

لگاریتم

(مورد استفاده دانش آموزان سال دوم، سوم و چهارم دبیرستان)

۱. تعریف لگاریتم:

فرض می کنیم عدد (a) مثبت و مخالف یک باشد. اگر اعدادی مانند (N) و (x) داشته باشیم، به طوری که: $N = a^x$ ، در این صورت بنا به تعریف می گوئیم لگاریتم N در مبنای (a) مساوی (x) است:

$$N = a^x \Leftrightarrow \log_a N = x$$

عدد (x) را لگاریتم و عدد (a) را مبنای عدد (N) و آنتی لگاریتم یا عدد مابزه ازا گویند.

چون a عددی مثبت است و عدد مثبت به هر توان که برسد، مثبت است، پس a^x و در نتیجه N همواره مثبت است. به همین علت است که می گوئیم اعداد منفی و صفر، لگاریتم ندارد.

مثال ۱: از تساوی $\log_5 \sqrt{5} = x$ مقدار x را بیاید.

حل: بنا به تعریف می توان نوشت:

$$\sqrt{5} = (5^x)$$

طرفین تساوی را به توان (۴) می رسانیم

$$5^4 \times 5^2 = 5^x$$

$$5^6 = 5^x \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

مثال ۲: از تساوی $\log N = \frac{9}{14}$ مقدار N را بیاید.

حل:

$$N = (a^{\frac{9}{14}})^{\frac{14}{9}} = (a^{18} a^2)^{\frac{1}{14}} = (a^{20})^{\frac{1}{14}} = a^{\frac{20}{14}}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = a\sqrt{a}}$$

جان نپر^۱ ریاضی دان اسکاتلندی در سال ۱۶۱۴ میلادی کتابی به زبان لاتین تحت عنوان «شرح جدول شگفت انگیز لگاریتمها» منتشر کرد که فوق العاده مورد توجه ریاضی دانان قرار گرفت.

جدول این کتاب بعدها به جدول لگاریتم معروف شد. «نپر» برای محاسبات این کتاب حدود بیست سال زحمت کشیده بود. مبنای لگاریتم «نپر» عدد «e» است که مقدار

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

به دست می آید (مقدار تقریبی این عدد (۲/۷۱۸۲) است). به همین علت لگاریتم ابداعی یا اختراعی «نپر» را لگاریتم «نبری» یا «نپرین» گویند و آن را به صورت log یا Ln نشان می دهند.

یک سال پس از انتشار کتاب «نپر» یک معلم ریاضی در انگلستان به نام «بریگز» دست از کار خود کشید و به اسکاتلند نزد «نپر» رفت، ضمن تشویق و قدردانی، از او خواست که جدول لگاریتمی بر مبنای (۱۰) بنویسد. نپر از این پیشنهاد استقبال کرد ولی عمرش کفاف نداد که آن را به پایان برساند. «بریگز» کار نیمه تمام «نپر» را ادامه داد تا در سال ۱۶۲۴ میلادی جدول لگاریتم دهگانی را به پایان رساند و منتشر کرد. این جدول بعدها به وسیله دیگران تکمیل شد.

بخش اول: تعریف لگاریتم و فرمولهای آن

کلیه اعدادی که در این مقاله مطرح می شود اعداد حقیقی است.

مثال ۳: از تساوی $\log_a(2+\sqrt{3}) = -1$ مقدار a را بیابید.
حل:

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{3}) &= a^{-1} \Rightarrow \frac{1}{a} = 2+\sqrt{3} \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \Rightarrow a \\ &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \boxed{a = 2-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

II. فرمولهای لگاریتم:

هر عددی که در مبنای لگاریتم قرار می گیرد شرط مثبت و مخالف یک بودن را دارا هست.

$$1 = a^0 \Rightarrow \boxed{\log_a 1 = 0} \quad (1)$$

$$a = a^1 \Rightarrow \boxed{\log_a a = 1} \quad (2)$$

اگر $M = a^x$ و $N = a^y$ ، آنگاه خواهیم داشت:

$$\log_a N = y, \log_a M = x$$

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y \Rightarrow MN = a^{x+y}$$

$$\Rightarrow \log_a MN = x + y$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N} \quad (3)$$

تعمیم:

$$\log_a M \cdot N \cdot K \dots = \log_a M + \log_a N + \log_a K + \dots$$

مثال:

$$\log_5 5 \times 11 \times 17 = \log_5 5 + \log_5 11 + \log_5 17$$

$$\text{می توان نوشت } M = a^x \Rightarrow \log_a M = x$$

$$\text{اگر } N = a^y \Rightarrow \log_a N = y$$

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{M}{N} = a^{x-y}$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = x - y$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N} \quad (4)$$

$$\log_7 \frac{625}{11} = \log_7 625 - \log_7 11 \quad \text{مثال:}$$

نتیجه ای از فرمول (5)

$$\log_a \frac{1}{N} = \log_a 1 - \log_a N \Rightarrow \boxed{\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N}$$

$$\text{اگر } N = a^x \Rightarrow \log_a N = x$$

$$x \neq 0 \text{ یا } N \neq 1$$

فرض می کنیم $\log_a N^m = kx$ ، می خواهیم k را بیابیم.

$$\log_a N^m = kx \Rightarrow N^m = (a^x)^{kx} \Rightarrow N^m = a^{pkx}$$

$$\Rightarrow (a^x)^m = a^{pkx} \Rightarrow a^{mx} = a^{pkx}$$

$$\Rightarrow mx = pkx \Rightarrow m = pk \Rightarrow \boxed{k = \frac{m}{p}}$$

$$\Rightarrow \log_a N^m = kx \Rightarrow \log_a N^m = \frac{m}{p}x$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a N^m = \frac{m}{p} \log_a N} \quad (6)$$

حل :

$$\log \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1} = \log_{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} 2} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} 2 \times 3}$$

$$= \frac{1}{3 \log_{\frac{1}{2}} 2} = \frac{1}{3 + \log_{\frac{1}{2}} 3}$$

فرض می کنیم:

$$\log_b a = x, \log_c b = y, \log_c a = z$$

$$\Rightarrow a = b^x, b = c^y, a = c^z \quad (1)$$

$$\begin{cases} a = b^x \\ b = c^y \end{cases} \Rightarrow a = (c^y)^x \Rightarrow a = c^{xy} \quad (2)$$

بمقایسه روابط (1) و (2) خواهیم داشت:

$$c^{xy} = c^z \Rightarrow xy = z$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_b a \times \log_c b = \log_c a} \quad (10)$$

$$\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \dots \times \log_n k = \log_n a \quad \text{تعمیم}$$

مثال :

$$\log_{\frac{1}{5}} 25 \times \log_5 10 = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2$$

نتیجه ای از دستور (10)

$$\log_b a \times \log_c b = \log_c a \Rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

اگر به جای c عدد (10) را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log a}{\log b}} \quad (11)$$

توجه: اگر مبنا عدد (10) باشد آن را نمی نویسند.

مثال :

$$\log_{1000} 10000 = \frac{\log 10000}{\log 1000} = \frac{\log 10^4}{\log 10^3}$$

$$= \frac{4 \log 10}{3 \log 10} = \frac{4}{3}$$

مثال:

$$\log_{\frac{1}{28}} 64 = \log_{\frac{1}{28}} 2^6 = \frac{6}{\log_{\frac{1}{28}} 2} = \frac{6}{\frac{1}{\log_{\frac{1}{28}} 2}} = \frac{6}{\log_{\frac{1}{28}} 2}$$

نتایج فرمول (6)

$$I) \log_a N^m = m \log_a N$$

$$II) \log_{a^p} N = \frac{1}{p} \log_a N$$

$$III) \log_{a^m} N^m = \log_a N$$

مثال :

$$\log_a N = \log_{a^{\frac{1}{2}}} N^{\frac{1}{2}} = \log_{a^{\frac{1}{2}}} N^{\frac{1}{2}} = \dots = \log_{a^{\frac{1}{n}}} \sqrt[n]{N}$$

$$= \log_{a^{\frac{1}{n}}} \sqrt[n]{N} = \dots$$

$$IV) \log_{\frac{1}{a}} N = \log_{a^{-1}} N^{-1} = \log_a N$$

$$V) \log_{\frac{p}{q}} \sqrt[m]{N} = \log_{\frac{p}{q}} N^{\frac{1}{m}} = \frac{p}{m} \log_a N$$

$$\text{اگر } \log_b a = x, \log_a b = y$$

$$\text{بنگاه: } a = b^x, b = a^y \Rightarrow a = (a^y)^x$$

$$\Rightarrow a = a^{xy}$$

$$\Rightarrow xy = 1 \Rightarrow \boxed{\log_b a \times \log_a b = 1} \quad (7)$$

نتایج فرمول (7)

$$I) \log_b a \cdot \log_a b = 1 \Rightarrow \boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}} \quad (8)$$

$$II) \log_{MN} a = \frac{1}{\log_a MN} = \frac{1}{\log_a M + \log_a N}$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_{MN} a = \frac{1}{\log_a M + \log_a N}} \quad (9)$$

مثال : ثابت کنید:

$$\log \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3 + \log_2 3}$$

$$\text{IV) } \log_a^N < 1 \Rightarrow 0 < N < a$$

$$\text{V) } \log_a^N > -1 \Rightarrow N > a^{-1} \Rightarrow N > \frac{1}{a}$$

$$\text{VI) } \log_a^N < -1 \Rightarrow 0 < N < a^{-1} \Rightarrow 0 < N < \frac{1}{a}$$

حال فرض می کنیم $0 < a < 1$ و می دانیم $\log a$ عددی است منفی، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{(I)'} \quad \log_a^N > 0 &\Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 0 \Rightarrow \log N < 0 \\ &\Rightarrow 0 < N < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)'} \quad \log_a^N < 0 &\Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 0 \Rightarrow \log N > 0 \\ &\Rightarrow N > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III)'} \quad \log_a^N > 1 &\Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > 1 \Rightarrow \log N < \log a \\ &\Rightarrow 0 < N < a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(IV)'} \quad \log_a^N < 1 &\Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < 1 \Rightarrow \log N > \log a \\ &\Rightarrow N > a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(V)'} \quad \log_a^N > -1 &\Rightarrow \frac{\log N}{\log a} > -1 \\ &\Rightarrow \log N < -\log a \Rightarrow \log N < \log a^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log N < \log \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < N < \frac{1}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{(VI)'} \quad \log_a^N < -1 &\Rightarrow \frac{\log N}{\log a} < -1 \\ &\Rightarrow \log N > -\log a \Rightarrow \log N > \log a^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log N < \log \frac{1}{a} \Rightarrow N > \frac{1}{a}$$

مثال ۱: حدود x را بیابید. $\log(2x-3) < 0$

بنابراین نتیجه (II) صفحه (۲۹)

$$0 < 2x-3 < 1 \Rightarrow 3 < 2x < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{اگر } \log_c x = k &\Rightarrow x = c^k \\ \text{اگر } \log_b k = p &\Rightarrow k = b^p \\ \text{اگر } \log_a p = m &\Rightarrow p = a^m \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = c^k = c^{b^p} = c^{b^{a^m}}$$

$$\Rightarrow \log_a p = \log_a(\log_b k) = \log_a(\log_b(\log_c x))$$

$$\text{داشتیم } \log_a p = m$$

$$\Rightarrow \boxed{\log_a(\log_b(\log_c x)) = m \Rightarrow x = c^{b^{a^m}}} \quad (12)$$

مثال:

$$\log_{\sqrt[3]{8}}(\log_{\sqrt[3]{4}} \log_{\sqrt[3]{2}} x) = 2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{8}^{\sqrt[3]{4}^{\sqrt[3]{2}^2}} \Rightarrow \boxed{x = 8}$$

$$\text{اگر } \log_a N = p, \quad p = \log_a N$$

$$\Rightarrow N = a^p \Rightarrow \boxed{N = (a)^{\log_a^N}} \quad (13)$$

به طور کلی داریم:

$$\boxed{\log_a^y(x) = (y)^{\log_a^x}} \quad (14)$$

زیرا اگر از طرفین درمبنای a لگاریتم بگیریم خواهیم داشت:

$$\log_a^y \cdot \log_a^x = \log_a^x \cdot \log_a^y$$

$$(\Delta)^{\log x} = (x)^{\log \Delta}$$

مثال:

$$(10)^{\log x} = x$$

مثال:

فرض می کنیم $a > 1$ ، با توجه به مطالب گفته شده خواهیم داشت:

$$\text{I) } \log_a^N > 0 \Rightarrow N > a^0 \Rightarrow N > 1$$

$$\text{II) } \log_a^N < 0 \Rightarrow 0 < N < a^0 \Rightarrow 0 < N < 1$$

$$\text{III) } \log_a^N > 1 \Rightarrow N > a$$

مفسر: اگر مفسر مثبت یا صفر باشد، چنانچه يك واحد به آن اضافه كنيم تعداد ارقام عدد آنتی لگاریتم به دست می آید.
اگر مفسر منفی باشد، قدر مطلق آن نشان دهنده تعداد صفرهای سمت چپ عدد است. با احتساب صفر ممیز.

مثال:

N عددیست پنج رقمی $\Rightarrow \log N = 4/251$ اگر

در سمت چپ عدد N با احتساب صفر ممیز سه صفر وجود دارد $\Rightarrow \log N = 3/251$ اگر

مثال: $\log 0/1 = -1$

$\log 0/01 = -2$

$\log 0/001 = -3$

کلگاریتم: لگاریتم $\frac{1}{N}$ را کلگاریتم N گویند پس

$-\log N = \text{colog } N$, $-\text{colog } N = \log N$

طرز تعیین $\text{colog } N$ از روی $\log N$:

(۱) رابه مفسر $\log N$ اضافه می کنیم پس از جمع جبری علامت آن را عوض می کنیم. در مورد قسمت اعشاری: اولین رقم با معنای سمت راست قسمت اعشاری را از (۱۰) و بقیه را از (۹) کم می کنیم.

مثال: $\log N = 7/21450$, $\text{colog } N = ?$

$\text{colog } N = 1/7855$

سؤال: اگر $\text{colog } N$ را داشته باشیم، $\log N$ چگونه به دست می آید.

پاسخ: به همان طریقی که از روی $\log N$, $\text{colog } N$ را به دست آوردیم:

مثال: $\log N = 5/784$ $\Rightarrow \text{colog } N = 4/2160$

۹. جمع لگاریتمها:

برای جمع چند لگاریتم، ماننيس آنها را با هم جمع

مثال ۲: $\log \frac{1}{4} (2X-3) > 0$

بنا به نتیجه (I) صفحه (۲۹)

$\Rightarrow 0 < 2X-3 < 1 \Rightarrow 3 < 2X < 4$

$\Rightarrow \frac{3}{2} < X < 2$

مثال ۳: $\log \frac{1}{6} (2X-6) < -1$

بنا به نتیجه (VI) صفحه (۲۹)

$\Rightarrow 2X-6 > \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$

$2X-6 > 6 \Rightarrow 2X > 12 \Rightarrow X > 3$

مثال ۴: $\log \frac{1}{8} (2X-8) > -1$

بنا به نتیجه (V) صفحه (۸)

$0 < 2X-8 < \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} \Rightarrow 0 < 2X-8 < 8$

$8 < 2X < 16 \Rightarrow 4 < X < 8$



بخش دوم: می دانیم:

$100 = 10^2 \Rightarrow \log 100 = 2$

$1000 = 10^3 \Rightarrow \log 1000 = 3$

اگر عددی بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ باشد، مسلماً لگاریتم آن بین ۲ و ۳ است.

مثلاً: $\log 200 = 2/30103$

عدد (۲) مفسر و عدد اعشاری ۰/۳۰۱۰۳ را ماننيس یا قسمت اعشاری گویند که از جدول لگاریتم به دست می آید. مفسر از لحاظ علامت مثبت یا منفی است، ممکن است صفر هم باشد ولی ماننيس همواره مثبت است.

اگر مبنای لگاریتم (۱۰) باشد، به طوری که قبلاً گفته شد مبنای آن نمی نویسند و این لگاریتم را لگاریتم اعشاری یا لگاریتم دهگانی گویند. در بحث زیر مبنای لگاریتم ۱۰ و $N > 1$ است.

۴. تقسیم $\log x$ بر عدد k

الف: اگر k مثبت و مفسر، $\log x$ ، مثبت باشد، در این صورت با تقسیم معمولی اعشاری جواب به دست می آید.

مثال:

$$\log x = 2/1245 \Rightarrow \frac{\log x}{3} = \frac{2/1245}{3} = 0/70816$$

ب: اگر k مثبت و مفسر، $\log x$ منفی باشد، ولی عدد مفسر به عدد k بخش پذیر باشد باز هم تقسیم به صورت معمولی انجام می شود.

مثال:

$$\log x = 6/8141 \Rightarrow \frac{\log x}{3} = \frac{6/8141}{3} = 2/2713$$

ج: اگر k مثبت و مفسر $\log x$ منفی باشد ولی عدد مفسر بر k بخش پذیر نباشد در این صورت بزرگترین عدد منفی را به مفسر اضافه می کنیم تا بر عدد k بخش پذیر شود و در عین حال همان عدد با علامت مثبت را به مانتیس اضافه می کنیم، سپس عمل تقسیم را انجام می دهیم:

مثال:

$$\begin{aligned} \log x = 2/1225 &\Rightarrow \frac{\log x}{5} = \frac{2/1225}{5} \\ &= \frac{-2 + 0/1225}{5} = \frac{-2 - 3 + 3 + 0/1225}{5} \\ &= \frac{-5 + 3/1225}{5} = -1 + 0/6245 \\ &= 1/6245 \end{aligned}$$

د: اگر k منفی باشد، در این صورت به جای تقسیم $\log x$ بر عدد منفی k ، $\text{colog } x$ را بر $|k|$ تقسیم می کنیم، که در این وضعیت عملیات به حالت های گفته شده تبدیل می شود.

می کنیم، سپس واحدهای صحیحی که به دست می آید با مفسرها جمع جبری می کنیم.

مثال:

$$\begin{aligned} \log x &= 2/8512 \Rightarrow \log x + \log y = \\ \log y &= 5/9320 \\ 2/8512 + 5/9320 &= 2/7832 \end{aligned}$$

۴. تفریق لگاریتمها:

برای تفریق لگاریتمها، مفرق را به کلنگاریتم تبدیل می کنیم سپس به جای عمل تفریق عمل جمع را انجام می دهیم.

مثال:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log x = 4/6392 \\ \log y = 2/1860 \end{cases} &\Rightarrow \log x - \log y = \\ \log x + \text{colog } y &= 4/6392 + 3/8140 = 6/4532 \end{aligned}$$

۴. ضرب عدد m در $\log x$

الف: اگر m مثبت باشد، عمل ضرب معمولی انجام می گیرد، با توجه به اینکه مانتیس همواره مثبت است.

مثال:

$$\begin{aligned} \log x &= 2/8140 \Rightarrow 5 \log x = ? \\ 5 \log x &= 5(2/8140) = 5(-2 + 0/8140) \\ &= -10 + 4/07 = 6/07 \end{aligned}$$

ب: اگر عدد m منفی باشد، در این صورت $\text{colog } x$ را در $|m|$ ضرب می کنیم.

مثال:

$$\begin{aligned} \log x &= 1/1243 \Rightarrow -5 \log x = ? \\ -5 \log x &= 5(\text{colog } x) = 5(2/8757) \\ &= 5(-2 + 0/8757) = -10 + 4/3785 \\ &= 6/3785 \end{aligned}$$

مثال:

$$\log x = 2/2386 \Rightarrow \frac{\log x}{-3} = \frac{-\log x}{3}$$

$$= \frac{\text{colog } x}{3} = \frac{3/7614}{3} = 1/2538$$

توجه: $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$

$\Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2$ یا $\log 2 = 1 - \log 5$



مسائل

مسئله ۱- اگر $x \neq y$ و داشته باشیم $\log_x^x = \log_y^y$ ، ثابت کنید $xy = 1$.

حل: $\log_y^x = \log_x^y \Rightarrow \log_y^x = \frac{1}{\log_y^x} \Rightarrow (\log_y^x)^2 = 1$

$\Rightarrow \log_y^x = \pm 1 \Rightarrow x = y^{\pm 1} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = y & \text{غ ق ق} \\ x = y^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow \boxed{xy = 1} \end{cases}$

مسئله ۲- اگر $3 \log x = 2$ ، x بین کدام دو عدد صحیح متوالی است؟

$3 \log x = 2 \Rightarrow \log x^3 = \log 100$

$\Rightarrow x^3 = 100 \Rightarrow 4 < x < 5$

مسئله ۳- از رابطه $x \times 5^{\log a} = a$ مقدار x را بیابید.

$x = \frac{a}{5^{\log a}} = \frac{a}{a^{\log 5}} = a^{1-\log 5} = a^{\log 2} \Rightarrow$

$x = a^{\log 2}$

مسئله ۴- مقدار عددی $(10)^{(2 \log \sqrt[4]{6} - \log 2)}$ را حساب کنید.

$(10)^{(2 \log \sqrt[4]{6} - \log 2)} = (10)^{\log \sqrt[4]{6} - \log \sqrt[4]{2}} =$

$(10)^{\log \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{2}}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{2}}$

مسئله ۵- حدود $|x|$ را بیابید. اگر

$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4) \geq -1$

۵. ضرب یا تقسیم دو لگاریتم

الف: اگر مفسرهای هر دو لگاریتم مثبت باشند، اعمال ضرب یا تقسیم، همان اعمال ضرب یا تقسیم دو عدد اعشاری در یکدیگر یا بر یکدیگر است.

مثال:

$\begin{cases} \log x = 2/2345 \\ \log y = 3/0124 \end{cases} \Rightarrow$

$\log x \cdot \log y = 2/2345 \times 3/0124 = 6/7312$

ب: اگر مفسرهای هر دو لگاریتم منفی باشد، کلگاریتمهای آنها را در هم ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال:

$\begin{cases} \log x = 1/4123 \\ \log y = 5/2145 \end{cases} \Rightarrow \log x \times \log y$

$= \text{colog } x \times \text{colog } y = (0/5877)(3/7855)$

$= 2/2247$

ج: اگر یکی از مفسرها مثبت و دیگری منفی باشد، به جای آنکه مفسر منفی است کلگاریتم آن را قرار می دهیم. سپس از حاصل ضرب یا تقسیم، کلگاریتم می گیریم.

مثال:

$\begin{cases} \log x = 2/2145 \\ \log y = 3/4122 \end{cases} \Rightarrow \log x \cdot \log y$

$= -(\log x)(\text{colog } x) = -(2/2145)(2/5878)$

$= -(5/7307) = 6/2693$

$$\log 2^{-20} = -20 \log 2 = 20(-\log 2)$$

$$= 20(\bar{1}/69897) = 20(-1 + 0/69897)$$

$$= -20 + 13/9794 = \bar{7}/9794$$

پس در سمت چپ $(4)^{-10}$ ، با احتساب صفر ممیز هفت صفر وجود دارد.

مسئله ۹ - معادله زیر را حل کنید.

$$25^{\log x} = 5 + 4(x^{\log 5})$$

$$5^{2 \log x} = 5 + 4(5^{\log x}) \quad 5^{\log x} = y \text{ فرض می کنیم}$$

$$y^2 = 5 + 4y \Rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -1 & \text{غ ق ق} \\ y = +5 \end{cases}$$

$$5^{\log x} = 5 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

مسئله ۱۰ - اگر

$$(3)^{\frac{1+2+3+4+\dots+n}{n}} = (4)^{\log_2 9}$$

مقدار n را بیابید.

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow (3)^{\frac{n(n+1)}{2n}} = (4)^{\log_2 9} \Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}} = 81$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{n+1}{2}} = 3^4 \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{n = 7}$$

مسئله ۱۱ - اگر $\log 2 = 0/30103$ ، عدد $(625)^{10}$ چند رقمی است

$$(625)^{10} = (5^4)^{10} = 5^{40} = \left(\frac{10}{2}\right)^{40}$$

$$\log\left(\frac{10}{2}\right)^{40} = 40\left(\log \frac{10}{2}\right) = 40(1 - \log 2)$$

$$= 40(1 + \text{colog } 2) = 40(1 + \bar{1}/69897)$$

$$= 40(0/69897) = 27/9588$$

چون مفسر (۲۷) است پس عدد $(625)^{10}$ عددی است بیست و هشت رقمی.

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 4) \geq -1 \Rightarrow 0 < x^2 - 4 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow 0 < x^2 - 4 \leq 5 \Rightarrow 4 < x^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow 2 < |x| \leq 3$$

مسئله ۶ - بدازاء چه مقادیر a معادله:

$$x^2 - 2(1 + \log a)x + 1 - \log^2 a = 0$$

دو ریشه مختلف العلامه دارد؟

$$\frac{C}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1 - \log^2 a}{1} < 0 \Rightarrow$$

$$1 - \log^2 a < 0 \Rightarrow \log^2 a > 1 \Rightarrow \begin{cases} \log a > 1 \\ \text{یا} \\ \log a < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 10 \\ \text{یا} \\ 0 < a < \frac{1}{10} \end{cases}$$

مسئله ۲ - اگر $\log_a^* a = a$ ، عبارت

$$\log_{27} 16 \times \log_7 2 = ?$$

$$\log_a 8 = a \Rightarrow \log_{2^3} 2^3 = a \Rightarrow \frac{3}{2} \log_2 2 = a$$

$$\Rightarrow \log_2 2 = \frac{2}{3}a$$

$$\log_{27} 16 \times \log_7 2 = \log_{2^3} 2^4 \times \log_{2^3} 2 = \frac{4}{3} \log_2 2$$

$$\times \log_7 2 = \frac{4}{3} (\log_2 2)^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{9} a^2$$

$$= \frac{16}{27} a^2$$

مسئله ۸ - اگر $\log 2 = 0/30103$ ، در سمت چپ عدد $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$

چند صفر با احتساب صفر ممیز وجود دارد.

$$\Rightarrow \text{colog } 2 = \bar{1}/69897$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{10} = (2^{-2})^{10} = 2^{-20}$$

مسأله ۱۳- حدود تغییرات x را در تابع:

$$y = \log_a(\log_a(\log_a x))$$

را با شرط $0 < a < 1$ بیابید.

$$\log_a(\log_a x) > 0 \Rightarrow 0 < \log_a x < 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_a x < 1 \Rightarrow x > a \\ \log_a x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < a$$

مسأله ۱۳- معادله $x + (24)^{\log x} = (26)^{\log x}$ را حل کنید.

$$x = 10^{\log x}$$

طرفین معادله را بر $(26)^{\log x}$ تقسیم می‌کنیم.

$$(10)^{\log x} + (24)^{\log x} = (26)^{\log x}$$

$$\left(\frac{10}{26}\right)^{\log x} + \left(\frac{24}{26}\right)^{\log x} = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log x} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log x} = 1$$

اعداد $\frac{5}{13}$ و $\frac{12}{13}$ را در نظر می‌گیریم. چون

$$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$$

پس $\log x = 2$ در نتیجه $x = 100$

مسأله ۱۴- بیشترین مقدار $(\log_2 2)^{\sin \alpha}$ چیست؟

$$0 < \log_2 2 < 1, -1 \leq \sin \alpha \leq +1 \Rightarrow$$

$$\text{Max}(\log_2 2)^{\sin \alpha} = (\log_2 2)^{-1} = \frac{1}{\log_2 2} = \log_2 2$$

