

ماتریس های تبدیل



تبدیل در صفحه

اگر یک نقطه چون $A_1 = (x_1, y_1)$ را با ماتریس

$$M_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ و دو نقطه } A_1 = (x_1, y_1)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{bmatrix} \text{ را با ماتریس } A_2 = (x_2, y_2) \text{ و}$$

طور کلی اگر، n نقطه $A_1, A_2, \dots, A_n$ را با ماتریس

$$M_n = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \text{ نمایش دهید}$$

ماتریس M_n را ماتریس نقاط می نامیم.

حال اگر مختصات رئوس یک n ضلعی در صفحه

مفروض باشد، می توان یک ماتریس $2 \times n$ تشکیل داد.

تبدیل این n ضلعی به یک n ضلعی دیگر در صفحه، بحث

اصلی ما در این بخش است و سپس تعمیم آن یعنی تبدیل

بی شمار نقطه (مانند مجموعه نقاط روی یک خط یا یک

منحنی) به نقاطی دیگر در صفحه یعنی در $\mathbb{R}^2$ ، اگر

بخواهیم این عمل تبدیل توسط ماتریس ها صورت پذیرد،

به دنبال ماتریسی چون T_n هستیم که با ضرب شدن در

یک ماتریس نقاط، ماتریسی نقاط حاصل کند. یعنی باید

$$T_n \times \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}_{2 \times n} = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \end{bmatrix}_{2 \times n}$$

توجه به تعریف ضرب در مجموعه ماتریس ها، ماتریس

T_n فقط می تواند 2×2 باشد تا تبدیل در صفحه را برای ما

برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاض

به انجام برساند و هر نقطه در صفحه را به نقطه ای در همان

صفحه تبدیل کند. در واقع، هر ماتریس 2×2 به عنوان یک

عملگر می تواند، روی هر نقطه از صفحه $\mathbb{R}^2$ تأثیر کند و

نقطه جدیدی را در $\mathbb{R}^2$ تولید کند.

به هر ماتریس 2×2 یک ماتریس تبدیل در صفحه گفته

می شود و اگر ماتریس 2×2 چون A روی نقطه ای چون B

اثر کند و حاصل B' باشد، B' را تبدیل یافته نقطه B تحت

تأثیر ماتریس A می نامیم.

به عنوان مثال فرض کنید می خواهیم تبدیل یافته نقطه

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ را تحت تأثیر ماتریس } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ بیابیم، بنابراین}$$

T را از چپ در ماتریس نقطه A ضرب کنیم:

و کاربردهای آنها



ماتریس تبدیل کل (تبدیلات متوالی)

فرض کنیم نقطه A_1 ، تحت تأثیر ماتریس تبدیل T_1 به نقطه A_2 تبدیل شده باشد و سپس ماتریس تبدیل T_2 روی A_2 اثر کرده و نقطه A_3 حاصل شود و... و در نهایت ماتریس T_n روی نقطه A_n اثر کرده و نقطه A_{n+1} به دست آید، می خواهیم ماتریسی بیابیم که کار این n تبدیل را یک جا برای ما انجام دهد و با تأثیر روی A_1 مستقیماً به A_{n+1} برسیم. این ماتریس که به ماتریس تبدیل کل (در این n تبدیل متوالی) معروف است، از ضرب ماتریس های تبدیل به دست می آید که این ضرب از چپ به راست و از آخرین ماتریس تبدیل شروع و به اولین آنها ختم می شود:

$$T_1(A_1) = A_2$$

$$T_2(A_2) = A_3$$

$$\vdots$$

$$T_{n-1}(A_{n-1}) = A_n$$

$$T_n(A_n) = A_{n+1}$$

$$T_n(A_n) = A_{n+1} \Rightarrow T_n(T_{n-1}(A_{n-1})) = A_{n+1}$$

$$\Rightarrow T_n \left(\underbrace{T_{n-1}(T_{n-2}(A_{n-2}))}_{A_{n-1}} \right) = A_{n+1}$$

$$T_n(T_{n-1}(\dots(T_1(A_1))\dots)) = A_{n+1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{T_n T_{n-1} \dots T_1}_{T}(A_1) = A_{n+1} \Rightarrow T(A_1) = A_{n+1}$$

میدرهما میری

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مثال: مثلث ABC که $A \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $C \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ مفروض است

اگر این مثلث تحت تأثیر ماتریس تبدیل $T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ به مثلث

$A'B'C'$ تبدیل شود محیط مثلث $A'B'C'$ را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A' \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, B' \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, C' \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} A'B' &= \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \\ A'C' &= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \\ B'C' &= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \sqrt{40} + 2\sqrt{20}$$

(T همان ماتریس تبدیل کل است)

مثال: نقطه $A \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ را به ترتیب و متوالیاً تحت تأثیر

ماتریس‌های تبدیل $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ قرار داده‌ایم تا نقطه B حاصل شود؛

ماتریس تبدیل کل را برای این سه تبدیل متوالی به دست آورده و توسط آن مختصات B را محاسبه کنید.

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T(A) = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = B$$

تذکر: مربعی که طول هر ضلع آن برابر با یک واحد

باشد و $O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ مختصات رئوس آن باشند

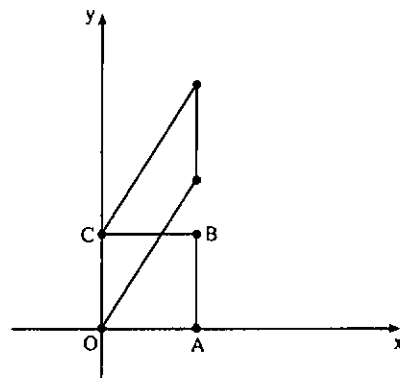
مربع واحد نامیده می‌شود و ماتریس نقاط این مربع به صورت زیر است:

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ماتریس نقاط مربع واحد}$$

مثال: تبدیل یافته مربع واحد تحت تأثیر ماتریس تبدیل

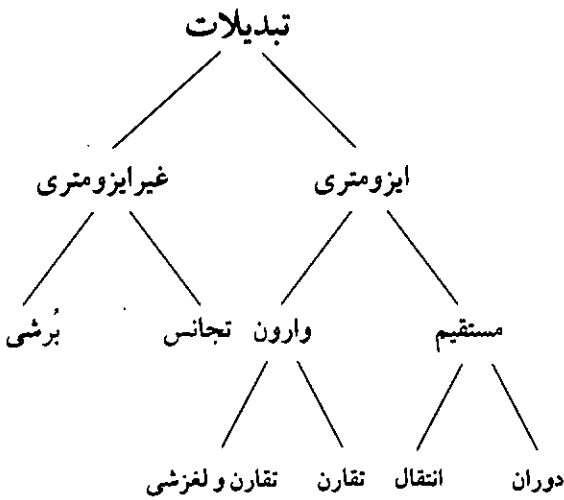
را تعیین کرده و هر دو را در یک دستگاه رسم کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



انواع تبدیل در صفحه

به طور کلی تبدیلات مهم را می‌توان طبق نمودار زیر دسته‌بندی کرد:



که تبدیلات ایزومتري به تبدیلاتی گفته می‌شود که با تأثیر آن‌ها، فاصله بین هر دو نقطه ثابت می‌ماند و یا به عبارت دیگر شکل تغییر نمی‌کند.

تبدیلات ماتریسی مهم

۱- ماتریس تجانس: نقطه $A \begin{vmatrix} kx \\ ky \end{vmatrix}$ را مجانس نقطه $A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

با نسبت تجانس k می‌نامیم و ماتریسی که می‌تواند A را به

A' تبدیل کند، عبارت است از $T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ که به آن

ماتریس تجانس می‌گوییم. اگر شکلی تحت تأثیر ماتریس تجانس تصویر شود (تبدیل شود) بر حسب مقادیر مختلف k داریم:

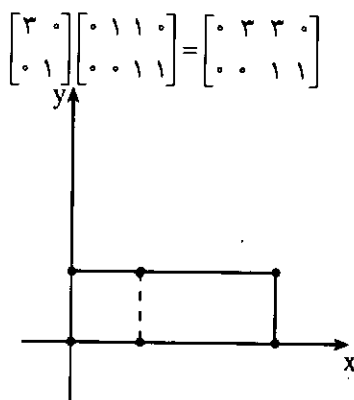
(الف) اگر $k = 1$ باشد، ماتریس همان تبدیل همانی است و تصویر شکلی بر خودش قابل انطباق است.

(ب) اگر $k > 1$ باشد، شکل در جهت مثبت بزرگتر می‌شود.

(ج) اگر $0 < k < 1$ باشد، شکل در جهت مثبت کوچک می‌شود.

مثال: شکل حاصل از تبدیل مربع واحد تحت تأثیر

ماتریس $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را رسم کنید.



(د) اگر $k = -1$ باشد، تبدیل را تقارن مرکزی نامیده و در واقع شکل نسبت به مبدأ مختصات قرینه می شود و تصویر بر خودش قابل انطباق است.

(ه) اگر $k < -1$ باشد، شکل حاصل در جهت منفی بزرگ می شود.

(و) اگر $-1 < k < 0$ باشد، شکل حاصل در جهت منفی کوچک می شود.

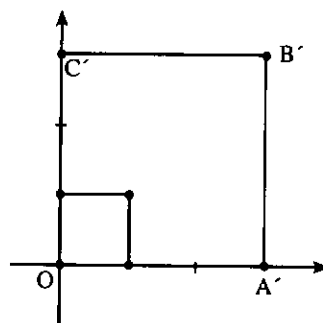
تذکر مهم: هر شکل تحت تأثیر ماتریس تجانس، مساحتش k^2 برابر می شود بنابراین تجانس یک تبدیل غیرایزومتري است، البته به شرطی که $k \neq \pm 1$ باشد.

مثال: مربع واحد تحت تأثیر ماتریس $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ به

چه شکلی تبدیل می شود؟

• $A' B' C'$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$



همان طور که مشاهده می کنید توسط ماتریس تجانس، شکل حاصل همواره با شکل اولیه متشابه هستند یعنی همه ابعاد شکل به یک نسبت بزرگ یا کوچک شده و زاویه ها حفظ می شوند.

۲- ماتریس های کشش: ماتریس های $T_1 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و

$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ به ترتیب ماتریس های کشش در امتداد محور

x و کشش در امتداد محور yها نامیده می شوند.



با توجه به اینکه رابطه‌های $x'_A + x'_C = x'_B + x'_D$ و $y'_A + y'_C = y'_B + y'_D$ برقرارند نتیجه می‌شود که چهارضلعی حاصل یک متوازی‌الاضلاع است که برای محاسبه مساحت آن کافی است. نقاط B' و D' را در فضای $\mathbb{R}^2$ و روی صفحه xy در نظر بگیریم که در این صورت دو بردار $\vec{oB'} = (a, c, 0)$ و $\vec{oD'} = (b, d, 0)$ حاصل می‌شود که متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط این دو بردار همسان متوازی‌الاضلاع مورد نظر بوده که مساحت آن از رابطه $\|\vec{oB'} \times \vec{oD'}\|$ به دست می‌آید (خط‌های عمودی بیرونی

نشانه قدرمطلق است)

$$S = \|(a, c, 0) \times (b, d, 0)\| = \|(0, 0, ad - bc)\| = \sqrt{(ad - bc)^2} \\ \Rightarrow S = |ad - bc|$$

نکته: در حالت کلی $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ و $C = (x_3, y_3)$ سه رأس یک مثلث باشند مساحت مثلث از رابطه $S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ به دست می‌آید و مساحت متوازی‌الاضلاعی که سه نقطه فوق سه رأس آن باشند، دو برابر مساحت فوق‌الذکر است. (خط‌های عمودی بیرونی نشانه قدرمطلق است.)

با توجه به نکته قبل مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل که نقاط $A' = (0, 0)$ و $B' = (a, c)$ و $D' = (b, d)$ سه رأس آن هستند برابر است با:

$$S = \begin{vmatrix} a - 0 & c - 0 \\ b - 0 & d - 0 \end{vmatrix} \Rightarrow S = |ad - bc|$$

تذکر: اگر T ماتریس تبدیل و دترمینان T یعنی $|T|$ برابر صفر باشد طبق نکته ذکر شده مساحت شکل حاصل صفر برابر مساحت شکل قبل بوده، یعنی مساحت شکل حاصل صفر می‌باشد درواقع نقاط تبدیل یافته همگی بر یک راستا واقعند و مساحتی تشکیل نمی‌شود.

همانطور که مشاهده می‌کنید مربع واحد در امتداد محور x ها توسط ماتریس کشش در امتداد محور x ها کشیده شده و به یک مستطیل تبدیل یافته است.

سؤال: منحنی به معادله $(x-1)^2 + y^2 = 4$ مفروض

است، شکل حاصل از تأثیر ماتریس $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ روی این

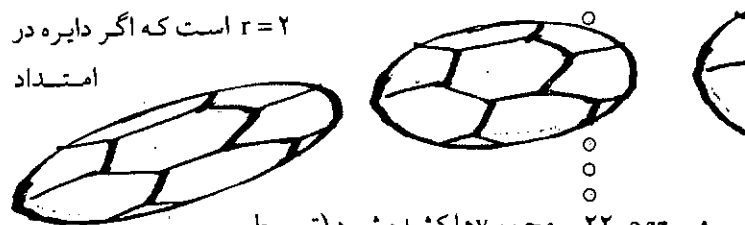
منحنی کدام است؟

- ۱- دایره
- ۲- بیضی قائم
- ۳- بیضی افقی
- ۴- هذلولی قائم

حل: منحنی داده شده یک دایره به مرکز w و به شعاع

$r = 2$ است که اگر دایره در

امتداد



محور y ها کشیده شود (توسط

ماتریس T این کار انجام می‌شود) به یک بیضی قائم تبدیل می‌شود پس گزینه (۲) صحیح است.

تذکر مهم: هر شکل تحت تأثیر ماتریس کشش، مساحتش $|k|$ برابر می‌شود پس تبدیل‌های کششی در امتداد محورهای x و y از نوع غیرایزومتری هستند باز هم به شرط آن که $k \neq \pm 1$ باشد.

نکته: در حالت کلی اگر T یک ماتریس تبدیل باشد و دترمینان ماتریس T برابر با α باشد یعنی $|T| = \alpha$ در این صورت مساحت شکل تبدیل یافته تحت تأثیر T ، $|\alpha|$ برابر مساحت اولیه است.

درواقع اگر فرض کنیم $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس تبدیل

دلخواهی در صفحه باشد و روی مربع واحد تأثیر کند، می‌بایست مساحت شکل حاصل $|ad - bc| \times 1$ باشد.

$$\begin{matrix} A & B & C & D & A' & B' & C' & D' \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 & a & a+b & b \\ 0 & c & c+d & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$