)^2 + 2b(X + \alpha)(Y + \beta) + c(Y + \beta)^2 + 2d(X + \alpha) + 2e(Y + \beta) + f = 0 \\ &\Rightarrow aX^2 + 2a\alpha X + a\alpha^2 + 2bXY + 2b\beta X + 2b\alpha Y + 2b\alpha\beta + cY^2 + 2c\beta Y + c\beta^2 + 2dX + 2d\alpha + 2eY + 2e\beta + f = 0 \\ &\Rightarrow aX^2 + 2bXY + cY^2 + (2a\alpha + 2b\beta + 2d)X + (2b\alpha + 2c\beta + 2e)Y + k = 0 \end{aligned}$$

مجموع اعداد معلوم را k فرض نمودیم اگر در این معادله X را به $-X$ و Y را به $-Y$ تبدیل کنیم معادله نباید تغییر کند لذا ضرایب

در معادله منحنی x را به y و y را به x تبدیل می‌نماییم.
قرینه نقطه $B(x, y)$ را نسبت به خط $y = -x$ نقطه $B'(-y, -x)$ می‌نامیم مانند قسمت قبل ثابت می‌شود دو مثلث قائم الزاویه OBP و $OB'Q$ برابرند بنابراین $x_{B'} = -y_B, y_{B'} = -x_B$ یعنی قرینه نقطه $B(x, y)$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم نقطه $B'(-y, -x)$ می‌باشد.



شکل ۱۷

و برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y = -x$ در معادله منحنی x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل می‌نماییم.

مثال ۱: مختصات قرینه‌های نقطه $A(-2, 3)$ را نسبت به نیمسازهای ربع اول و دوم بیابید.

حل: قرینه نقطه A را نسبت به نیمساز ربع اول نقطه A' و نسبت به نیمساز ربع دوم نقطه A'' نامیده داریم:

$$x_{A'} = y_A = 3, y_{A'} = x_A = -2 \Rightarrow A'(3, -2) \text{ و}$$

$$x_{A''} = -y_A = -3 \text{ و } y_{A''} = -x_A = -(-2) = 2 \Rightarrow A''(-3, 2)$$

مثال ۲: اگر دو نقطه $A(a+b, a-b)$ و $A'(-2, 3)$ نسبت به نیمساز ربع دوم قرینه باشند a و b کدام است؟

را که تغییر می نمایند صفر قرار می دهیم داریم:

$$\begin{cases} (1) \quad 2a\alpha + 2b\beta + 2d = 0 \\ (2) \quad 2b\alpha + 2c\beta + 2e = 0 \end{cases}$$

برای به دست آوردن معادلات (1) و (2) در معادله اصلی y را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر x از معادله منحنی مشتق می گیریم و نیز x را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر y از معادله منحنی مشتق می گیریم به جای x و y به ترتیب α و β قرار داده معادلات (1) و (2) به دست می آیند پس:

$$\begin{cases} y = \text{ثابت} \Rightarrow 2a\alpha + 2b\beta + 2d = 0 \\ x = \text{ثابت} \Rightarrow 2b\alpha + 2c\beta + 2e = 0 \end{cases}$$

مثال 3: مرکز تقارن منحنی به معادله $y = x - 1 \pm \sqrt{4 - x^2}$ کدام است؟

حل:

$$y = x - 1 \pm \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y - x + 1 = \pm \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow (y - x + 1)^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 + 1 - 2yx + 2y - 2x = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2yx + y^2 + 2y - 2x - 3 = 0$$

$$y = \text{ثابت} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y - 2 = 0 \\ -2x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \\ x = \text{ثابت} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y - 2 = 0 \\ -2x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0,$$

$$y = -1 \Rightarrow \boxed{O'(0, -1)}$$

مثال 4: محور تقارن منحنی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ کدام است؟

حل:

$$y = \text{ثابت} \Rightarrow 0 = 2ax + b \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{2a}} \text{ و}$$

$$x = \text{ثابت} \Rightarrow 1 = 0 \text{ امکان ندارد}$$

مثال 5: اگر محور تقارن منحنی به معادله $x = y^2 - ay + 2$ خط $y = 1$ باشد a کدام است؟

حل:

$$x = \text{ثابت} \Rightarrow 0 = 2y - a \Rightarrow y = \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

مثال 6: معادلات محورهای تقارن منحنی به معادله $2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y = 0$ را بیابید.

حل:

$$y = \text{ثابت} \Rightarrow 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}} \text{ و}$$

$$x = \text{ثابت} \Rightarrow 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{2} \Rightarrow \boxed{y = 4}$$

6: طریقه به دست آوردن مرکز تقارن منحنی

تابع هموگرافیک به معادله $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'} \Rightarrow a'xy + b'y = ax + b, \text{ حل:}$$

برهان 11

از حل دستگاه بالا مشخصات مرکز تقارن به دست می آید.
تبصره 5: اگر معادله منحنی از درجه دوم ولی شامل xy نباشد برای به دست آوردن محور یا محورهای تقارن y را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر x از معادله منحنی مشتق می گیریم و نیز x را ثابت نگاه داشته نسبت به متغیر y از معادله منحنی مشتق می گیریم از حل معادلات به دست آمده معادله های محورهای تقارن منحنی به دست می آید. روش استدلال مشابه قسمت (5) می باشد.

مثال 1: مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \frac{x+1}{x-1}$ کدام است؟

حل:

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow yx - y = x + 1, x = \text{ثابت} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 1} \quad y = \text{ثابت} \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

بنابراین $O'(1, 1)$ مرکز تقارن تابع هموگرافیک بالا می باشد.

مثال 2: اگر مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \frac{x^2 - bx + 2}{x - a}$ $O'(1, 1)$ باشد a و b کدام است؟

حل:

$$y = \frac{x^2 - bx + 2}{x - a} \Rightarrow x^2 - bx + 2 = yx - ay, x = \text{ثابت} \Rightarrow$$

$$x - a = 0, y = \text{ثابت} \Rightarrow 2x - b = y,$$

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ 2x - b = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ 2 - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 1} \text{ و } \boxed{b = 1}$$

مثال ۱: مرکز تقارن منحنی $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x - 3}$ را بیابید.

حل:

$$y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x - 3} \Rightarrow yx - 3y = x^2 + 2x + 5, x = \text{ثابت} \Rightarrow$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, y = \text{ثابت} \Rightarrow y = 2x + 2 \Rightarrow$$

$$y = 2 \times 3 + 2 = 8 \Rightarrow O'(3, 8)$$

و یا آنکه می‌توانیم بگوییم چون معادله منحنی پس از طرفین وسطین نمودن از درجه دوم است و دارای دو مجانب می‌باشد محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی است $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 5 \quad | \quad x - 3 \\ -x^2 + 3x \quad \quad \quad \\ \hline 5x + 5 \\ -5x + 15 \\ \hline 20 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = x + 5 \end{cases} \Rightarrow O'(3, 8)$$

مثال ۲: اگر مرکز تقارن منحنی $y = x + b + \frac{20}{x + a}$ نقطه $O'(3, 8)$ باشد a و b کدام است؟

حل:

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow x + a = 0 \Rightarrow x = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20}{x + a} = 0 \Rightarrow Y = x + b$$

$$\begin{cases} x = -a \\ y = x + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -a \\ 8 = 3 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3, b = 5 \end{cases}$$

مثال ۳: مرکز تقارن منحنی به معادله $y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 1}$ کدام است؟

$$Y = x + 1 + |x + 2|$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow Y = x + 1 + (x + 2) = 2x + 3$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow Y = x + 1 + (-x - 2) = -1$$

توجه داشته باشید معادلات مجانبها با رادیکال مثبت و رادیکال منفی معادلات بالا می‌باشد.

$$y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 4x + 1} \Rightarrow y - x - 1 = \pm \sqrt{x^2 + 4x + 1} \Rightarrow (y - x - 1)^2 = x^2 + 4x + 1$$

چون معادله بالا از درجه دوم است محل برخورد مجانبهای مرکز

$$y = \text{ثابت} \Rightarrow a'y = a \Rightarrow y = \frac{a}{a'}, x = \text{ثابت} \Rightarrow a'x + b' = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b'}{a'} \Rightarrow O'(-\frac{b'}{a'}, \frac{a}{a'})$$

اگر x به سمت ∞ میل کند خط $y = \frac{a}{a'}$ مجانب افقی و اگر y به سمت ∞ میل کند خط $x = -\frac{b'}{a'}$ مجانب قائم است همان‌طور که ملاحظه می‌شود محل برخورد مجانبهای مرکز تقارن منحنی می‌باشد.

مثال: معادله مکان هندسی مرکز تقارن منحنی به معادله

$$y = \frac{(m-1)x + 2}{x - 2m}$$

حل:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow y = m - 1, y \rightarrow \infty \Rightarrow x - 2m = 0 \Rightarrow x = 2m \Rightarrow$$

$$O'(x = 2m, y = m - 1)$$

برای به دست آوردن معادله مکان نقطه O' بین x و y پارامتر m را حذف می‌کنیم.

$$m = \frac{x}{2} \Rightarrow y = m - 1 = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$$

تبصره ۶: به‌طور کلی می‌توان بررسی کرد اگر معادله منحنی از درجه دوم یعنی شامل x^2 یا y^2 یا xy باشد و دارای دو مجانب باشد نقطه محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی است مانند تابع هموگرافیک مثال بالا.

تبصره ۷: اگر در تابع کسری درجه صورت کسر از مخرج کسر یک درجه بیشتر باشد در مبحث مجانبها ثابت می‌کنند برای به دست آوردن معادله مجانب مایل صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم نموده تابع خارج قسمت معادله مجانب مایل است و نیز ثابت می‌کنند

$$\text{معادله مجانب منحنی به معادله } y = g(x) + \frac{p(x)}{h(x)} \text{ اگر}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{h(x)} = 0, \text{ باشد به صورت } Y = g(x) \text{ و معادله مجانب‌های}$$

$$\text{منحنی } y = mx + h + \sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ که در آن } a > 0 \text{ است به صورت}$$

$$\begin{aligned} & Y = mx + h + \left| \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right| \text{ اگر } x \rightarrow +\infty \text{ معادله مجانب به} \\ & \text{صورت } Y = mx + h + \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}} \text{ و اگر } x \rightarrow -\infty \text{ معادله} \\ & \text{مجانب به صورت } Y = mx + h - \sqrt{ax} - \frac{b}{2\sqrt{a}} \text{ می‌باشد.} \end{aligned}$$

مثال ۱: مرکز تقارن منحنی $y = x^2 - 3x^2 + 2$ را بیابید.

حل: چون تابع درجه سوم می باشد مرکز تقارن منحنی همان نقطه عطف منحنی می باشد پس:

$$y' = 2x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 - 3 + 2 = 0 \\ \Rightarrow O'(1, 0)$$

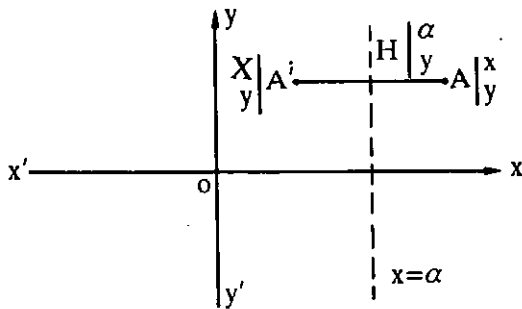
مثال ۲: در تابع $y = x^2 - 3x^2 + bx + 2$ را چنان بیابید که مرکز تقارن منحنی روی محور x ها باشد.

حل: $y' = 2x^2 - 6x + b \Rightarrow y'' = 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$
چون مرکز تقارن منحنی روی محور x ها می باشد عرض آن صفر است پس $O'(1, 0)$ و چون مرکز تقارن نقطه عطف است لذا مختصات آن در معادله منحنی صدق می کند یعنی

$$0 = 1^2 - 3 \times 1^2 + b \times 1 + 2 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

۸: طریقه به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی

نسبت به خط $x = \alpha$ و خط $y = \beta$ و نقطه $O'(\alpha, \beta)$



شکل ۱۸

قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به خط $x = \alpha$ نقطه $A'(x', y')$ می باشد و نقطه $H(\alpha, \beta)$ وسط پاره خط AA' است پس $\alpha = \frac{x+x'}{2}$ یا $x' = 2\alpha - x$ بنابراین برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $x = \alpha$ کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha - x$ تبدیل نموده و y را تغییر ندهیم. (شکل ۱۸)

و قرینه نقطه $B(x, y)$ نسبت به خط $y = \beta$ نقطه $B'(x', y')$ می باشد و نقطه $H'(\alpha, \beta)$ وسط پاره خط BB' است، پس: $\beta = \frac{y+y'}{2}$ یا $y' = 2\beta - y$ یعنی برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y = \beta$ کافی است در معادله منحنی y را به $2\beta - y$ تبدیل

$$\begin{cases} Y = 2x + 2 \\ Y = -1 \end{cases} \Rightarrow -1 = 2x + 2 \Rightarrow$$

$$x = -2 \Rightarrow \boxed{O'(-2, -1)}$$

۷: مرکز تقارن منحنی به معادله $y = ax^2 + bx^2 + cx + d$ نقطه عطف منحنی می باشد

اثبات: نقطه $O'(\alpha, \beta)$ را مرکز تقارن منحنی فرض نموده داریم:

$$\begin{aligned} X = X + \alpha, y = Y + \beta &\Rightarrow Y + \beta = a(X + \alpha)^2 + b(X + \alpha)^2 + c(X + \alpha) + d \\ &\Rightarrow Y + \beta = a(X^2 + 2X\alpha + \alpha^2) + b(X^2 + 2X\alpha + \alpha^2) + c(X + \alpha) + d \\ &\Rightarrow Y = aX^2 + (2a\alpha + b)X + (a\alpha^2 + b\alpha^2 + c\alpha + d - \beta) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} X \rightarrow -X, Y \rightarrow -Y &\Rightarrow -Y = aX^2 + X(2a\alpha + b) - x \\ &\quad (2a\alpha^2 + 2b\alpha + c) + a\alpha^2 + b\alpha^2 + c\alpha + d - \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = aX^2 - (2a\alpha + b)X - X \\ \quad + (2a\alpha^2 + 2b\alpha + c)X - a\alpha^2 - b\alpha^2 \\ \quad - c\alpha - d + \beta \end{aligned} \quad (2)$$

با مقایسه معادلات (۱) و (۲) جملاتی را که تغییر می کنند ضرایب آنها را صفر قرار می دهیم داریم.

$$2a\alpha + b = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}} \text{ و } a\alpha^2 + b\alpha^2 + c\alpha + d - \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\beta = a\alpha^2 + b\alpha^2 + c\alpha + d}$$

حال طول نقطه عطف را به دست می آوریم:

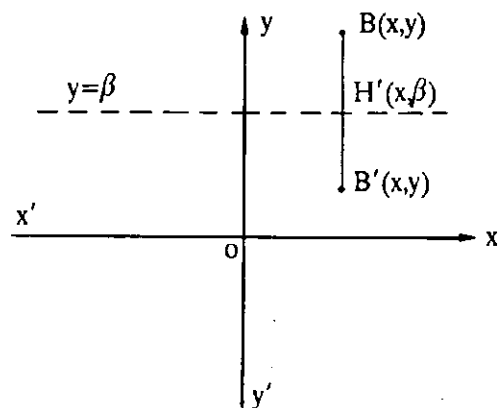
$$\begin{aligned} y' = 2ax^2 + 2bx + c &\Rightarrow y'' = 4ax + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{2b}{4a} \\ x = -\frac{b}{2a} = \alpha, y &= a\alpha^2 + b\alpha^2 + c\alpha + d = \beta \end{aligned}$$

یعنی نقطه عطف منحنی تابع درجه سوم همان مرکز تقارن منحنی می باشد.

چون معادله به دست آمده همان معادله اولیه می باشد پس خط $x=1$ محور تقارن معادله است. از ابتداء هم می توانستیم بگوییم در معادله

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{محور تقارن خط } x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{بوده بنابراین}$$

قرینه منحنی نسبت به محور تقارن آن یعنی نسبت به خط $x=1$ همان خود منحنی می باشد یعنی معادله قرینه همان معادله $y = x^2 - 2x$ است.



شکل ۱۹

مثال ۲: معادله قرینه منحنی $y = x^2 - x$ را نسبت به نقطه $O'(1, 1)$ بیابید.

حـل: کافی است در معادله منحنی x را به

$$2\alpha - X = 2 \times 1 - X = 2 - X$$

$$2\beta - Y = 2 \times 1 - Y = 2 - Y$$

$$2 - Y = (2 - X)^2 - (2 - Y) \Rightarrow 2 - Y =$$

$$4 - 4X + X^2 - 2 + Y \Rightarrow -2Y = X^2 - 4X \Rightarrow$$

$$Y = -\frac{1}{2}X^2 + 2X$$

مثال ۳: معادله قرینه منحنی $y = \frac{x+2}{x-2}$ را نسبت به نقطه

$O'(2, 1)$ بیابید.

حل: می دانیم در تابع هموگرافیک محل برخورد مجانبها مرکز

تقارن منحنی است پس:

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow y = \frac{a}{a'} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{و}$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow O'(2, 1)$$

چون نقطه O' مرکز تقارن منحنی می باشد بنابراین معادله قرینه منحنی نسبت به نقطه O' به صورت $y = \frac{x+2}{x-2}$ می باشد.

۹: طریقه به دست آوردن مختصات قرینه نقطه

$$A(x, y) \quad \text{نسبت به خط } ax + by + c = 0$$

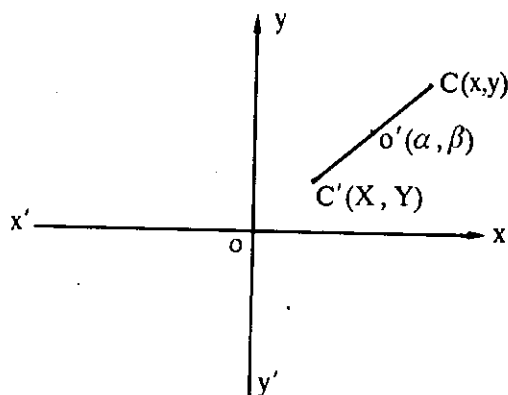
حل: قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به خط مزبور نقطه $A'(x', y')$

بوده و نقطه H روی خط فوق (خط d) وسط AA' است داریم:

$$m_d = d \quad \text{ضریب زاویه خط} = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_{AA'} = -\frac{1}{m_d} = \frac{b}{a}$$

نمایش x را تغییر ندهیم. (شکل ۱۹)

قرینه نقطه $C(x, y)$ نسبت به نقطه $O'(\alpha, \beta)$ نقطه $C'(x', y')$ می باشد.



شکل ۲۰

و نقطه $O'(\alpha, \beta)$ وسط پاره خط CC' است پس:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x+X}{2} \\ \beta = \frac{y+Y}{2} \end{cases}$$

یا $x = 2\alpha - X$ و $y = 2\beta - Y$ یعنی برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به نقطه $O'(\alpha, \beta)$ کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha - X$ و y را به $2\beta - Y$ تبدیل نماییم. (شکل ۲۰)

مثال ۱: معادله قرینه منحنی به معادله $y = x^2 - 2x$ را نسبت به

خط $x=1$ بیابید.

حل: به جای x در معادله منحنی $2\alpha - X = 2 - X$ قرار می دهیم:

$$y = (2 - X)^2 - 2(2 - X) \Rightarrow y = 4 - 4X + X^2 - 4 + 2X \Rightarrow$$

$$y = X^2 - 2X$$

$$2 - \frac{2}{13} = \frac{24}{13} \text{ و } y' = y_1 + 2bk = 2 + 2x - 1x - \frac{1}{13} =$$

$$2 + \frac{2}{13} = \frac{28}{13} \Rightarrow A'(\frac{24}{13}, \frac{28}{13})$$

۱۰: محورهای تقارن منحنی‌های به معادله

$$y = \frac{ax'+bx+c}{a'x+b'} \text{ و } y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

با استفاده از ماتریسهای تعامد می‌توان ثابت کرد معادله‌های

محورهای تقارن تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ به

صورت $y = x + \frac{a+b'}{a'}$ و $y = -x + \frac{a-a'}{a'}$ و نیز محورهای تقارن

منحنی به معادله $y = \frac{ax'+bx+c}{a'x+b'}$ خطوط نیمسازهای مجانبهای قائم

و مایل منحنی می‌باشد اثبات مطالب بالا مورد نیاز نمی‌باشد فقط از نظر اطلاع بیشتر دانش‌آموزان مطالب فوق را مطرح نمودم معذالک برای دست یافتن به اثبات آنها می‌توانید به کتاب متمم جبر و آنالیز تألیف محمدعابدی در بخش (۱۲) مبحث تقارن صفحه (۹۰) مراجعه نمایید.

مثال ۱: معادله محورهای تقارن منحنی به معادله $y = \frac{x+2}{4x+3}$ را بیابید.

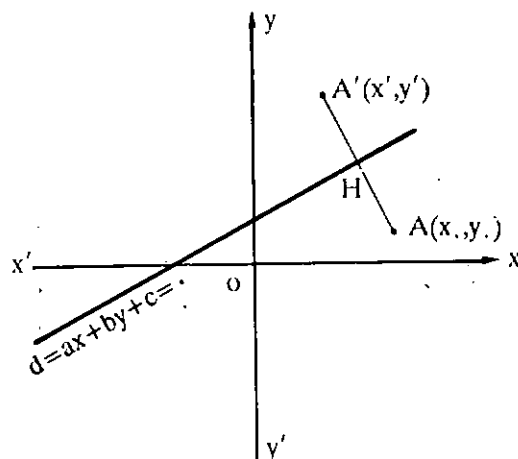
$$y = x + \frac{a+b'}{a'} = x + \frac{1+2}{4} \Rightarrow \boxed{y = x + 1} \text{ و حل:}$$

$$y = -x + \frac{a-a'}{a'} = -x + \frac{1-4}{4} \Rightarrow \boxed{y = -x - \frac{3}{4}}$$

مثال ۲: معادلات محورهای تقارن منحنی به معادله

$$y = \frac{x^2+2x+4}{x+2} \text{ را بیابید.}$$

$$\text{حل: و معادله مجانب قائم } y \rightarrow \infty \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$$



شکل ۲۱

$$\frac{AA'}{x-x_1} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{b}{a} (x-x_1) \Rightarrow \frac{y-y_1}{b} = \frac{x-x_1}{a} = k \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_H = x_1 + ak \\ y_H = y_1 + bk \end{cases}$$

این مختصات را در معادله خط (d) قرار داده داریم:

$$a(x_1 + ak) + b(y_1 + bk) + c = 0 \Rightarrow$$

$$k(a' + b') = -ax_1 - by_1 - c \Rightarrow$$

$$\boxed{k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a' + b'}} , x_H = \frac{x' + x_1}{2} \Rightarrow x' = 2x_H - x_1 = 2$$

$$(x_1 + ak) - x_1 \Rightarrow \boxed{x' = x_1 + 2ak} , y_H = \frac{y' + y_1}{2} \Rightarrow$$

$$y' = 2y_H - y_1 = 2(y_1 + bk) - y_1 \Rightarrow \boxed{y' = y_1 + 2bk}$$

مثال: مختصات قرینه خط $A(2, 2)$ را نسبت به خط $y = x + 2$ بیابید.

$$\text{حل: } A(x_1 = 2, y_1 = 2), x - y + 2 = 0,$$

$$k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a' + b'} = -\frac{2 - 2 + 2}{1 + (-1)} = -\frac{1}{0}$$

$$x' = x_1 + 2ak = 2 + 2 \times 1 \times 1 = 4$$

۳: قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به مبدأ O نقطه $A'(-x,-y)$ می باشد و برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به نقطه O کافی است در معادله منحنی x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله به دست آمده تغییر نکند مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی می باشد.

۴: قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به خط $y=x$ نقطه $A'(y,x)$ می باشد و برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=x$ کافی است در معادله منحنی x را به y و y را به x تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $y=x$ محور تقارن منحنی می باشد.

۵: قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به خط $y=-x$ نقطه $A'(-y,-x)$ می باشد و برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=-x$ کافی است در معادله منحنی x را به $-y$ و y را به $-x$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $y=-x$ محور تقارن منحنی می باشد.

۶: برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $x=\alpha$ کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha - x$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $x=\alpha$ محور تقارن منحنی می باشد.

۷: برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به خط $y=\beta$ کافی است در معادله منحنی y را به $2\beta - y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند خط $y=\beta$ محور تقارن منحنی می باشد.

۸: برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به نقطه $O'(\alpha, \beta)$ کافی است در معادله منحنی x را به $2\alpha - x$ و y را به $2\beta - y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله منحنی تغییر نکند نقطه O' مرکز تقارن منحنی می باشد.

۹: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y = \pm f(x) \sqrt{g(x)}$ محور x ها می باشد.

۱۰: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y = a \pm f(x) \sqrt{g(x)}$ خط $y=a$ می باشد.

۱۱: برای به دست آوردن مرکز تقارن منحنی درجه دوم به معادله $f(x,y)=0$ که شامل x^2 یا y^2 یا xy است y را ثابت نگاه داشته از معادله منحنی نسبت به متغیر x مشتق می گیریم یعنی $f'_x(x,y)=0$ و نیز x را ثابت نگاه داشته از معادله منحنی نسبت به متغیر y مشتق می گیریم یعنی $f'_y(x,y)=0$ از حل دستگاه

$$y = \frac{x(x+2)+4}{x+2} \Rightarrow y = x + \frac{4}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x+2} = 0 \Rightarrow Y = x$$

می دانیم معادلات نیمسازهای خطوط

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm \frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

به صورت

$$\begin{cases} Y-x=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{Y-x}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2}} = \pm \frac{x+2}{\sqrt{(1)^2+(0)^2}}$$

$$\frac{Y-x}{\sqrt{2}} = \pm (x+2) \Rightarrow Y = x \pm \sqrt{2}(x+2) \Rightarrow$$

$$Y = (\sqrt{2}+1)x + 2\sqrt{2} \quad \text{و} \quad Y = (1-\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$$

۱۱: خلاصه مطالب مربوط به مبحث تقارن که

می تواند مورد استفاده تستهای کنکور در این مبحث

قرارگیرد

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند یادگیری مطالب زیر به شرطی مفید می باشد که خواننده قبلاً کلیه مطالب مربوط به تقارن را مطالعه کرده باشد.

۱: قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به محور x ها نقطه $A'(x,-y)$ می باشد و برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به محور x ها کافی است در معادله منحنی y را به $-y$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله به دست آمده تغییر نکند محور x ها محور تقارن منحنی می باشد.

۲: قرینه نقطه $A(x,y)$ نسبت به محور y ها نقطه $A'(-x,y)$ می باشد و برای به دست آوردن معادله قرینه یک منحنی نسبت به محور y ها کافی است در معادله منحنی x را به $-x$ تبدیل نماییم. اگر چنانچه معادله به دست آمده تغییر نکند محور y ها محور تقارن منحنی می باشد.

تمرینهای مربوط به تقارن

۱: قرینه نقطه $A(2, 3)$ را نسبت به محور y ها نقطه A' فرض کرده و قرینه نقطه A' را نسبت به محور x ها نقطه A'' گرفته مختصات نقطه A'' کدام است؟

الف) $A''(-2, 3)$ ب) $A''(-2, -3)$

ج) $A''(2, -3)$ د) $A''(2, 3)$

۲: قرینه نقطه $A(-1, -2)$ را نسبت به نقطه $C(3, 1)$ نقطه A' گرفته و قرینه نقطه A' را نسبت به نقطه $C'(-1, -2)$ نقطه A'' فرض نموده طول پاره خط AA'' کدام است؟

الف) ۵ ب) ۸ ج) ۱۰ د) ۹

۳: قرینه نقطه $A(-2, -3)$ را نسبت به نیمساز ربع سوم نقطه A' فرض نموده و قرینه نقطه A' را نسبت به نیمساز ربع دوم نقطه A'' گرفته مختصات نقطه A'' کدام است؟

الف) $A''(2, 2)$ ب) $A''(-2, -2)$

ج) $A''(2, -2)$ د) $A''(2, 3)$

۴: اگر قرینه نقطه $A(2, 4)$ نسبت به خط (d) نقطه $A'(4, 2)$ باشد معادله عمود منصف پاره خط AA' کدام است؟

الف) $y = -x$ ب) $y = x$ ج) $y = x + 1$ د) $y = -x + 2$

۵: اگر قرینه نقطه $A(2, 3)$ نسبت به خط d نقطه $A'(-2, 1)$ باشد معادله عمود منصف پاره خط AA' کدام است؟

الف) $y = -2x + 2$ ب) $y = x + 2$

ج) $y = -x + 2$ د) $y = -2x + 1$

۶: مختصات قرینه نقطه $A(1, 2)$ را نسبت به خط $y = x + 1$ نقطه A' فرض نموده مختصات نقطه A' کدام است؟

الف) $A'(1, 2)$ ب) $A'(-1, 2)$

ج) $A'(2, 1)$ د) $A'(-2, 1)$

۷: قرینه نقطه $A(1, 0)$ را نسبت به خط $y = x + 1$ نقطه A' فرض نموده مختصات نقطه A' کدام است؟

الف) $A'(-1, 4)$ ب) $A'(-1, 2)$

ج) $A'(-2, 2)$ د) $A'(2, 2)$

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

مختصات مرکز تقارن منحنی به دست می آید و نیز اگر معادله منحنی از درجه دوم ولی جمله شامل xy نداشته باشد معادلات $f'_x(x, y) = 0$ و $f'_y(x, y) = 0$ معادله محورهای تقارن را در صورت وجود مشخص می نمایند و به خصوص محور تقارن منحنی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ و محور تقارن منحنی به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ می باشد.

۱۲: مرکز تقارن منحنی به معادله $y = ax^2 + bx^2 + cx + d$ نقطه عطف آن که طول آن $x = -\frac{b}{2a}$ بوده و برای به دست آوردن عرض آن $x = -\frac{b}{2a}$ را در معادله قرار داده عرض نقطه عطف به دست می آید.

۱۳: اگر معادله یک منحنی پس از طرفین وسطین نمودن از درجه دوم یعنی شامل x^2 یا y^2 یا xy باشد و دارای دو مجانب باشد نقطه محل برخورد مجانبها مرکز تقارن منحنی می باشد و اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج یک درجه بیشتر باشد برای به دست آوردن معادله مجانب مایل صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم نموده تابع خارج قسمت معادله مجانب مایل می باشد و به خصوص اگر معادله منحنی به صورت $y = f(x) + \frac{p(x)}{h(x)}$ باشد به طوری که $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{h(x)} = 0$ ، $Y = f(x)$ باشد معادله $Y = f(x)$ معادله مجانب منحنی می باشد.

۱۴: مختصات قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به خط $ax + by + c = 0$ نقطه $A'(x', y')$ است که $y' = y + 2bk$ و $x' = x + 2ak$ و $k = -\frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}$ می باشد.

۱۵: معادله محورهای تقارن منحنی به معادله $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ صورت $y = x + \frac{a + a'}{a'}$ و $y = -x + \frac{a - a'}{a'}$ بوده و نیز معادله محورهای تقارن منحنی به معادله $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ مجانبهای قائم و مایل منحنی می باشد.

۱۶: منحنی به معادله

$$\begin{cases} x = 1 + \sin \alpha \\ y = 2 + \cos \alpha \end{cases}$$

دارای چند محور تقارن می باشد؟

(الف) ۱ (ب) ۲ (ج) بی شمار (د) هیچ

۱۷: کدام گزینه زیر در مورد منحنی به معادله $y = x \pm \sqrt{4-x^2}$

درست می باشد؟

(الف) محور تقارن محور x ها است، (ب) محور تقارن محور y ها است، (ج) مبدأ مختصات مرکز تقارن است، (د) هیچ نوع تقارنی ندارد

۱۸: کدام گزینه زیر در مورد منحنی به معادله $y = \log(\sqrt{x^2+1}-x)$ درست می باشد؟

(الف) محور تقارن محور x ها است، (ب) محور تقارن محور y ها است، (ج) مرکز تقارن مبدأ مختصات است، (د) هیچ نوع تقارنی ندارد

۱۹: منحنی به معادله $y = 1 \pm \sqrt{-x^2+2x}$ دارای چند محور

تقارن می باشد؟

(الف) ۱ (ب) ۲ (ج) بی شمار (د) هیچ

۲۰: محور تقارن منحنی به معادله

$$\begin{cases} x = \cos 2\alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$$

کدام است؟

(الف) محور x ها (ب) محور y ها (ج) نیمساز ربع اول (د) نیمساز ربع دوم

۲۱: منحنی به معادله $(x-y)^2 + x^2 y^2 = 1$ دارای چند محور

تقارن است؟

(الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) هیچ

۲۲: معادله قرینه منحنی $y = 2x^2 - x + 2$ نسبت به نقطه

$O'(0, 2)$ کدام است؟

(الف) $y = 2x^2 - x + 2$ (ب) $y = x^2 - 2x^2 + 1$

(ج) $y = x^2 + x - 2$ (د) $y = x^2 - x - 2$

۲۳: معادله قرینه منحنی $y = 2x^2 - 8x + 1$ نسبت به خط

$x = 2$ کدام است؟

(الف) $y = x^2 - 4x + 2$ (ب) $y = 2x^2 - 8x - 1$

(ج) $y = 2x^2 + 8x - 1$ (د) $y = 2x^2 - 8x + 1$

۸: قرینه نقطه $A(1, 2)$ را نسبت به خط $y = 2x - 1$ نقطه A'

گرفته مختصات نقطه A' کدام است؟

(ب) $A'(\frac{7}{5}, \frac{9}{5})$

(الف) $A'(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$

(د) $A'(\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$

(ج) $A'(\frac{9}{5}, \frac{9}{5})$

۹: اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی

$$(2a-1)x^2 + (b+2)xy - (a+b)y^2 + (a+b+2)x +$$

$$(4a-8)y = 2$$

باشد a و b کدام است؟

(ب) $a = \frac{1}{2}$ و $b = -2$

(الف) $a = -2$ و $b = 4$

(د) $a = 2$ و $b = -4$

(ج) $a = 2$ و $b = -2$

۱۰: کدام گزینه زیر در مورد منحنی به معادله

$$\begin{cases} x = \sec \alpha \\ y = \tan \alpha \end{cases}$$

درست می باشد؟

(الف) منحنی یک محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد، (ب) منحنی یک مرکز تقارن و دو محور تقارن دارد، (ج) فقط یک محور تقارن دارد، (د) مرکز تقارن ندارد

۱۱: معادله محور تقارن منحنی $xy = 4$ کدام است؟

(الف) $y = x$ (ب) $y = -x$ (ج) محور x ها (د) الف و ب

۱۲: محور تقارن منحنی به معادله $y = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ کدام است؟

(الف) محور x ها (ب) محور y ها (ج) $y = x$ (د) $y = -x$

۱۳: شکل به معادله $|x| + |y| = 2$ دارای چند محور تقارن

می باشد؟

(الف) ۱ (ب) ۲ (ج) هیچ (د) ۴

۱۴: شکل به معادله $|x-1| + |y+2| = 4$ دارای چند

محور تقارن می باشد؟

(الف) ۱ (ب) ۴ (ج) هیچ (د) ۳

۱۵: مختصات مرکز تقارن منحنی به معادله

$$\begin{cases} x = 1 + 2\sin \alpha \\ y = 2 + 4\cos \alpha \end{cases}$$

کدام است؟

(ب) $O'(1, -2)$

(الف) $O'(-1, 2)$

(د) $O'(1, 2)$

(ج) $O'(-1, -2)$

۲۲: اگر معادله قرینه منحنی $y = \frac{1}{x}$ نسبت به خط $y = \beta$ به صورت $Y = \frac{2x-1}{x}$ باشد کدام است؟

- (الف) $\beta = 2$ (ج) $\beta = 1$
(ب) $\beta = -1$ (د) $\beta = \frac{2}{3}$

۲۵: اگر معادله قرینه منحنی به معادله $y = \frac{1}{x}$ نسبت به نقطه $O'(\alpha, \beta)$ به صورت $Y = \frac{2x-3}{x-2}$ باشد مختصات نقطه O' کدام است؟

- (الف) $O'(-1, -1)$ (ب) $O'(1, -1)$
(ج) $O'(1, 1)$ (د) $O'(-1, 1)$

۲۶: معادله محور تقارن منحنی $y = \frac{(m-2)x^2 - 2x + 2}{2mx^2 - x + 4}$ کدام است؟

- (الف) $x = \frac{1}{4}$ (ج) $x = \frac{1}{2}$
(ب) $x = \frac{-1}{4}$ (د) $x = \frac{-1}{2}$

۲۷: اگر نقطه $O'(0, 1)$ مرکز تقارن منحنی $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x}$ باشد کدام است؟

- (الف) $m = 1$ (ج) $m = 2$
(ب) $m = -1$ (د) $m = -2$

۲۸: اگر مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 3}$ روی خط $y = x + m$ باشد کدام است؟

- (الف) $m = 1$ (ج) $m = -2$
(ب) $m = 2$ (د) $m = -1$

۲۹: اگر مرکز تقارن منحنی به معادله $y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 - 2mx + 1}$ باشد کدام است؟

- (الف) $m = -1$ (ج) $m = \frac{1}{2}$
(ب) $m = 1$ (د) $m = \frac{-1}{2}$

۳۰: مختصات مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \tan x$ کدام است؟

- (الف) $O'(k\pi, 0)$ (ب) $O'(\frac{k\pi}{2}, 0)$

- (ج) $O'(2k\pi, 0)$ (د) $O'((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0)$

۳۱: منحنی به معادله $y = \tan x$ دارای چند محور تقارن موازی y ها می باشد؟

- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) بی شمار (د) هیچ

۳۲: مختصات مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \sin x$ کدام است؟

- (الف) $O'(\frac{k\pi}{2}, 0)$ (ب) $O'(k\pi, 0)$
(ج) $O'(2k\pi, 0)$ (د) $O'((2k+1)\pi, 0)$

۳۳: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y = \sin x$ در فاصله $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (الف) $x = \frac{\pi}{2}$ (ج) $x = \pi$
(ب) $x = \frac{3\pi}{2}$ (د) الف و ب

۳۴: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y = \cos(ax+b)$ کدام است؟

- (الف) $x = \frac{b}{a}$ (ج) $x = \frac{a}{b}$
(ب) $x = \frac{-b}{a}$ (د) $x = \frac{-b}{2a}$

۳۵: معادله محور تقارن منحنی به معادله $y = \cos x$ کدام است؟

- (الف) $x = \frac{k\pi}{2}$ (ج) $x = 2k\pi$
(ب) $x = k\pi$ (د) $x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$

۳۶: کدام نقطه زیر روی محور y ها وجود دارد که مجموع فواصل آن از دو نقطه $A(2, 1)$ و $B(3, 2)$ می نیم باشد؟

- (الف) $M(\frac{5}{2}, 0)$ (ج) $M(\frac{7}{5}, 0)$
(ب) $M(\frac{4}{5}, 0)$ (د) $M(\frac{9}{5}, 0)$

۳۷: اگر قرینه محور y ها را نسبت به خط (d) خط به معادله $y = \frac{4}{3}x$ باشد معادله خط (d) کدام است؟

- (الف) $y = \frac{-1}{3}x$ (ب) $y = 3x$ (ج) $y = \frac{1}{3}x$ (د) الف و ب

۳۸: نقاط $A(1, 2)$ و $B(2, 3)$ و $C(-3, 1)$ رؤس مثلث ABC می باشند مختصات قرینه محل برخورد میانه های مثلث نسبت به نقطه A کدام است؟

- (الف) $G'(2, 1)$ (ج) $G'(1, 3)$
(ب) $G'(2, 2)$ (د) $G'(3, 2)$

۳۹: تابع $y = \frac{x+m}{x-a}$ مفروض است اگر خط $x = 2$ مجانب و خط به معادله $y = x - 1$ محور تقارن منحنی باشد کدام است؟

- (الف) $m = 1$ (ب) $m = -1$ (ج) دلخواه (د) $m = 0$

۴۰: فاصله مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \frac{x-1}{x+1}$ از محور تقارن منحنی $y = \frac{2x+3}{x-1}$ که موازی نیمساز ربع دوم می باشد کدام است؟

- (الف) $2\sqrt{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ج) $3\sqrt{2}$ (د) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$