

قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث و کاربردهای از آن

● دکتر احمد شرف‌الدین

اشاره

در مقاله‌ی حاضر، قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث و کاربردهایی از آن آمده است. اثبات قضیه‌ها از آن نگارنده است و امکان دارد، تازگی داشته باشد. فهرست مطالب را در این جا یاد می‌کنیم:

۱. اثبات‌های تازه برای قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث (نیم‌ساز هر زاویه‌ی مثلث، ضلع روبه‌رو را به نسبت دو ضلع دیگر مثلث بخش می‌کند).

۲. اثبات تازه‌ای برای هم‌رسانی سه نیم‌ساز داخلی مثلث.

۳. قضیه‌ای درباره‌ی دو مثلث که دارای یک زاویه‌ی مساوی و یک زاویه‌ی مکمل‌اند.

۴. تعمیم قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث در چهاروجهی.

۵. محاسبه‌ی طول نیم‌ساز مثلث با به‌کارگیری دستور دکارت

در تقسیم توافقی.

۶. به‌کارگیری قضیه‌ی نیم‌ساز مثلث در اثبات فرمول‌های دکارت و نیوتن در آینه‌های کروی (برگرفته از یک کتاب فیزیک).

۷. کاربرد یک رابطه‌ی توافقی تازه در اثبات قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی.

اثبات مطالب یاد شده در فهرست

۱. قضیه: نیم‌ساز هر زاویه‌ی مثلث، ضلع روبه‌رو را بر نسبت دو ضلع دیگر بخش می‌کند.

برهان نخست. مثلث ABC و نیم‌ساز AD را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم درستی تساوی بعد را ثابت کنیم:

دو مثلث قائم الزاویه ABE و ACF متشابه اند. زیرا زاویه های آن ها مساوی است (توجه می کنیم که خط AD نیم ساز زاویه A است). از تشابه دو مثلث یاد شده، رابطه ی زیر نتیجه می شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$$

دو مثلث DBE و DCF متشابه اند، زیرا دو خط BE و CF موازی اند. پس:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$$

از مقایسه ی دو رابطه ی اخیر نتیجه می شود:

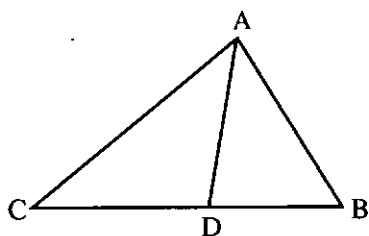
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

برهان سوم: نخست قضیه ی سینوس ها را در مثلث یادآوری می کنیم:

قضیه ی سینوس ها: در مثلث ABC ، رابطه ی زیر برقرار است:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

a, b, c طول های اضلاع روبه روبه زاویه های A, B, C هستند.



با به کارگیری قضیه ی سینوس ها، در مثلث ADB چنین می نویسیم:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ADB)} = \frac{\overline{DB}}{\sin(\angle BAD)}$$

و نیز در مثلث ADC می نویسیم:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)} = \frac{\overline{DC}}{\sin(\angle DAC)}$$

از دو رابطه ی اخیر نتیجه می شود:

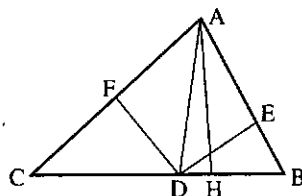
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

(توجه کنیم که چون دو زاویه ی ADB و ADC مکمل اند، سینوس های مساوی دارند.)

تمرین: قضیه ی ۱ را درباره ی نیم ساز خارجی مثلث ثابت کنید.

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

برای اثبات، ارتفاع AH را رسم می کنیم و از نقطه ی D پای نیم ساز، دو عمود DE و DF را به ترتیب بر دو خط AB و AC فرود می آوریم.



مساحت های دو مثلث ADB و ADC را به ترتیب S_1 و S_2 می نامیم. دو رابطه زیر را می نویسیم:

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \overline{DB} \cdot \overline{AH} \\ S_2 = \frac{1}{2} \overline{DC} \cdot \overline{AH} \end{cases}$$

از دو تساوی بالا نتیجه می شود:

$$(a) \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

نیز دو رابطه ی زیر محقق است:

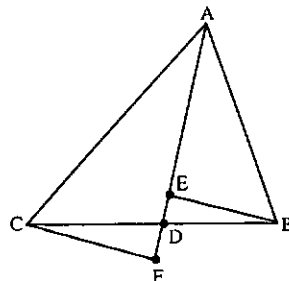
$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{DE} \\ S_2 = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{DF} \end{cases}$$

چون $\overline{DE} = \overline{DF}$ (زیرا نقطه ی D روی نیم ساز زاویه ی A قرار دارد) پس:

$$(b) \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

از دو رابطه ی (a) و (b)، رابطه ی مطلوب به دست می آید:

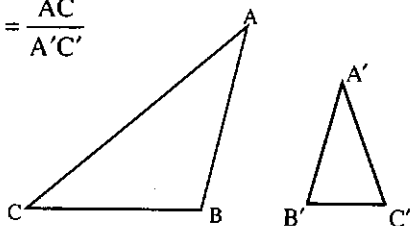
برهان دوم: در مثلث ABC ، از دو رأس B و C ، دو عمود BE و CF را بر نیم ساز AD فرود می آوریم.



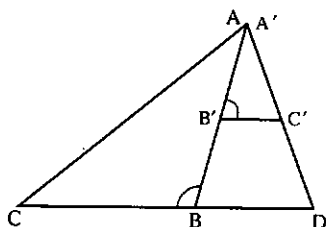
۳. قضیه: اگر در دو مثلث ABC و

$A'B'C'$ ، دو زاویه ی A و A' مساوی و دو زاویه ی B و B' مکمل باشند، آن گاه چنین داریم:

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$



یعنی نسبت اضلاع مقابل به دو زاویه ی مساوی، برابر است با
نسبت اضلاع مقابل به دو زاویه ی مکمل
برهان: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را مانند شکل زیر پهلوی
هم می گذاریم:



نقطه ی برخورد دو خط $A'C'$ و BC را D می نامیم. چون دو
زاویه ی B و B' مکمل اند، پس دو خط $B'C'$ و BD موازی اند.
چون دو زاویه ی A و A' مساوی اند، پس خط AB نیم سازه زاویه ی
CAD در مثلث ACD است. از تشابه دو مثلث $A'BD$ و $A'B'C'$
رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\frac{A'C'}{A'D} = \frac{B'C'}{BD}$$

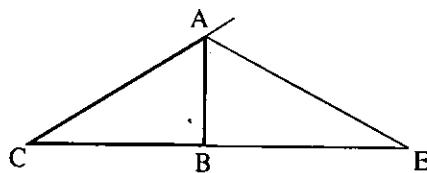
بنابر قضیه ی (۱) درباره ی نیم ساز، می توان چنین نوشت:

$$\frac{A'D}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

از دو رابطه ی اخیر رابطه ی زیر که مطلوب است، حاصل
می شود:

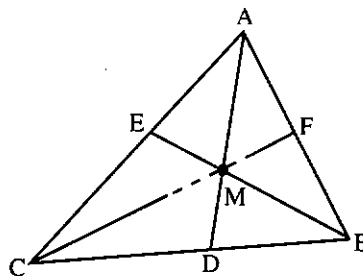
$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

۴. تعمیم قضیه ی نیم ساز مثلث به صورت قضیه ی نیم ساز در
چهاروجهی (طرح نگارنده)
در چهاروجهی SABC، نیم سازه وجهی SABC را SD



$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}$$

۲. قضیه: نیم سازه های داخلی هر مثلث همسراوند.
برهان: در مثلث ABC نیم سازه های داخلی AD، BE و CF را
در نظر می گیریم:



نقطه ی برخورد دو نیم ساز AD و BE را M و نقطه ی برخورد
دو نیم ساز AD و CF را N می نامیم. ثابت می کنیم که دو نقطه ی
M و N برهم منطبق اند و از آن نتیجه می گیریم که سه نیم ساز داخلی
هر مثلث همسراوند.

خط BE نیم سازه زاویه ی B در مثلث ABD است. بنابر قضیه ی
(۱) می توان نوشت:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{MA}{MD}$$

خط CF نیم سازه زاویه ی C از مثلث ACD است. بنابر قضیه ی
(۱) می توان نوشت:

$$\frac{CA}{CD} = \frac{NA}{ND}$$

خط AD نیم سازه زاویه ی A از مثلث ABC است. بنابر قضیه ی
(۱) می توان نوشت:

$$\frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD}$$

از سه رابطه ی اخیر نتیجه می شود:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{NA}{ND}$$

از این رابطه نتیجه می گیریم که نقطه ی M بر نقطه ی N منطبق
است و صحت قضیه ی مورد نظر ثابت می شود.

$$II \begin{cases} V_1 = \frac{1}{3} S_1 \cdot \overline{DH_1} \\ V_2 = \frac{1}{3} S_2 \cdot \overline{DH_2} \\ V_3 = \frac{1}{3} S_3 \cdot \overline{DH_3} \end{cases}$$

از رابطه های I و II، رابطه های زیر نتیجه می شود:

$$III \begin{cases} \frac{S_1}{s_1} = \frac{\overline{DH_1}}{\overline{AH}} \\ \frac{S_2}{s_2} = \frac{\overline{DH_2}}{\overline{AH}} \\ \frac{S_3}{s_3} = \frac{\overline{DH_3}}{\overline{AH}} \end{cases}$$

اما: $\overline{DH_1} = \overline{DH_2} = \overline{DH_3}$ (زیرا خط SD، نیم ساز سه وجهی SABC است و لذا فاصله ی نقطه ی D از سه وجه سه وجهی SABC مساوی است). از تساوی های III نتیجه می شود:

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{S_2}{s_2} = \frac{S_3}{s_3}$$

نقش نیم سازهای مثلث در اثبات قضیه های تقسیم توافقی

در سطرهای آینده از تقسیم توافقی یاد می کنیم. سپس فرمول دکارت و فرمول نیوتن را در تقسیم توافقی می نویسیم. در شماره ی ۵، دستور دکارت را در تقسیم توافقی، برای محاسبه ی طول نیم ساز مثلث به کار می بریم. در شماره ی ۶، قضیه ای از تقسیم توافقی را مطرح و اثبات می کنیم و از این قضیه در شماره ی ۷ بهره می گیریم. در شماره ی ۷، کاربرد دستور دکارت و نیوتن را در آینه های کروی یاد می کنیم (در این شیوه ی اثبات، از قضیه ای مربوط به نیم سازهای داخلی و خارجی مثلث بهره گرفته شده است). مطلب شماره ی ۷ را از کتاب فرانسوی «تصویرها در علم نور» اثر فلوری^۱ و ماتیو^۲ برگرفته ام. در شماره ی ۸، یک دستور تازه در تقسیم توافقی عرضه کرده ام و آن را برای اثبات یکی از قضیه های اساسی هندسه به کار برده ام.

الف) تعریف تقسیم توافقی: بر محور $x'x$ ، دو نقطه ی A و B اختیار می کنیم. دو نقطه ی M و N را روی محور $x'x$ طوری انتخاب می کنیم که تساوی بعد برقرار باشد. در این صورت می گوئیم

می نامیم.

مساحت های سه مثلث SAB،

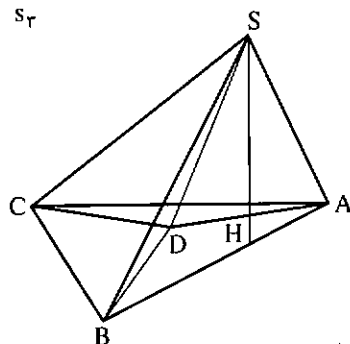
SBC و SCA را به ترتیب S_1 ، S_2 و S_3

می نامیم. مساحت های سه مثلث DAB، DBC، و DCA را به

ترتیب s_1 ، s_2 و s_3 می نامیم. می خواهیم ثابت کنیم تساوی های

زیر برقرار است:

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{S_2}{s_2} = \frac{S_3}{s_3}$$



برهان: قضیه ی نیم ساز مثلث را یادآور می شویم: اگر خط AD

نیم ساز زاویه ی A از مثلث ABC باشد، چنین داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

این تساوی را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DC}$$

تساوی اخیر ما را رهنمون می شود که قضیه ی مذکور در بالا،

یعنی قضیه ی نیم ساز در چهاروجهی را حدس بزنیم. برای اثبات

قضیه، ارتفاع AH و نیم ساز AD را رسم می کنیم (یادآور می شویم

که نیم ساز یک سه وجهی خطی است که فاصله ی هر نقطه از آن، از

سه وجه آن سه وجهی یکسان باشد). حجم های سه چهاروجهی

SDAB، SDCA و SDBC را به ترتیب V_1 ، V_2 و V_3

می نامیم. رابطه های زیر را می نویسیم:

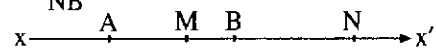
$$I \begin{cases} V_1 = \frac{1}{3} s_1 \cdot \overline{AH} \\ V_2 = \frac{1}{3} s_2 \cdot \overline{AH} \\ V_3 = \frac{1}{3} s_3 \cdot \overline{AH} \end{cases}$$

از نقطه ی D پای نیم ساز AD، عمودهای DH_1 ، DH_2 و

DH_3 را به ترتیب بر سه وجه SAB، SBC، و SCA رسم می کنیم

و می نویسیم:

پاره خط AB به وسیله دو نقطه M و N به توافق تقسیم شده است و نیز می گویند چهار نقطه A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی می دهند.

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$


ب) دستور دکارت و نیوتن در تقسیم توافقی: اگر چهار نقطه A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند، دو رابطه زیر محقق اند:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} \quad \text{دستور دکارت}$$

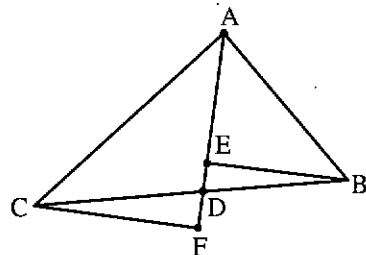
$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{ON} \quad \text{دستور نیوتن}$$

(نقطه O وسط پاره خط AB است)

۵. محاسبه طول نیم ساز مثلث (با به کارگیری دستور دکارت). در مثلث ABC، طول نیم ساز داخلی زاویه A که آن را به AD نشان می دهیم، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{2 \cos \frac{A}{2}}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$$

(محاسبه طول نیم ساز زاویه A بر حسب اندازه زاویه A و طول های دو ضلع دو طرف زاویه A). این فرمول، در کتاب های مثلثات ثابت شده است. در سطرهای زیر، با به کارگیری فرمول دکارت در تقسیم توافقی، درستی فرمول یاد شده در بالا را ثابت می کنیم.



برای اثبات مطلب، دو عمود BE و CF را بر نیم ساز AD وارد می کنیم. ابتدا ثابت می کنیم که چهار نقطه A، D، E و F تشکیل تقسیم توافقی می دهند. از تشابه دو مثلث قائم الزاویه ABE و ACF رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF}$$

از تشابه دو مثلث قائم الزاویه BDE و CDF رابطه ی

ذیل به دست می آید:

$$\frac{BE}{DE} = \frac{CF}{DF}$$

از مقایسه ی دو رابطه ی اخیر، رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AE}{AF}$$

بنابر رابطه ی اخیر، چهار نقطه A، D، E و F تشکیل تقسیم توافقی می دهند. پس رابطه ی زیر محقق است:

$$\frac{2}{AD} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} \quad \text{رابطه ی دکارت}$$

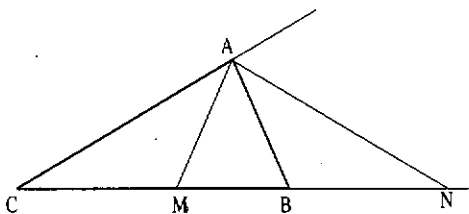
از سوی دیگر چنین داریم:

$$\overline{AE} = \overline{AB} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

$$\overline{AF} = \overline{AC} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

از سه رابطه ی اخیر، رابطه ی مطلوب به دست می آید.

۶. بهره گیری از خاصیت نیم سازهای مثلث در تقسیم توافقی. در مثلث ABC، اگر دو نقطه M و N به ترتیب پاهای نیم سازهای داخلی و خارجی زاویه A باشند، آن گاه چهار نقطه A، B، C، M و N تشکیل تقسیم توافقی می دهند. برهان. چون Am نیم ساز داخلی زاویه A است، پس بنابه قضیه ۱ چنین داریم:



$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$$

چون AN نیم ساز خارجی زاویه A است، پس چنین داریم:

$$\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}$$

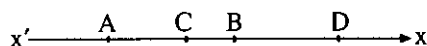
از دو رابطه ی اخیر، رابطه ی زیر نتیجه می شود:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NB}{NC}$$

اگر نقاط A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی دهند، رابطه‌های زیر محقق است:

$$(1) \overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{BD}$$

$$(2) \overline{CD}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{CB} + \overline{DA} \cdot \overline{DB}$$



الف) برهان جبری: بنا به تعریف تقسیم توافقی چنین داریم:

$$(3) \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

بر محور $x'x$ که منطبق بر خط AB است، نقطه‌ی A را مبدأ می‌گیریم (برای آسانی محاسبه). طول‌های نقطه‌های B، C و D را روی این محور، به ترتیب b، c و d می‌نامیم. رابطه‌ی ۳ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{-c}{b-c} = \frac{d}{b-d}$$

و یا:

$$c(d-b) = d(b-c)$$

به دو طرف رابطه‌ی بالا عبارت $-b(d-b)$ را می‌افزاییم. حاصل می‌شود:

$$(c-b)(d-b) = d(b-c) - b(d-b)$$

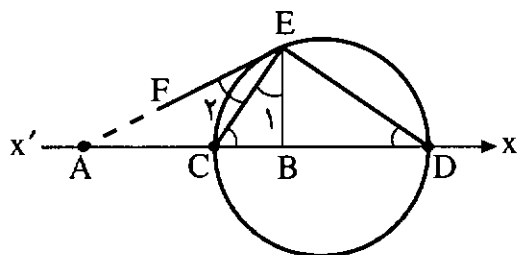
پس از اختصار نتیجه می‌شود:

$$b^2 = cd + (c-b)(d-b)$$

رابطه‌ی ۴، همان رابطه‌ی ۱ است.

با استدلالی مشابه آن‌چه گذشت، می‌توان درستی رابطه‌ی ۲ را ثابت کرد.

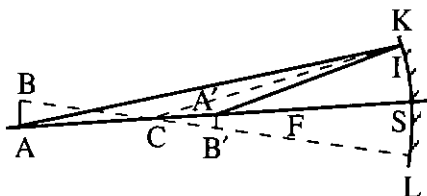
ب) برهان هندسی: روی محور $x'x$ چهار نقطه‌ی A، B، C، D را که تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، در نظر می‌گیریم. برای اثبات رابطه‌ی ۱، دایره‌ای به قطر CD و عمود BE را بر خط CD رسم می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد آن را با دایره، E می‌نامیم.



پس چهار نقطه‌ی N، M، C، B تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

۷. کاربرد قضیه‌ی ۶ در آینه‌های کروی

در آینه‌ی کروی M، مرکز را C، رأس را S و کانون را F می‌نامیم. تصویر شکل AB را به $A'B'$ نموده‌ایم. تصویر شکل AB را به $A'B'$ نموده‌ایم. برای ترسیم تصویر $A'B'$ ، شعاع تابش دل‌خواه AI را رسم می‌کنیم و زاویه‌ی CIA' را برابر زاویه‌ی AIC می‌سازیم. نقطه‌ی A' تصویر نقطه‌ی A به دست می‌آید (زیرا می‌دانیم که شعاع تابش و شعاع بازتاب نسبت به شعاعی از آینه که از نقطه‌ی فرود می‌گذرد، قرینه‌اند).



چون زاویه‌ی دهانه‌ی آینه، یعنی زاویه‌ی گشادگی KCS، کوچک است (مثلاً در حدود $\frac{1}{20}$ رادیان یا سه درجه) پس زاویه‌ی

CIS محسوساً یک زاویه‌ی قائمه است؛ زیرا مثلث CIS متساوی الساقین است و در این مثلث، زاویه رأس کوچک است. پس خط IS محسوساً نیم‌ساز زاویه‌ی خارجی AIA' است.

مختصر آن‌که خط KC نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی مثلث AKA' است و خط KS خیلی به نیم‌ساز خارجی مثلث AKA' نزدیک است. پس چهار نقطه‌ی A، A'، C و S، محسوساً تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند و می‌توانیم دستورهای زیر را به کار ببریم:

$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC} = \frac{1}{SF}$$

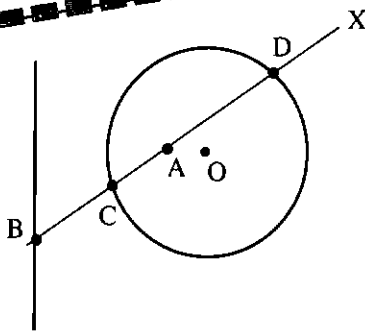
رابطه‌ی دکارت

$$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{SF}^2$$

رابطه‌ی نیوتن

۸. یک رابطه‌ی توافقی تازه

در سطرهای بعد با به کارگیری خواص نیم‌سازهای داخلی و خارجی مثلث، یک رابطه‌ی توافقی تازه ارائه می‌شود کاربردی از آن در اثبات قضیه‌ی اساسی قطب و قطبی یاد می‌شود (این رابطه‌ی توافقی از آن نگارنده است).



از نقطه ی E، مماس EF را بر دایره رسم می کنیم.

این خط مماس بر نقطه ی A می گذرد. (برای اثبات می گوئیم، دو زاویه ی D و E₁ برابرند، زیرا هر دو متمم زاویه ی C هستند و نیز دو زاویه ی E₁ و E₂ برابرند، زیرا اندازه دو زاویه ی D و E₂، هر دو نصف اندازه ی کمان AC هستند. پس خط EC نیم سازه داخلی زاویه ی BEF و خط DE که بر خط EC عمود است، نیم سازه خارجی زاویه ی BEF است. پس بنابر قضیه ی ۶، خط EF بر نقطه ی A می گذرد).

در مثلث قائم الزاویه ی ABE چنین داریم:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{EB}^2$$

از تشابه دو مثلث AED و AEC نتیجه می شود:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$$

در مثلث قائم الزاویه ECD، پاره خط EB ارتفاع است، پس

چنین داریم:

$$\overline{BE}^2 = -\overline{BC} \cdot \overline{BD}$$

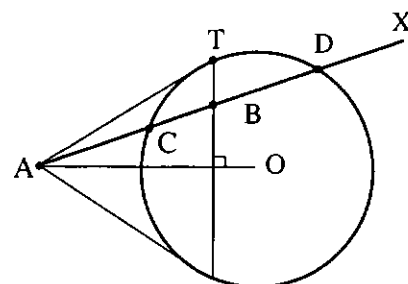
از سه رابطه ی اخیر، رابطه ی ۱ نتیجه می شود.

اثبات رابطه ی ۲، با اثبات پیشین مشابه است.

۹. کاربرد رابطه ی توافقی یاد شده در شماره ی ۸

الف) اثبات تازه ای از قضیه ی اساسی قطب و قطبی.

دایره ی (O, R) و نقطه ی ثابت A در صفحه ی آن را در نظر می گیریم. خط متحرک AX در صفحه ی دایره، دور نقطه ی A می چرخد و دایره را در دو نقطه ی متغیر C و D قطع می کند. مطلوب است مکان هندسی نقطه ی B از خط متحرک AX، به طوری که چهار نقطه ی A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند.



برهان: بنابر رابطه ی توافقی یاد شده در شماره ۸ می نویسیم:

$$(۱) \overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{BD}$$

یکی از قضیه های هندسه می گوئیم، اگر از نقطه ی دل خواه A واقع در صفحه ی دایره (O, R) قاطع دلخواهی رسم کنیم و نقاط تقاطع آن را با دایره، B و C بنامیم، چنین داریم:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AO}^2 - R^2$$

بنابر قضیه ی پیش گفته، دو رابطه ی زیر را می نویسیم:

$$(۲) \begin{cases} \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AO}^2 - R^2 \\ \overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{BO}^2 - R^2 \end{cases}$$

رابطه ی ۱ با رعایت دو رابطه ی ۲ به صورت زیر در می آید:

$$\overline{BA}^2 - \overline{BO}^2 = \overline{AO}^2 - 2R^2 = \text{ثابت}$$

یعنی تفاضل مربع های فاصله های نقطه ی متحرک B از دو نقطه ی ثابت A و O مقداری است ثابت. پس مکان آن نقطه خطی راست عمود بر خط AO.

ب) کاربرد رابطه ی توافقی یاد شده در شماره ی ۸. در شکل آینه ی کروی، چهار نقطه ی A، A'، C و D، محسوساً تقسیم توافقی تشکیل می دهند و بنابر رابطه ی توافقی یاد شده در شماره ی ۸، می توان نوشت:

$$\overline{SC}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SA'} + \overline{CA} \cdot \overline{CA'}$$

و یا:

$$R^2 = f^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SA'} + \overline{CA} \cdot \overline{CA'}$$

در رابطه ی بالا، f فاصله ی کانونی است و SA و SA' فاصله های رأس آینه از شیء و تصویر آن و CA و CA' فاصله های مرکز آینه از شیء و تصویر آنند.

