



✪ آهسان یار محمدی

هنگامی که در مورد نظریه گراف^۱ گفت و گویی صورت می گیریم، بدون شک اولین مطلبی که به ذهن مخاطبان می رسد، این است که گراف ها اغلب به صورت یک مدل ریاضی هستند که در قالب یک نمودار^۲ یا طرح هندسی به نمایش در می آیند، ولی در عمل برای نمایش تصویری یک گراف بر روی کاغذ با مرتبه و اندازه بزرگ که شامل نقاط و خطوط بسیار متعددی است، دچار مشکل می شویم. استفاده از ماتریس ها این مشکل را از بین می برد و کمک ارزنده ای را در درک بهتر گراف و مفاهیم در رابطه با آن ها به خواننده عرضه می کند.

از جیمز ژوزف سیلوستر^۳ (۱۸۹۷-۱۸۱۴) ریاضیدان برجسته انگلیسی تبار، که نخستین مجله آمریکایی مختص تحقیقات ریاضی را با نام American Journal of Mathematics بنیان نهاد و در پیشبرد نظریه ماتریس ها^۴ کارهای مهم و اساسی را انجام داد، می توان نام برد.

از اوایل سال های دهه سوم قرن بیستم میلادی، نگرشی جدید در سایه یک نظم ریاضی که کاربرد فراوانی در زندگی روزمره دنیای مدرن داشت، بر نظریه گراف ایجاد شد، که پیدایش و پیشرفت رایانه و علوم مربوط به آن، زمینه را برای نمایان تر شدن کاربرد نظریه گراف در عالم هستی فراهم کرد.

به هر گراف جهت دار $G=(V,E)$ از مرتبه p و اندازه q می توان

ماتریس های گوناگونی را که با نمودار گراف G در تناظر است، نسب داد. یکی از این ماتریس ها، ماتریس وقوع گراف جهت دار G^p بوده که موضوع این مقاله است؛ اما پیش از این که به این نوع از ماتریس ها و ویژگی های آن ها بپردازیم، لازم است که به برجسب گذاری در گراف ها اشاره داشته باشیم.

برای هر گراف $G=(V,E)$ از مرتبه p و اندازه q که دارای مجموعه رأس های $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ و مجموعه یال های $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ است، نموداری متناظر با ویژگی های گراف G می توان رسم کرد که در آن نمودار هر رأس از مجموعه رأس های $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ و هر یال از مجموعه یال های $E = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ انتخاب شده است. این عمل را در اصطلاح، برجسب گذاری رأس ها و یال های گراف G می نامیم.

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف جهت دار از مرتبه p و اندازه q باشد، ماتریس وقوع گراف جهت دار G را که با $M(G)$ نمایش می دهیم، به صورت زیر تعریف می کنیم

$$M(G) = [m_{ij}]_{p \times q} \text{ و } m_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{اگر یال جهت دار } e_j \text{ از رأس } v_i \text{ خارج شود} \\ 1 & \text{اگر یال جهت دار } e_j \text{ بر رأس } v_i \text{ وارد شود} \\ 0 & \text{اگر یال جهت دار } e_j \text{ بر رأس } v_i \text{ واقع نباشد} \end{cases}$$

تذکر: این تعریف به صورت دیگری هم مطرح می شود، به گونه ای که جای ۱ و -۱ در بالا عوض شود.

وقوع گراف، مربعی باشد یا تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر نباشد (مثال ۲)؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مستطیلی باشد.

۲. چون در بررسی ماتریس وقوع گراف جهت‌دار موضوع بحث، از برجسب‌گذاری برای رأس‌ها و یال‌های گراف استفاده می‌کنیم، بنابراین درایه‌های ماتریس وقوع این گراف همواره ۰، ۱ و -۱ هستند.

اکنون که به ماتریس وقوع گراف جهت‌دار G و ویژگی‌های آن آشنا شدیم، در مورد این گراف و ماتریس وقوع مربوط به آن، چند قضیه را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱

گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ با درجه ورودی $\text{In deg}(v_i)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع درایه‌های ۱ در سطر i ام ماتریس $M(G)$ ، برابر با درجه ورودی رأس v_i است.

برهان

هر عدد ۱ که در سطر i ام وجود دارد، نشان می‌دهد که بر رأس v_i یک یال وارد شده است. بنابراین تعداد یک‌های سطر i ام، برابر تعداد یال‌هایی است که بر رأس v_i وارد شده‌اند. در نتیجه، مجموع این یک‌ها، درجه ورودی رأس v_i را نشان می‌دهد.

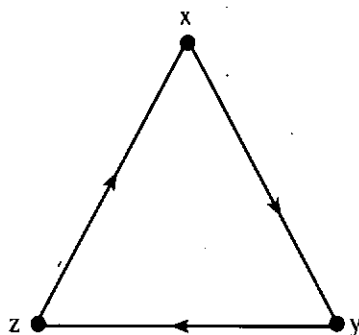
قضیه ۲

گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ با درجه خروجی $\text{Out deg}(v_i)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع درایه‌های -۱ در سطر i ام ماتریس $M(G)$ ، برابر با درجه خروجی رأس v_i است.

برهان

هر عدد -۱ که در سطر i ام وجود دارد، نشان می‌دهد که از رأس v_i یک یال خارج شده است. بنابراین تعداد منفی‌های سطر i ام، برابر تعداد یال‌هایی است که از رأس v_i خارج شده‌اند. در نتیجه، مجموع این منفی‌ها، درجه خروجی رأس v_i را نشان می‌دهد.

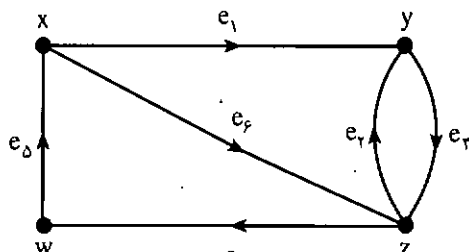
مثال. نمودار گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ شکل زیر است.



بنابراین ماتریس وقوع این گراف جهت‌دار به صورت

$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} (x,y) & (y,z) & (z,x) \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مثال. نمودار گراف جهت‌دار $G=(V,E)$ شکل زیر است.



بنابراین ماتریس وقوع این گراف جهت‌دار به صورت زیر است:

$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ w \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ویژگی‌های ماتریس وقوع گراف جهت‌دار $G=(V,E)$

۱. ممکن است تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر باشد (مثال ۱)؛ یعنی ماتریس

قضیه ۳

است که به رأس v_i وارد شده اند و تعداد منفی یک های ستون زام، برابر تعداد یال هایی است که از رأس v_i خارج شده اند. چون هر یال فقط به یک رأس وارد یا فقط از یک رأس خارج می شود، در نتیجه مجموع این یک ها و منفی یک ها برابر با صفر است.

گراف جهت دار $G=(V,E)$ از مرتبه p ، دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع تمام درایه های یک

سطرهای ماتریس $M(G)$ برابر $\sum_{i=1}^p \text{In deg}(v_i)$ است.

آزمون ۱. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت دار G به صورت زیر است:

$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z & w \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ w \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

برهان

مجموع درایه های یک سطر نام ماتریس $M(G)$ برابر با درجه ورودی رأس v_i است. بنابراین مجموع تمام درایه های

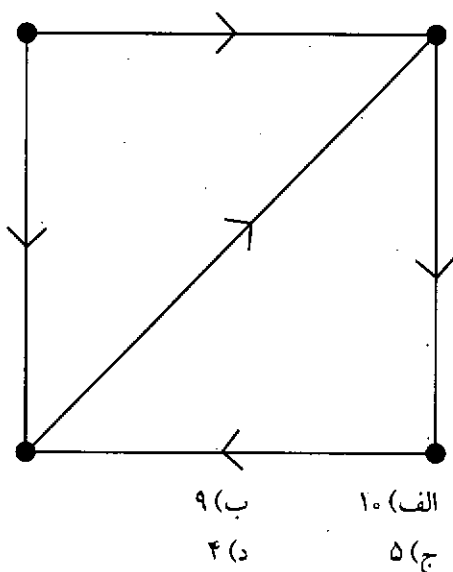
یک سطرهای ماتریس $M(G)$ ، برابر با $\sum_{i=1}^p \text{In deg}(v_i)$ است.

ماکزیمم درجه ورودی رأس گراف G ، کدام گزینه است؟

- الف) x ب) y
ج) z د) w

جواب: گزینه (ب) صحیح است؛ بنابر قضیه ۱.

آزمون ۲. تعداد درایه های یک ماتریس وقوع گراف جهت دار شکل زیر، کدام گزینه است؟



جواب: گزینه (ج) صحیح است؛ بنابر قضیه های ۲ و ۴.

قضیه ۴

گراف جهت دار $G=(V,E)$ از مرتبه p دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع تمام درایه های منفی یک

سطرهای ماتریس $M(G)$ ، برابر $\sum_{i=1}^p \text{Out deg}(v_i)$ است.

برهان

مجموع درایه های منفی یک سطر نام ماتریس $M(G)$ ، برابر با درجه خروجی از رأس v_i است. بنابراین مجموع تمام درایه های منفی یک سطرهای ماتریس $M(G)$ ، برابر با

$\sum_{i=1}^p \text{Out deg}(v_i)$ است.

قضیه ۵

گراف جهت دار $G=(V,E)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع درایه های ستون زام ماتریس $M(G)$ ، برابر با صفر است.

برهان

هر عدد یک یا منفی یک که در ستون زام وجود دارد، نشان می دهد که به رأس v_i یک یال وارد یا از رأس v_i یک یال خارج شده است. بنابراین تعداد یک های ستون زام، برابر تعداد یال هایی

آزمون ۳. کدام یک از ماتریس‌های زیر، نشان‌دهنده ماتریس وقوع گراف جهت‌دار است؟

(الف)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ب)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ج)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(د)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

جواب: گزینه (الف) صحیح است، بنابر قضیه ۵.

آزمون ۴. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G

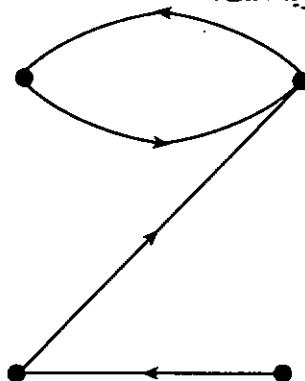
به صورت:
$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
 است. مجموع

درجه‌های ورودی رئوس گراف G کدام گزینه است؟

- (الف) ۱۶
(ب) ۱۲
(ج) ۸
(د) ۴

جواب: گزینه (د) صحیح است؛ بنابر قضیه ۳.

آزمون ۵. تعداد درایه‌های منفی یک ماتریس وقوع گراف شکل زیر، کدام گزینه است؟



- (الف) ۱۶
(ج) ۴
(ب) ۱۷
(د) ۳

جواب: گزینه (ج) صحیح است، بنابر قضیه ۳.

آزمون ۶. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت‌دار G به صورت زیر است:

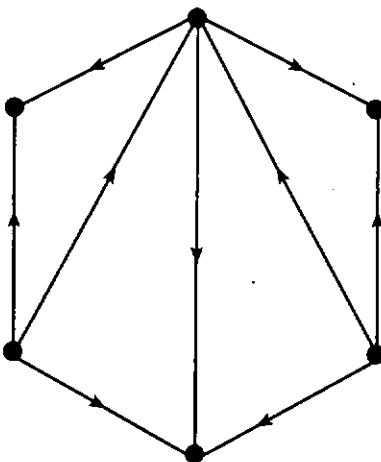
$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z & w \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ w \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ماکزیمم درجه خروجی رأس گراف G، کدام گزینه است.

- (الف) x
(ب) y
(ج) z
(د) w

جواب: گزینه (الف) صحیح است؛ بنابر این قضیه ۲.

آزمون ۷. تعداد درایه‌های صفر ماتریس وقوع گراف شکل زیر، کدام گزینه است؟



- (الف) ۴۵
(ب) ۴۲
(ج) ۴۸
(د) ۳۶

جواب: گزینه (د) صحیح است؛ بنابر قضیه‌های ۲ و ۴.

آزمون ۸. ماتریس مجاورت^۷ متناظر با گراف جهت دار G به صورت زیر است:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعداد درایه های صفر ماتریس وقوع گراف G، کدام گزینه است؟

- الف) ۸
ب) ۱۲
ج) ۱۶
د) ۲۰

جواب: گزینه (الف) صحیح است؛ بنابر قضیه های ۲ و ۴.

آزمون ۹. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت دار G به صورت زیر است:

$$M(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} (x,z) & (z,x) \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

کدام گزینه بیانگر رأس ایزوله در گراف G است.

- الف) w
ب) z
ج) y
د) x

جواب: گزینه (ب) صحیح است؛ بنابر قضیه های ۱ و ۲.

آزمون ۱۰. ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت دار G به صورت زیر است:

$$M(G) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

اندازه گراف G، کدام گزینه است؟

- الف) ۱۰
ب) ۹
ج) ۵
د) ۴

جواب: گزینه (ج) صحیح است؛ بنابر قضیه های ۲ و ۴.

تمرین

۱. قضیه گراف جهت دار $G=(V,E)$ با درجه ورودی $\text{In deg}(v_i)$ و درجه خروجی $\text{Out deg}(v_i)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع درایه های سطر نام ماتریس $M(G)$ ، برابر با $\text{In deg}(v_i) - \text{Out deg}(v_i)$ است.

۲. آیا ماتریس وقوع متناظر با گراف جهت دار شامل طوقه، G از مرتبه p و اندازه q وجود دارد؟ استدلال خود را به تفصیل بیان کنید.

زیر نویس

1. Graph Theory
2. Diagram
3. James Joseph silvester
4. Matrices Theory
5. Computer
6. Incidence Matrix of a Directed Graph
7. Adjacency Matrix

منابع

- [۱] نظریه گراف کلاسیک و مدرن، احسان یارمحمدی، انتشارات.
- [۲] درآمدی بر نظریه گراف، رین. ج. ویلسون، ترجمه: جعفر بی آزار، انتشارات دانشگاه گیلان.
- [3] O.Ore, and R.J.wilson, Graphs and their uses, The Mathematical Association of America, 1990.
- [4] R..p.Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, Addison-Wesley 1989.