

108

لگاریتم

● احمد قندهاری

$$3\sqrt{3} = (\sqrt[5]{3})^x$$

دو طرف تساوی را به توان ۱۰ می‌رسانیم:

$$3^{10} (3^5) = (3^2)^x \Rightarrow 3^{15} = 3^{2x} \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{2}$$

مثال ۲: از تساوی $\log_{\sqrt[3]{2}} N = \frac{3}{4}$ ، N را بیابید.

حل: بنابه تعریف می‌توان نوشت:

$$N = (\sqrt[3]{2})^{\frac{3}{4}} \Rightarrow N = [2^{\frac{1}{3}}]^{\frac{3}{4}} \Rightarrow N = (2^{\frac{1}{4}})^{\frac{3}{4}} \Rightarrow N = 2$$

مثال ۳: اگر $\log_a(\sqrt{2}-1) = -1$ ، آن‌گاه a را بیابید.

حل: بنا به تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{-1} = (\sqrt{2}-1) \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

فرض می‌کنیم a عددی حقیقی و مثبت و مخالف عدد ۱ باشد. اگر اعدادی حقیقی مانند N و x وجود داشته باشند به طوری که $N = a^x$ ، در این صورت بنا به تعریف می‌گوییم: لگاریتم N در مبنای a برابر x است و می‌نویسیم:

$$N = a^x \Leftrightarrow \log_a N = x$$

عدد x را لگاریتم و عدد a را مبنای لگاریتم و عدد N را آنتی لگاریتم یا عدد L به‌ازا می‌گوییم.

چون a عددی مثبت است و عدد مثبت به هر توان که برسد مثبت است، پس a^x و N عددهایی مثبت‌اند. به همین دلیل است که می‌گویند اعداد منفی و صفر لگاریتم ندارند.

مثال ۱: از تساوی $3\sqrt{3} = x$ ، $\log_{\sqrt[3]{3}} x$ را بیابید.

حل: بنا به تعریف لگاریتم می‌توان نوشت:

$$۲) \log_a N = \frac{1}{p} \log_a N$$

$$۳) \log_{\frac{1}{a}} N = \log_{a^{-1}} N^{-1} = \log_a N$$

$$۴) \log_{\sqrt[p]{a}} \sqrt[p]{N} = \log_{a^{\frac{1}{p}}} N^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \log_a N = \frac{p}{m} \log_a N$$

۷. اگر $\log_b a = x$ و $\log_a b = y$ ، آن گاه می توان نوشت:

$$a = b^x, b = a^y \Rightarrow a = (a^y)^x \Rightarrow a = a^{x \cdot y} \\ \Rightarrow x \cdot y = 1 \Rightarrow \log_b a \times \log_a b = 1 \quad (۷)$$

نتایج فرمول ۷

$$۱) \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$۲) \log_{MN} a = \frac{1}{\log_a MN} = \frac{1}{\log_a M + \log_a N}$$

مثال: حاصل $\log_{\sqrt{24}} \sqrt{3}$ را بیابید.

حل:

$$\log_{\sqrt{24}} \sqrt{3} = \log_{24} 3 = \frac{1}{\log_2 24} = \frac{1}{\log_2 2^3 \times 3}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{24}} \sqrt{3} = \frac{1}{\log_2 2^3 + \log_2 3} = \frac{1}{3 \log_2 2 + \log_2 3} \\ = \frac{1}{3 + \log_2 3}$$

۸. فرض می کنیم: $\log_b a = x$ و $\log_c b = y$ و $\log_c a = z$ در نتیجه می توان نوشت:

$$a = b^x, b = c^y, a = c^z \\ a = a \Rightarrow c^z = b^x \Rightarrow c^z = (c^y)^x \Rightarrow c^z = c^{xy} \\ \Rightarrow z = xy \Rightarrow \log_b a \times \log_c b = \log_c a \quad (۸)$$

تعمیم:

$$\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \dots \times \log_n k = \log_n a$$

مثال:

$$\log_6 36 \times \log_6 6 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2$$

توجه: اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد، آن را نمی نویسیم.

۹

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a \Rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad (۹)$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}+1}{1} \Rightarrow a = \sqrt{2}+1$$

فرمول های لگاریتم

توجه: هر عددی که در مبنای لگاریتم قرار می گیرد، مثبت و مخالف ۱ است.

$$۱) 1 = a^0 \Rightarrow \log_a 1 = 0 \quad (۱)$$

$$۲) a = a^1 \Rightarrow \log_a a = 1 \quad (۲)$$

۳. اگر $M = a^x$ و $N = a^y$ ، آن گاه می توان نوشت:

$$\log_a M = x \text{ و } \log_a N = y$$

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y \Rightarrow M \cdot N = a^{x+y} \Rightarrow \log_a M \cdot N = x + y \\ \Rightarrow \log_a M \cdot M = \log_a M + \log_a N \quad (۳)$$

تعمیم:

$$\log_a M \cdot N \cdot \dots \cdot K = \log_a M + \log_a N + \dots + \log_a K$$

$$\text{اگر } M = a^x \Rightarrow \log_a M = x \quad ۴$$

$$\text{اگر } N = a^y \Rightarrow \log_a N = y$$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{M}{N} = a^{x-y} \Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = x - y$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (۴)$$

$$\log_a \frac{1}{N} = \log_a 1 - \log_a N, \log_a 1 = 0 \quad ۵$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N \quad (۵)$$

$$\text{اگر } N = a^x \Rightarrow \log_a N = x \text{ و } x \neq 0 \quad ۶$$

فرض می کنیم: $\log_a N^m = kx$ ، می خواهیم k را بیابیم.

بنا به تعریف می نویسیم: $N^m = (a^p)^{kx}$ و $N = a^x$

$$(a^x)^m = (a^p)^{kx} \Rightarrow a^{mx} = a^{kpx} \Rightarrow mx = kpx$$

$$\Rightarrow m = kp \Rightarrow k = \frac{m}{p}$$

$$\Rightarrow \log_a N^m = \frac{m}{p} \log_a N \quad (۶)$$

$$\log_{\sqrt{5}} 125 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_5 5 = 6 \quad \text{مثال:}$$

نتایج فرمول ۶

$$۱) \log_a N^m = m \log_a N$$

$$\Rightarrow \log N > \log a^{-1} \Rightarrow \log N > \log \frac{1}{a} \Rightarrow N > \frac{1}{a}$$

$$(VI) \log_a N < -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < -1, \log a > 0$$

$$\Rightarrow \log N < -\log a$$

$$\Rightarrow \log N < \log a^{-1} \Rightarrow \log N < \log \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < N < \frac{1}{a}$$

حالت دوم: $0 < a < 1$, $\log a < 0$

$$(I)' \log_a N > 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 0, \log a < 0 \Rightarrow \log N < 0$$

$$\Rightarrow 0 < N < 1$$

$$(II)' \log_a N < 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 0, \log a < 0 \Rightarrow \log N > 0$$

$$\Rightarrow N > 1$$

$$(III)' \log_a N > 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 1, \log a < 0 \Rightarrow \log N < \log a$$

$$\Rightarrow 0 < x < a$$

$$(IV)' \log_a N < 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 1, \log a < 0 \Rightarrow \log N > \log a$$

$$\Rightarrow x > a$$

$$(V)' \log_a N > -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > -1, \log a < 0$$

$$\Rightarrow \log N < -\log a = \log \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < N < \frac{1}{a}$$

$$(VI)' \log_a N < -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < -1, \log a < 0$$

$$\Rightarrow \log N > -\log a = \log \frac{1}{a} \Rightarrow N > \frac{1}{a}$$

سوال های چهار گزینه ای

۱. اگر $\log(\log(\log x)) = 0$ ، آن گاه x کدام است؟

۰ (۱) ۱ (۲) ۱۰۰۰ (۳) ۱۰۱۰ (۴)

حل: گزینه ی (۴)

$$\log(\log(\log x)) = 0 \Rightarrow \log(\log x) = 1 \Rightarrow \log x = 10$$

$$\Rightarrow x = 10^{10}$$

۲. حاصل $\log \sqrt{2} - 8 \log \sqrt[16]{2} + \log \sqrt[10]{2}$ کدام است؟

$$\text{اگر} \begin{cases} \log_c x = k \Rightarrow x = c^k \\ \log_b k = p \Rightarrow k = b^p \Rightarrow x = c^k = c^{b^p} = c^{b^{a^m}} \\ \log_a p = m \Rightarrow p = a^m \end{cases}$$

$$m = \log_a p = \log_a (\log_b k) = \log_a (\log_b (\log_c x))$$

$$\Rightarrow \log_a (\log_b (\log_c x)) = m \Rightarrow x = c^{b^{a^m}} \quad (10)$$

مثال: اگر $\log_{\sqrt[4]{7}} (\log_{\sqrt[3]{7}} (\log_{\sqrt[5]{7}} x)) = 4$ ، آن گاه x را

بیابید.

حل:

$$x = \sqrt[4]{7}^{\sqrt[3]{7}^{\sqrt[5]{7}^4}} \Rightarrow x = \sqrt[4]{7}^{\sqrt[3]{7}^7} \Rightarrow x = \sqrt[4]{7}^7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$$

۱۱

$$\log_a N = p \Rightarrow N = a^p \Rightarrow N = (a)^{\log_a N} \quad (11)$$

۱۲. همواره داریم:

$$(x)^{\log_a y} = (y)^{\log_a x} \quad (12)$$

اگر از دو طرف در مبنای a لگاریتم بگیریم، داریم:

$$\log_a y \cdot \log_a x = \log_a x \cdot \log_a y$$

تذکر: در تعریف لگاریتم گفتیم، a عددی حقیقی و مثبت و

$a \neq 1$ است. پس برای a دو حالت وجود دارد: حالت اول $a > 1$

و حالت دوم $0 < a < 1$.

حال چند رابطه را در این دو حالت بررسی می کنیم:

حالت اول: $a > 1$, $\log a > 0$

$$(I) \log_a N > 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 0, \log a > 0$$

$$\Rightarrow \log N > 0 \Rightarrow N > 1$$

$$(II) \log_a N < 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 0, \log a > 0$$

$$\Rightarrow \log N < 0 \Rightarrow 0 < N < 1$$

$$(III) \log_a N > 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 1, \log a > 0$$

$$\Rightarrow \log N > \log a \Rightarrow N > a$$

$$(IV) \log_a N < 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 1, \log a > 0 \Rightarrow \log N < \log a$$

$$\Rightarrow 0 < N < a$$

$$(V) \log_a N > -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > -1, \log a > 0 \Rightarrow \log N > -\log a$$

$$\text{Max}(M) = (\log_5 5)^{-1} = \frac{1}{\log_5 5} = \log_5 6$$

۷. اگر $\log_x a = 4$ و $\log_y a = 2$ و $\log_z a = 3$ ، آن گاه

$\log_{x,y,z} a$ کدام است؟

$$\frac{11}{8} (4) \quad \frac{8}{11} (3) \quad \frac{12}{13} (2) \quad \frac{13}{12} (1)$$

حل: گزینه ی (۲).

$$\log_{x,y,z} a = \frac{1}{\log_a x, y, z} = \frac{1}{\log_a x + \log_a y + \log_a z}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{12}{13}$$

۸. اگر $\frac{n+1}{2} = (4)^{\log_2 9}$ ، آن گاه n کدام است؟

$$8 (4) \quad 7 (3) \quad 6 (2) \quad 5 (1)$$

حل: گزینه ی (۳).

$$\frac{n+1}{2} = 4^{\log_2 9} \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 4^{\log_2 81} \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 81$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2} = 81 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 3^4 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 4 \Rightarrow n = 7$$

۹. اگر $\log_{11} N = a$ ، آن گاه $\log_{\sqrt{N}} 121$ کدام است؟
(کنکور سراسری)

$$\frac{a}{4} (4) \quad \frac{4}{a} (3) \quad \frac{a}{2} (2) \quad 2a (1)$$

حل: گزینه ی (۳).

$$\log_{11} N = a \Rightarrow \log_N 11 = \frac{1}{a}$$

$$\log_{\sqrt{N}} 121 = \log_{\frac{1}{\frac{1}{a}}} 11^2 = \frac{2}{\frac{1}{a}} \log_N 11 = 4 \log_N 11 = 4 \left(\frac{1}{a}\right) = \frac{4}{a}$$

۱۰. جواب معادله ی $\log(\log x) = \log(7 - 2 \log x) - \log 5$ کدام است؟

$$100 (4) \quad 10 (3) \quad 5 (2) \quad 1 (1)$$

حل: گزینه ی (۳).

$$\log(\log x) = \log\left(\frac{7 - 2 \log x}{5}\right)$$

چون تابع $y = \log x$ تابعی یک به یک است، می توان نوشت:

$$\log x = \frac{7 - 2 \log x}{5} \Rightarrow 5 \log x = 7 - 2 \log x$$

$$\Rightarrow 7 \log x = 7 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

$$\frac{9}{8} (4) \quad \frac{9}{2} (3) \quad \frac{9}{4} (2) \quad \frac{3}{2} (1)$$

حل: گزینه ی (۲).

$$= (10)^{8 \log \sqrt[4]{2} - 4 \log \sqrt{2}} = (10)^{\log 9 - \log 4} = (10)^{\log \frac{9}{4}} = \frac{9}{4}$$

۳. اگر $\frac{25}{12} = \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x$ ، آن گاه x کدام است؟

$$2 (4) \quad 4 (3) \quad 4\sqrt{2} (2) \quad 8 (1)$$

حل: گزینه ی (۴).

$$= \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{4}} x + \log_{\frac{1}{8}} x = \frac{25}{12}$$

$$\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x + \frac{1}{4} \log_2 x = \frac{25}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{12} \log_2 x = \frac{25}{12} \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$$

۴. اگر $y \times 5^{\log x} = x^2$ ، مقدار y کدام است؟

$$5^{\log x} (4) \quad 2^{\log x} (3) \quad 10^{\log x} (2) \quad 2 \cdot 10^{\log x} (1)$$

حل: گزینه ی (۱).

$$y = \frac{x^2}{5^{\log x}} = \frac{x^2}{x^{\log 5}} = x^{2 - \log 5} = x^{\log 10 - \log 5}$$

$$\Rightarrow y = x^{\log 20} = 20^{\log x}$$

۵. اگر $(\frac{x}{10})^6 = (x)^{\log x}$ ، آن گاه x کدام است؟

$$10^2 (4) \quad 10^3 (3) \quad 10^2 (2) \quad 1 (1)$$

حل: گزینه ی (۳). از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می گیریم.

$$\log x \cdot \log x = 6 \log \frac{x}{10} \Rightarrow (\log x)^2 = 6(\log x - \log 10)$$

$$(\log x)^2 - 6 \log x + 6 = 0 \Rightarrow (\log x - 2)^2 = 0 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

۶. اگر $M = (\log_5 5)^{\cos \alpha}$ ، آن گاه بیشترین مقدار M کدام است؟

$$\log_5 5 (4) \quad \log \frac{6}{5} (3) \quad +\infty (2) \quad 1 (1)$$

حل: گزینه ی (۳). چون $\log_5 5$ عددی بین صفر و یک است

و این عدد به توان ۱، ۰، ...، -۱، ... برسد، وقتی ماکزیمم است که توانش ۱- باشد.