

لگاریتم

● احمد قندهاری

معادله

I. تعریف لگاریتم:

فرض می کنیم عدد (a) مثبت و مخالف یک باشد. اگر اعدادی مانند (N) و (x) داشته باشیم؛ به طوری که $N = a^x$ ، در این صورت بنا به تعریف، می گوئیم لگاریتم (N) در مبنای (a) مساوی (x) است:

$$N = a^x \Leftrightarrow \log_a N = x$$

عدد (x) را حاصل لگاریتم و عدد (a) را مبنای و عدد (N) را آنتی لگاریتم یا عدد ما به ازاء گویند.

چون a عددی مثبت است و عدد مثبت به هر توان که برسد، مثبت است، پس a^x و در نتیجه N همواره مثبت است. به همین علت است که می گوئیم اعداد منفی و صفر، لگاریتم ندارند.

مثال: از تساوی $\log_{\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} x = x$ مقدار x را بیابید.

حل: بنا به تعریف می توان نوشت:

$$5\sqrt{5} = (\sqrt{5})^x$$

دوطرف برابری را به توان (۴) می رسانیم:

$$5^4 \times 5^2 = 5^x$$

$$5^6 = 5^x \Rightarrow \boxed{x=6}$$

مثال: از تساوی $\log_{a^{\frac{9}{14}}} N = \frac{9}{14}$ مقدار N را بیابید.

حل:

$$N = (a^{\frac{9}{14}})^{\frac{9}{14}} = (a^{1^8 a^3})^{\frac{1}{14}} = (a^{21})^{\frac{1}{14}} = a^{\frac{3}{2}}$$

جان نپر^۱ ریاضیدان اسکاتلندی در سال ۱۶۱۴ میلادی، کتابی به زبان لاتین تحت عنوان «شرح جدول شگفت انگیز لگاریتمها» منتشر کرد که فوق العاده موزد توجه ریاضیدانان قرار گرفت.

جدول این کتاب، بعدها به «جدول لگاریتم» معروف شد. «نپر» برای محاسبات این کتاب حدود بیست سال زحمت کشیده بود. مبنای لگاریتم «نپر» عدد «e» است که مقدار آن از سری

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

(۲/۷۱۸۲) است. به همین علت، لگاریتم ابداعی یا اختراعی «نپر» را لگاریتم «نبری» یا «نپرین» گویند و آن را به صورت $\log_e$ یا Ln نشان می دهند.

یک سال پس از انتشار کتاب «نپر»، یک معلم ریاضی در انگلستان به نام «بریگز»^۲ دست از کار خود کشید و به اسکاتلند نزد «نپر» رفت. ضمن تشویق و قدردانی، از او خواست که جدول لگاریتمی بر مبنای (۱۰) را بنویسد. نپر از این پیشنهاد استقبال کرد، ولی عمرش کفاف نداد که آن را به پایان برساند.

«بریگز» کار نیمه تمام «نپر» را ادامه داد تا در سال ۱۶۲۴ میلادی، جدول لگاریتم دهگانی را به پایان رساند و منتشر کرد. این جدول بعدها به وسیله دیگران تکمیل شد.

بخش اول: تعریف لگاریتم و فرمولهای آن

کلید اعدادی که در این مقاله مطرح می شود اعداد حقیقی است.

نتیجه‌ای از فرمول (۴)

$$\log_a \frac{1}{N} = \log_a 1 - \log_a N \Rightarrow \boxed{\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N} \quad (5)$$

$$N = a^x \Rightarrow \log_a N = x$$

$$x \neq 0 \text{ یا } N \neq 1$$

فرض می‌کنیم $\log_{a^p} N^m = kx$ ، می‌خواهیم k را بیابیم.

$$\log_{a^p} N^m = kx \Rightarrow N^m = (a^p)^{kx} \Rightarrow N^m = a^{pkx}$$

$$\Rightarrow (a^x)^m = a^{pkx} \Rightarrow a^{mx} = a^{pkx}$$

$$\Rightarrow mx = pkx \Rightarrow m = pk \Rightarrow \boxed{k = \frac{m}{p}}$$

$$\Rightarrow \log_{a^p} N^m = kx \Rightarrow \log_{a^p} N^m = \frac{m}{p} x$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_{a^p} N^m = \frac{m}{p} \log_a N} \quad (6)$$

مثال:

$$\log_{128} 64 = \log_{2^7} 2^6 = \frac{6}{7} \log_2 2 = \frac{6}{7}$$

نتایج فرمول (۶)

$$I) \log_a N^m = m \log_a N$$

$$II) \log_{a^p} N = \frac{1}{p} \log_a N$$

$$III) \log_{a^m} N = \log_a N$$

مثال:

$$\log_a N = \log_{a^{\frac{1}{r}}} N^r = \log_{a^{\frac{1}{r}}} N^r = \dots = \log_{\sqrt[r]{a}} \sqrt[r]{N} \\ = \log_{\sqrt[r]{a}} \sqrt[r]{N} = \dots$$

$$IV) \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{N} = \log_{a^{-1}} N^{-1} = \log_a N$$

$$V) \log_{\sqrt[p]{a}} \sqrt[p]{N} = \log_{a^{\frac{1}{p}}} N^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \log_a N$$

$$\text{اگر } \log_b a = x, \log_a b = y$$

$$\text{آن‌گاه: } a = b^x, b = a^y \Rightarrow a = (a^y)^x$$

$$\Rightarrow \boxed{N = a^{\sqrt{a}}}$$

مثال: از تساوی $\log_a (2 + \sqrt{3}) = -1$ ، مقدار a را بیابید.
حل:

$$(2 + \sqrt{3}) = a^{-1} \Rightarrow \frac{1}{a} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2 - \sqrt{3}}$$

II. فرمولهای لگاریتم:

هر عددی که در مبنای لگاریتم قرار می‌گیرد، شرط مثبت و مخالف یک بودن را داراست.

$$1 = a^0 \Rightarrow \boxed{\log_a 1 = 0} \quad (1)$$

$$a = a^1 \Rightarrow \boxed{\log_a a = 1} \quad (2)$$

اگر $M = a^x$ و $N = a^y$ ، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\log_a N = y, \log_a M = x$$

$$M.N = a^x . a^y \Rightarrow MN = a^{x+y}$$

$$\Rightarrow \log_a MN = x + y$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N} \quad (3)$$

تعمیم:

$$\log_a M.N.K... = \log_a M + \log_a N + \log_a K + \dots$$

مثال:

$$\log_7 5 \times 11 \times 17 = \log_7 5 + \log_7 11 + \log_7 17$$

می‌توان نوشت: اگر $M = a^x \Rightarrow \log_a M = x$

اگر $N = a^y \Rightarrow \log_a N = y$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{M}{N} = a^{x-y}$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = x - y$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N} \quad (4)$$

$$\log_7 \frac{625}{11} = \log_7 625 - \log_7 11 \quad \text{مثال:}$$

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b} \quad (۱۱)$$

توجه: اگر مبنا عدد (۱۰) باشد، آن را نمی نویسند.
مثال:

$$\log_1 \dots 1 \dots = \frac{\log 1 \dots \dots}{\log 1 \dots \dots} = \frac{\log 1 \cdot 4}{\log 1 \cdot 3} \\ = \frac{4 \log 1 \cdot 0}{3 \log 1 \cdot 0} = \frac{4}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log_c x = k \Rightarrow x = c^k \\ \log_b k = p \Rightarrow k = b^p \\ \log_a p = m \Rightarrow p = a^m \end{array} \right\} \Rightarrow x = c^k = c^{b^p} = c^{b^{a^m}}$$

$$\Rightarrow \log_a p = \log_a (\log_b k) = \log_a (\log b (\log_c x))$$

$$\text{داشته‌ایم } \log_a p = m$$

$$\Rightarrow \log_a (\log_b (\log_c x)) = m \Rightarrow x = c^{b^{a^m}} \quad (۱۲)$$

$$\log_{\sqrt{r}} (\log_{\sqrt{r}} \log_{\sqrt{r}} x) = 2 \quad \text{مثال:}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[4]{\lambda}^{\sqrt[4]{r}^{\sqrt[4]{r}}} \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

$$\text{اگر } \log_a N = p, \quad p = \log_a N$$

$$\Rightarrow N = a^p \Rightarrow \boxed{N = (a)^{\log_a N}} \quad (۱۳)$$

به طور کلی داریم:

$$\boxed{(x)^{\log_a^y} = (y)^{\log_a^x}} \quad (۱۴)$$

زیرا اگر از طرفین در مبنای a لگاریتم بگیریم، خواهیم داشت:

$$\log_a^y \cdot \log_a^x = \log_a^x \cdot \log_a^y$$

$$(\Delta)^{\log x} = (x)^{\log \Delta} \quad \text{مثال:}$$

$$(10)^{\log x} = x \quad \text{مثال:}$$

فرض می کنیم $a > 1$ ، با توجه به مطالب گفته شده خواهیم

داشت:

$$\text{I) } \log_a^N > 0 \Rightarrow N > a^0 \Rightarrow N > 1$$

$$\text{II) } \log_a^N < 0 \Rightarrow 0 < N < a^0 \Rightarrow 0 < N < 1$$

$$\Rightarrow a = a^{xy}$$

$$\Rightarrow xy = 1 \Rightarrow \boxed{\log_b a \times \log_a b = 1} \quad (۷)$$

نتایج فرمول (۷)

$$\text{I) } \log_b a \times \log_a b = 1 \Rightarrow \boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}} \quad (۸)$$

$$\text{II) } \log_{MN} a = \frac{1}{\log_a MN} = \frac{1}{\log_a M + \log_a N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_{MN} a = \frac{1}{\log_a M + \log_a N}} \quad (۹)$$

مثال: ثابت کنید:

$$\log_{\sqrt{2r}} \sqrt{r} = \frac{1}{3 + \log_r 3}$$

حل:

$$\log_{\sqrt{2r}} \sqrt{r} = \log_{2r} 2 = \frac{1}{\log_r 2r} = \frac{1}{\log_r 2 + \log_r r} \\ = \frac{1}{3 \log_r 2 + \log_r 3} = \frac{1}{3 + \log_r 3}$$

فرض می کنیم:

$$\log_b a = x, \quad \log_c b = y, \quad \log_c a = z$$

$$\Rightarrow a = b^x, \quad b = c^y, \quad a = c^z \quad (۱)$$

$$\begin{cases} a = b^x \\ b = c^y \end{cases} \Rightarrow a = (c^y)^x \Rightarrow a = c^{xy} \quad (۲)$$

با مقایسه روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$c^{xy} = c^z \Rightarrow xy = z$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_b a \times \log_c b = \log_c a} \quad (۱۰)$$

تعمیم:

$$\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \dots \times \log_n k = \log_n a$$

مثال:

$$\log_1 25 \times \log_5 10 = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2$$

نتیجه‌ای از دستور (۱۰):

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a \Rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

اگر به جای c عدد (۱۰) را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x-3) > 0$$

مثال :

بنابه رابطه (I)' داریم :

$$0 < 2x - 3 < 1 \Rightarrow 3 < 2x < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

$$\log_{\frac{1}{6}}(4x-6) < -1$$

مثال :

بنابه رابطه (VI)' داریم :

$$\Rightarrow 4x - 6 > \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$$

$$4x - 6 > 6 \Rightarrow 4x > 12 \Rightarrow x > 3$$

$$\log_{\frac{1}{8}}(2x-8) > -1$$

مثال :

بنابه رابطه (V)' داریم :

$$0 < 2x - 8 < \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} \Rightarrow 0 < 2x - 8 < 8$$

$$8 < 2x < 16 \Rightarrow 4 < x < 8$$

بخش دوم : می دانیم :

$$100 = 10^2 \Rightarrow \log 100 = 2$$

$$1000 = 10^3 \Rightarrow \log 1000 = 3$$

اگر عددی بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ باشد، به طور مسلم لگاریتم آن بین ۲ و ۳ است.

$$\log 200 = 2 / 30103$$

مثلاً :

عدد (۲) «مفسر» و عدد اعشاری ۰/۳۰۱۰۳ را «مانتیس» یا «قسمت اعشاری» گویند که از جدول لگاریتم به دست می آید.

مفسر از لحاظ علامت، مثبت یا منفی است و ممکن است صفر هم باشد؛ ولی مانتیس همواره مثبت است.

اگر مبنای لگاریتم (۱۰) باشد؛ به طوری که قبلاً گفته شد، مبنای را نمی نویسند و این لگاریتم را لگاریتم اعشاری یا لگاریتم «دهگانی» گویند.

در بحث زیر، مبنای لگاریتم ۱۰ و $N > 1$ است.

مفسر :

اگر مفسر مثبت یا صفر باشد، چنانچه یک واحد به آن اضافه

$$\text{III) } \log_a^N > 1 \Rightarrow N > a$$

$$\text{IV) } \log_a^N < 1 \Rightarrow 0 < N < a$$

$$\text{V) } \log_a^N > -1 \Rightarrow N > a^{-1} \Rightarrow N > \frac{1}{a}$$

$$\text{VI) } \log_a^N < -1 \Rightarrow 0 < N < a^{-1} \Rightarrow 0 < N < \frac{1}{a}$$

حال فرض می کنیم $0 < a < 1$ و می دانیم $\log a$ عددی است منفی، در این صورت خواهیم داشت :

$$\text{(I)' } \log_a^N > 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 0 \Rightarrow \log N < 0$$

$$\Rightarrow 0 < N < 1$$

$$\text{(II)' } \log_a^N < 0 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 0 \Rightarrow \log N > 0$$

$$\Rightarrow N > 1$$

$$\text{(III)' } \log_a^N > 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 1 \Rightarrow \log N < \log a$$

$$\Rightarrow 0 < N < a$$

$$\text{(IV)' } \log_a^N < 1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 1 \Rightarrow \log N > \log a$$

$$\Rightarrow N > a$$

$$\text{(V)' } \log_a^N > -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > -1$$

$$\Rightarrow \log N < -\log a \Rightarrow \log N < \log a^{-1}$$

$$\Rightarrow \log N < \log \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < N < \frac{1}{a}$$

$$\text{(VI)' } \log_a^N < -1 \Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < -1$$

$$\Rightarrow \log N > -\log a \Rightarrow \log N > \log a^{-1}$$

$$\Rightarrow \log N > \log \frac{1}{a} \Rightarrow N > \frac{1}{a}$$

مثال : حدود x را بیابید.

$$\log(2x-3) < 0$$

بنابه رابطه (II) داریم :

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

$$\log x + \log y = 2/8512 + 5/9320 = 7/7832$$

۲. تفریق لگاریتمها:

برای تفریق لگاریتمها، مفروق را به کلگاریتم تبدیل می‌کنیم، سپس به جای عمل تفریق، عمل جمع را انجام می‌دهیم.

مثال:

$$\begin{cases} \log x = 7/6392 \\ \log y = 2/1860 \end{cases} \Rightarrow \log x - \log y =$$

$$\log x + \text{co} \log y = 7/6392 + 3/8140 = 6/4532$$

۳. ضرب عدد m در log x

الف: اگر m مثبت باشد، عمل ضرب معمولی انجام می‌گیرد؛ با توجه به این که مانتیس همواره مثبت است.

مثال:

$$\log x = 7/8140 \Rightarrow 5 \log x = ?$$

$$5 \log x = 5(7/8140) = 5(-2+0/8140)$$

$$= -10 + 407 = 6/07$$

ب: اگر عدد m منفی باشد، در این صورت $\text{colog} x$ را در $|m|$ ضرب می‌کنیم.

مثال:

$$\log x = 1/1243 \Rightarrow -5 \log x = ?$$

$$-5 \log x = 5(\text{co} \log x) = 5(7/8757)$$

$$= 5(-2+0/8757) = -10 + 43785 = 6/3785$$

۴. تقسیم log x بر عدد k

الف: اگر k مثبت و مفسر، $\log x$ ، مثبت باشد، در این صورت، با تقسیم معمولی اعشاری، جواب به دست می‌آید.

مثال:

$$\log x = 2/1245 \Rightarrow$$

$$\frac{\log x}{3} = \frac{2/1245}{3} = 0/70816$$

ب: اگر k مثبت و مفسر، $\log x$ ، منفی باشد؛ ولی عدد مفسر به عدد k بخش پذیر باشد باز هم تقسیم به صورت معمولی انجام می‌شود.

کنیم، تعداد ارقام عدد آنتی لگاریتم به دست می‌آید.

اگر مفسر منفی باشد، قدر مطلق آن نشان دهنده تعداد صفرهای سمت چپ عدد است، با احتساب صفر ممیز.

مثال:

$$N \text{ عددیست پنج رقمی } \Rightarrow \log N = 4/251$$

$$\log N = 3/251 \Rightarrow$$

در سمت چپ عدد N با احتساب صفر ممیز سه صفر وجود دارد.

$$\log 0/1 = -1 \quad \text{مثال:}$$

$$\log 0/01 = -2$$

$$\log 0/001 = -3$$

کلگاریتم: لگاریتم $\frac{1}{N}$ را کلگاریتم N گویند، پس

$$-\log N = \text{co} \log N, -\text{co} \log N = \log N$$

طرز تعیین $\text{colog} N$ از روی $\log N$

(۱) را به مفسر $\log N$ اضافه می‌کنیم، پس از جمع جبری، علامت آن را عوض می‌کنیم. در مورد قسمت اعشاری: اولین رقم با معنای سمت راست قسمت اعشاری را از (۱۰) و بقیه را از (۹) کم می‌کنیم.

$$\text{co} \log N = ?, \log N = 7/21450 \quad \text{مثال:}$$

$$\text{co} \log N = 1/7855$$

سؤال: اگر $\text{colog} N$ را داشته باشیم، $\log N$ چگونه به دست می‌آید.

پاسخ: به همان طریقی که از روی $\log N$ ، $\text{colog} N$ را به دست آوردیم:

$$\text{co} \log N = 4/2160 \Rightarrow \log N = 5/784 \quad \text{مثال:}$$

۱. جمع لگاریتمها:

برای جمع چند لگاریتم، مانتیس آنها را باهم جمع می‌کنیم، سپس واحدهای صحیحی که به دست می‌آید، با مفسرها جمع جبری می‌کنیم.

مثال:

$$\log x = 2/8512 \Rightarrow$$

$$\log y = 5/9320$$

ب: اگر مفسرهای هر دو لگاریتم منفی باشد، کلگاریتمهای آنها را در هم ضرب یا تقسیم می‌کنیم.

مثال:

$$\begin{cases} \log x = \bar{6} / 4123 \\ \log y = \bar{4} / 2145 \end{cases} \Rightarrow \log x \cdot \log y \\ = \text{co} \log x \cdot \text{co} \log y = (0 / 5877)(3 / 7855) \\ = 2 / 2247$$

ج: اگر یکی از مفسرها مثبت و دیگری منفی باشد، به جای آن که مفسرش منفی است، کلگاریتم آن را قرار می‌دهیم. سپس از حاصل ضرب یا تقسیم، کلگاریتم می‌گیریم.

مثال:

$$\begin{cases} \log x = 2 / 2145 \\ \log y = \bar{3} / 4122 \end{cases} \Rightarrow \log x \cdot \log y \\ = -(\log x)(\text{co} \log x) = -(2 / 2145)(2 / 5878) \\ = -(5 / 7307) = \bar{6} / 2693$$

$$\log 5 = \log \frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 1 - \log 2$$

$$\Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2 \quad \text{یا} \quad \log 2 = 1 - \log 5$$

مسائل:

مسألة ۱- اگر $x \neq y$ و داشته باشیم $\log_x^y = \log_y^x$ ، ثابت

کنید $xy = 1$

حل:

$$\log_y^x = \log_x^y \Rightarrow \log_y^x = \frac{1}{\log_y^x} \Rightarrow (\log_y^x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \log_y^x = \pm 1 \Rightarrow x = y^{\pm 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y & \text{غ ق ق} \\ x = y^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow \boxed{xy = 1} \end{cases}$$

مسألة ۲- اگر $3 \log x = 2$ ، بین کدام دو عدد صحیح

متوالی است؟

$$3 \log x = 2 \Rightarrow \log x^3 = \log 100$$

مثال:

$$\log x = \bar{6} / 8141 \Rightarrow$$

$$\frac{\log x}{3} = \frac{\bar{6} / 8141}{3} = \bar{2} / 2713$$

ج: اگر k مثبت و مفسر $\log x$ منفی باشد؛ ول عدد مفسر بر k بخش پذیر نباشد، در این صورت، بزرگترین عدد منفی را به مفسر اضافه می‌کنیم تا بر عدد k بخش پذیر شود و در عین حال، همان عدد با علامت مثبت را به مانیتس اضافه می‌کنیم و سپس عمل تقسیم را انجام می‌دهیم:

مثال:

$$\begin{aligned} \log x = \bar{2} / 1225 &\Rightarrow \frac{\log x}{5} = \frac{\bar{2} / 1225}{5} \\ &= \frac{-2 + 0 / 1225}{5} = \frac{-2 - 3 + 3 + 0 / 1225}{5} \\ &= \frac{-5 + 3 / 1225}{5} = \frac{-1 + 0 / 6245}{5} \\ &= \bar{1} / 6245 \end{aligned}$$

د: اگر k منفی باشد، در این صورت، به جای تقسیم $\log x$ بر عدد منفی k ، $\text{co} \log x$ را بر $|k|$ تقسیم می‌کنیم، که در این وضعیت، عملیات به حالتی گفته شده تبدیل می‌شود.

مثال:

$$\begin{aligned} \log x = 2 / 2386 &\Rightarrow \frac{\log x}{-3} = \frac{-\log x}{3} \\ &= \frac{\text{co} \log x}{3} = \frac{\bar{3} / 7614}{3} = \bar{1} / 2538 \end{aligned}$$

۵. ضرب یا تقسیم دو لگاریتم

الف: اگر مفسرهای هر دو لگاریتم مثبت باشد، اعمال ضرب یا تقسیم، همان اعمال ضرب یا تقسیم دو عدد اعشاری در یکدیگر است.

مثال:

$$\begin{cases} \log x = 2 / 2345 \\ \log y = 3 / 0124 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\log x \cdot \log y = 2 / 2345 \times 3 / 0124 = 6 / 7312$$

$$\frac{4}{3} \log_3 2 \times \log_3 2 = \frac{4}{3} (\log_3 2)^2 =$$

$$\frac{4}{3} \left(\frac{2}{3} a\right)^2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{9} a^2 = \frac{16}{27} a^2$$

مسئله ۸- اگر $\log 2 = 0.30103$ ، در سمت چپ عدد

$\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$ چند صفر با احتساب صفر ممیز وجود دارد.

$$\Rightarrow \text{co log } 2 = \bar{7} / 69897$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{10} = (2^{-2})^{10} = 2^{-20}$$

$$\log 2^{-20} = -20 \log 2 = 20(-\log 2)$$

$$= 20(\bar{7} / 69897) = 20(-1 + 0.69897)$$

$$= -20 + 13.9794 = \bar{7} / 9794$$

پس در سمت چپ $(4)^{-10}$ ، با احتساب صفر ممیز، هفت صفر وجود دارد.

مسئله ۹- معادله زیر را حل کنید.

$$25^{\log x} = 5 + 4(x^{\log 5})$$

$$5^{\log x} = 5 + 4(5^{\log x}) \quad 5^{\log x} = y$$

$$y^2 = 5 + 4y \Rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = +5 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

$$5^{\log x} = 5 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

مسئله ۱۰- اگر

$$(3) \frac{1+2+3+\dots+n}{n} = (4)^{\log_2 9}$$

مقدار n را بیابید.

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow (3) \frac{n(n+1)}{2n} = (4)^{\log_2 9} \Rightarrow 3 \frac{n+1}{2} = 81$$

$$\Rightarrow 3 \frac{n+1}{2} = 3^4 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 3^3 \Rightarrow \boxed{n = 7}$$

مسئله ۱۱- اگر $\log 2 = 0.30103$ ، عدد $(625)^{10}$ چند

رقمی است؟

$$\Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow 4 < x < 5$$

مسئله ۳- از رابطه $x \times 5^{\log a} = a$ مقدار x را بیابید.

$$x = \frac{a}{5^{\log a}} = \frac{a}{5^{\log a}} = a^{1-\log 5} = a^{\log 2} \Rightarrow$$

$$x = a^{\log 2}$$

مسئله ۴- مقدار عددی $(2 \log \sqrt[3]{6} - \log 2)^{(10)}$ را حساب کنید.

$$(10)^{(2 \log \sqrt[3]{6} - \log 2)} = (10)^{\log \sqrt[3]{6} - \log \sqrt[3]{2}} =$$

$$(10)^{\log \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}}$$

مسئله ۵- حدود $|x|$ را بیابید. اگر

$$\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) \geq -1$$

$$\log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 4) \geq -1 \Rightarrow 0 < x^2 - 4 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow 0 < x^2 - 4 \leq 5 \Rightarrow 4 < x^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow 2 < |x| \leq 3$$

مسئله ۶- به ازای چه مقادیر a ، معادله:

$$x^2 - 2(1 + \log a)x + 1 - \log^2 a = 0$$

دو ریشه مختلف العلامه دارد؟

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1 - \log^2 a}{1} < 0 \Rightarrow$$

$$1 - \log^2 a < 0 \Rightarrow \log^2 a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log a > 1 \\ \log a < -1 \end{cases} \quad \text{یا}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 10 \\ 0 < a < \frac{1}{10} \end{cases} \quad \text{یا}$$

مسئله ۷- اگر $\log_9 a = a$ ، عبارت

$$\log_{27} 16 \times \log_3 2 = ?$$

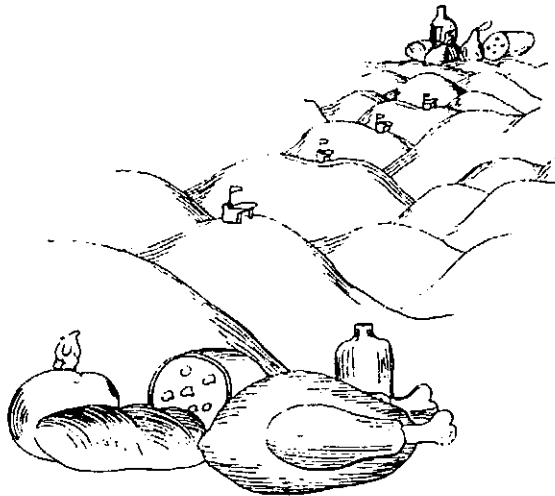
$$\log_9 a = a \Rightarrow \log_{3^2} 2^4 = a \Rightarrow \frac{4}{2} \log_3 2 = a$$

$$\Rightarrow \log_3 2 = \frac{a}{2}$$

$$\log_{27} 16 \times \log_3 2 = \log_{3^3} 2^4 \times \log_3 2 =$$



تفریح اندیشه ۲



مسافری تصمیم می‌گیرد تنها و بدون هیچ کمکی از مسیری بگذرد که هیچ‌گونه مواد غذایی در آن یافت نمی‌شود. در طول این مسیر که ۱۰۰ کیلومتر است فقط پناهگاه‌هایی وجود دارد که به فاصله ۲۰ کیلومتر از هم قرار دارند. او فاصله هر ۲۰ کیلومتر را در یک شبانه‌روز می‌پیماید.

مسافر هر بار آذوقه بیشتر از ۳ روز را نمی‌تواند با خودش ببرد و فقط می‌تواند آذوقه‌ها را در پناهگاه‌ها ذخیره کند.

چند روز لازم است تا مسافر این مسیر لم یزرع را بپیماید؟

• از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکپور

جواب در صفحه ۸۸

$$(۶۲۵)^{۱۰} = (۵^۴)^{۱۰} = ۵^{۴۰} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴۰}$$

$$\log\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴۰} = ۴۰(\log\frac{۱}{۲}) = ۴۰(۱ - \log ۲)$$

$$= ۴۰(۱ + \log ۲) = ۴۰(۱ + \overline{۶۹۸۹۷})$$

$$= ۴۰(۰/۶۹۸۹۷) = ۲۷/۹۵۸۸$$

چون مفسر (۲۷) است، پس عدد $(۶۲۵)^{۱۰}$ عددی است بیست و هشت رقمی.

مسئله ۱۲ - حدود تغییرات x را در تابع:

$$y = \log_a(\log_a(\log_a x))$$

را با شرط $۰ < a < ۱$ بیابید.

$$\log_a(\log_a x) > ۰ \Rightarrow ۰ < \log_a x < ۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_a x < ۱ \Rightarrow x > a \\ \log_a x > ۰ \Rightarrow ۰ < x < ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ < x < a$$

مسئله ۱۳ - معادله $(۲۶)^{\log x} = x + (۲۴)^{\log x}$ را حل کنید.

$$x = ۱ \cdot \log x$$

دوطرف معادله را بر $(۲۶)^{\log x}$ تقسیم می‌کنیم.

$$(۱۰)^{\log x} + (۲۴)^{\log x} = (۲۶)^{\log x}$$

$$\left(\frac{۱۰}{۲۶}\right)^{\log x} + \left(\frac{۲۴}{۲۶}\right)^{\log x} = ۱ \Rightarrow$$

$$\left(\frac{۵}{۱۳}\right)^{\log x} + \left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)^{\log x} = ۱$$

اعداد $\frac{۵}{۱۳}$ و $\frac{۱۲}{۱۳}$ را در نظر می‌گیریم. چون

$$\left(\frac{۵}{۱۳}\right)^۲ + \left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)^۲ = ۱$$

پس $\log x = ۲$ در نتیجه $x = ۱۰۰$

مسئله ۱۴ - بیشترین مقدار $(\log_۳ ۲)^{\sin \alpha}$ چیست؟

$$۰ < \log_۳ ۲ < ۱, -۱ \leq \sin \alpha \leq ۱ \Rightarrow$$

$$\text{Max}(\log_۳ ۲)^{\sin \alpha} = (\log_۳ ۲)^{-۱} = \frac{۱}{\log_۳ ۲} = \log_۲ ۳$$

یادداشتها

۱. Neper یا Napier

۲. Briggs