

# قضیه مقدار میانگین و

## رول قضیه

● میر شهرام صدر



برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی - رشته ریاضی

میشل رول<sup>۱</sup> (۱۷۱۹-۱۶۵۲) ریاضی دان فرانسوی بیشتر ریاضیات را خودآموز فرا گرفته بود. کار او در اصل حسابداری بود، ولی هرگاه وقتی پیدا می کرد روی جبر و معادلات دیوفانتی نیز کار می کرد. ژاک ازانام<sup>۲</sup> (۱۷۱۷-۱۶۴۰) یکی از ریاضی دانان فرانسوی معاصر با رول بود که مسائل مهمی را در زمینه ریاضیات طرح کرده بود. بعد از این که رول راه حل دقیقی را برای یکی از مسائل ریاضیات تفریحی ازانام ارائه کرد، دولت وقت از تحقیقات ریاضی او حمایت کرد و به همین سبب در سال ۱۶۹۰ رول کتاب آموزشی جبر<sup>۳</sup> را انتشار داد. این کتاب شامل مباحث تازه ای درباره ی دستگاه اعداد حقیقی و روش هایی برای یافتن ریشه های معادلات بود. رول سپس در سال ۱۶۹۱ قضیه مشهور خود را منتشر کرد. صورت قضیه او، که به قضیه رول مشهور شده، این است که:

«بین هر دو صفر یک تابع چند جمله ای<sup>۴</sup>، نقطه ای وجود دارد که مشتق تابع در آن نقطه برابر با صفر است.» در این مقاله به بیان این قضیه و کاربردهای آن می پردازیم.

قضیه رول. فرض کنید تابعی مانند  $f$  دارای شرایط زیر باشد:

(۱) روی بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد؛

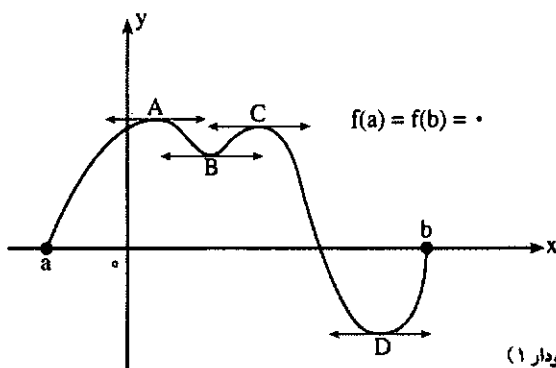
(۲) روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد؛

(۳)  $f(a) = f(b) = 0$ .

در این صورت حداقل یک عدد مانند  $c$  واقع در بازه  $(a, b)$

وجود دارد، به طوری که  $f'(c) = 0$

در نمودار ۱ چهار نقطه در بازه باز  $(a, b)$  وجود دارد که



(نمودار ۱)

حل.  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  و  $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$  بنابراین

$f'(x)$  به ازای همه مقادیر حقیقی  $x$  وجود دارد. پس  $f$  روی

بازه بسته  $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$  پیوسته و بر بازه  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

مشتق پذیر است و داریم:

$$f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{3}{4}$$

در این صورت حداقل یک عدد مانند  $c \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

وجود دارد، به طوری که  $f'(c) = 0$ .

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$$

تذکر. در قضیه رول شرط این که  $f$  در نقاط  $x=a$  و  $x=b$

پیوسته باشد، شرطی اساسی است. در شکل زیر، نمودار

تابعی نشان داده شده است که بر بازه  $[a, b]$  پیوسته است،

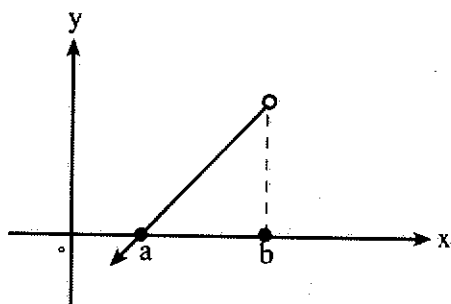
ولی در  $b$  پیوسته نیست و در بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر می باشد.

مقادیر تابع در نقاط انتهایی برابر با صفرند یعنی

$$f(a) = f(b) = 0$$

وجود ندارد که خط مماس بر آن موازی با محور  $x$  ها باشد، یا

مشتق تابع در آن نقطه برابر با صفر باشد.



با استفاده از قضیه رول، یکی از مهم ترین قضیه های بحث کاربرد مشتق، موسوم به قضیه مقدار میانگین یا قانون میانگین را بیان می کنیم.

مشتق در آن نقاط برابر با صفر است.

مثال. درستی قضیه رول را درباره تابع با ضابطه

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \text{ روی فاصله } [1, 2] \text{ بررسی کنید.}$$

حل. تابع چند جمله ای  $f$  روی  $[1, 2]$  پیوسته است،

همچنین روی بازه باز  $(1, 2)$  مشتق پذیر است. و داریم:

$$f(1) = f(2) = 0$$

در نتیجه نقطه ای مانند  $c \in (1, 2)$  وجود دارد، به طوری

که  $f'(c) = 0$ . برای یافتن نقطه  $c$  به صورت زیر عمل می کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{5}}{3} \in (1, 2) \\ x = \frac{2-\sqrt{5}}{3} \notin (1, 2) \end{cases}$$

$$\text{در نتیجه } c = \frac{2+\sqrt{5}}{3}$$

نتیجه قضیه رول. فرض کنید تابعی چون  $f$  دارای شرایط

زیر باشد:

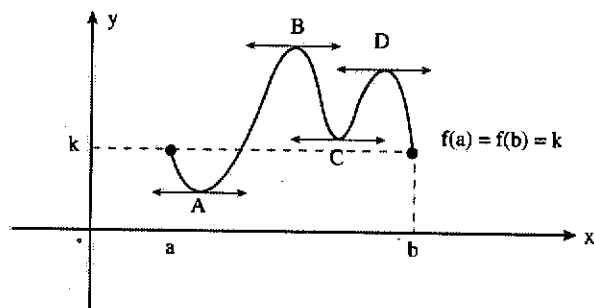
(۱) روی بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد؛

(۲) روی بازه  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد؛

(۳)  $f(a) = f(b) = k$  که در آن  $k$  عددی ثابت است.

در این صورت حداقل یک عدد مانند  $c$  واقع در بازه

$(a, b)$  وجود دارد، به طوری که  $f'(c) = 0$ .



مثال. درستی نتیجه قضیه رول را درباره تابع با ضابطه

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ روی بازه } [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}] \text{ تحقیق کنید.}$$

### قضیه مقدار میانگین

فرض کنید  $f$  تابعی با شرایط زیر باشد:

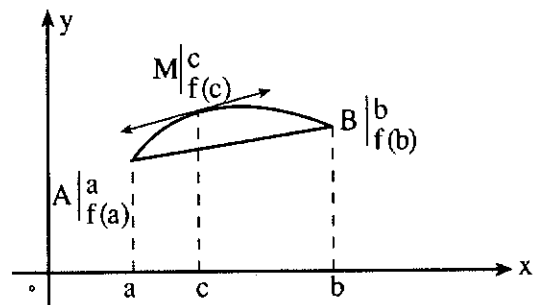
(۱) روی بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد؛

(۲) روی بازه باز  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد.

در این صورت حداقل یک عدد مانند  $c$  در بازه باز  $(a, b)$

وجود دارد. به طوری که:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



به طوری که در شکل بالا ملاحظه می شود، کسر

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ برابر } \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ و مساوی ضریب زاویه وتر } AB$$

است. بنابراین حداقل یک نقطه به طول  $c$  در بازه باز  $(a, b)$  وجود دارد که خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه، موازی وتر  $AB$  است.

مثال. تابع با ضابطه  $f(x) = x^3 + x^2 - x$  را در نظر بگیرید؛ نشان دهید که تابع مفروض روی بازه  $[-2, 1]$  فرض قضیه مقدار میانگین را برآورده می کند. سپس مقادیر مناسبی برای  $c$  بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند.

حل. تابع  $f$  روی بازه  $[-2, 1]$  پیوسته و  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$  بر بازه باز  $(-2, 1)$  موجود است و داریم:

$$a = -2 \Rightarrow f(a) = f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) = -2 \Rightarrow f(a) = -2; A(-2, -2)$$

$$b = 1 \Rightarrow f(b) = f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 1 = 1 \Rightarrow f(b) = 1; B(1, 1)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-2 - 1}{-2 - 1} = 1$$

بنابراین نقطه ای مانند  $c$  واقع در بازه باز  $(-2, 1)$  وجود

دارد، به طوری که  $f'(c) = 1$ :

$$f'(c) = 1 \Rightarrow 3c^2 + 2c - 1 = 1 \Rightarrow 3c^2 + 2c - 2 = 0$$

که از آن نتیجه می شود:

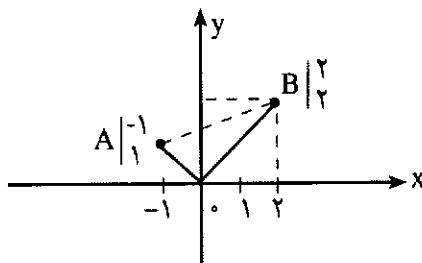
$$c_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \in (-2, 1) \text{ قابل قبول}$$

و

$$c_2 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \in (-2, 1) \text{ قابل قبول}$$

یعنی اگر از نقاطی با طول های  $c_1$  و  $c_2$  واقع بر منحنی، خطی بر آن مماس کنیم، موازی با وتر  $AB$  است.

تذکر. در قضیه مقدار میانگین شرط این که  $f$  بر بازه باز  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد، شرطی اساسی است. برای مثال، تابع با ضابطه  $f(x) = |x|$  در بازه  $[-1, 2]$  پیوسته و در بازه  $(-1, 2)$  به جز در نقطه  $0$  مشتق پذیر است.



شیب وتر  $AB$  را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{2 - 1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

بنابراین شیب وتر  $AB$  برابر  $\frac{1}{3}$  است، اما با توجه به شکل

بالا در هیچ جا مشتق برابر  $\frac{1}{3}$  نیست، زیرا همواره شیب  $OB$  برابر  $1$  و شیب  $OA$  برابر  $-1$  است. در نتیجه اگر شرط مشتق پذیری تابع  $f$  در بازه باز  $(a, b)$  در قضیه مقدار میانگین برقرار نباشد، آن گاه حکم قضیه درست نخواهد بود.

مثال. ثابت کنید روی نمودار هر تابع درجه دوم، وتر

واصل بین نقاط  $x = a$  و  $x = b$  واقع بر منحنی، موازی خط مماس بر منحنی در نقطه میانی  $x = \frac{a+b}{2}$  است.

روی بازه  $(a, b)$  ثابت است (چرا؟). در این صورت به نتیجه مطلوب زیر می‌رسیم:

نتیجه. اگر  $f$  روی بازه  $(a, b)$  مشتق‌پذیر باشد، مشتق  $f$  روی بازه  $(a, b)$  صفر است اگر و فقط اگر  $f$  تابع ثابت باشد.

### مسائل

درستی قضیه رول را درباره توابع با ضابطه‌های زیر روی بازه داده شده تحقیق کنید.

۱)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6; x \in [2, 3]$

۲)  $f(x) = \sin 2x; x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

### حل:

۱. تابع چند جمله‌ای  $f$  روی  $[2, 3]$  پیوسته و همچنین روی بازه باز  $(2, 3)$  مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f(2) = f(3) = 0$$

در نتیجه نقطه‌ای مانند  $c \in (2, 3)$  وجود دارد، به طوری که  $f'(c) = 0$ . برای یافتن  $c$  به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \notin (2, 3) \\ x = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \in (2, 3) \end{cases}$$

در نتیجه  $c = \frac{6 - \sqrt{3}}{3}$ .

۲. تابع با ضابطه  $f(x) = \sin 2x$  روی بازه  $[0, \frac{\pi}{4}]$  پیوسته

و همچنین روی بازه باز  $(0, \frac{\pi}{4})$  مشتق‌پذیر است و داریم:

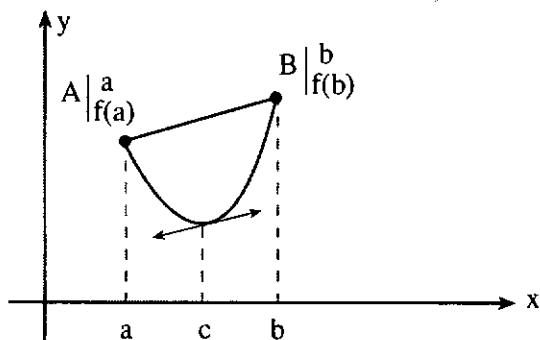
$$f(0) = f(\frac{\pi}{4}) = 0$$

در نتیجه نقطه‌ای مانند  $c \in (0, \frac{\pi}{4})$  وجود دارد به طوری که

$$f'(c) = 0. \text{ برای یافتن } c \text{ به صورت زیر عمل می‌کنیم:}$$

$$f'(x) = 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$



حل. تابع درجه دوم با ضابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(m \neq 0)f(x) = mx^2 + nx + h$$

چون  $f$  در بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته و بر بازه باز  $(a, b)$  مشتق‌پذیر است، بنابراین شرایط قضیه مقدار میانگین را دارد. در نتیجه حداقل نقطه‌ای مانند  $c \in (a, b)$  وجود دارد که شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه موازی با وتر  $AB$  است. اکنون طول  $c$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 2mx + n$$

$$x = a \Rightarrow f(a) = ma^2 + na + h$$

$$x = b \Rightarrow f(b) = mb^2 + nb + h$$

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{mb^2 + nb + h - ma^2 - na - h}{b - a} \\ &= \frac{m(b^2 - a^2) + n(b - a)}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)[m(b + a) + n]}{b - a} = m(b + a) + n \end{aligned}$$

از  $f'(c) = m(b + a) + n$  نتیجه می‌شود:

$$2mc + n = m(b + a) + n \Rightarrow c = \frac{a + b}{2}$$

می‌دانیم اگر  $c$  یک عدد حقیقی باشد، مشتق تابع ثابت با ضابطه  $f(x) = c$ ، برابر صفر است. اکنون به کمک قضیه مقدار میانگین می‌توان ثابت کرد که اگر  $f$  تابعی مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر  $x \in (a, b)$  داشته باشیم  $f'(x) = 0$ ، آنگاه  $f$

تابع هایی با ضابطه های زیر را در نظر بگیرید و نشان دهید که تابع های مفروض روی بازه داده شده، فرض قضیه مقدار میانگین را برآورده می کند، سپس مقادیر مناسبی برای  $c$  بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند.

$$5) f(x) = x^{\frac{1}{2}} - 1; x \in [0, 1]$$

$$6) f(x) = \sin x; x \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

حل:

5. تابع  $f$  روی بازه  $[0, 1]$  پیوسته و بازه  $(0, 1)$  مشتق پذیر

$$a = 0 \Rightarrow f(a) = f(0) = -1; A \Big|_{-1}^0$$

$$b = 1 \Rightarrow f(b) = f(1) = 0; B \Big|_0^1$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - (-1)}{1 - 0} = 1$$

بنابراین نقطه ای مانند  $c \in (0, 1)$  وجود دارد، به طوری که  $f'(c) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; f'(c) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{4} \in (0, 1)$$

6. چون تابع با ضابطه  $f(x) = \sin x$  بر بازه  $[0, \frac{\pi}{4}]$  پیوسته

و بر بازه  $(0, \frac{\pi}{4})$  مشتق پذیر است و داریم:

$$a = 0 \Rightarrow f(a) = f(0) = 0; A(0, 0)$$

$$b = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(b) = f(\frac{\pi}{4}) = 1; B(\frac{\pi}{4}, 1)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{4} - 0} = \frac{4}{\pi}$$

بنابراین نقطه ای مانند  $c \in (0, \frac{\pi}{4})$  وجود دارد، به طوری که  $f'(c) = \frac{4}{\pi}$

$$f'(x) = \cos x; f'(c) = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \cos c = \frac{4}{\pi}$$

$$\Rightarrow c = \arccos \frac{4}{\pi} \in (0, \frac{\pi}{4})$$

در نتیجه:  $c = \frac{\pi}{4} \in (0, \frac{\pi}{4})$

3. فرض کنیم  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ . ثابت کنید معادله  $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$  در بازه  $(0, 1)$  حداقل یک ریشه دارد.

حل. تابع چندجمله ای  $f$  بر بازه  $[0, 1]$  پیوسته و بر بازه باز  $(0, 1)$  مشتق پذیر است و  $f(0) = f(1) = 0$ .

پس بنا بر قضیه رول حداقل یک عدد مانند  $c \in (0, 1)$  وجود دارد که:  $f'(c) = 0$ . در نتیجه داریم:

$$f'(x) = 4x^2 - 6x + 2$$

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 4c^2 - 6c + 2 = 0 \quad (1)$$

با توجه به معادله 1، نتیجه می شود که حداقل یک عدد مانند  $c \in (0, 1)$  وجود دارد که ریشه معادله  $4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$  است.

4. ثابت کنید اگر معادله  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x = 0$  یک ریشه مثبت  $x$  داشته باشد، آنگاه معادله  $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$  کوچک تر از  $x$  دارد.

حل. تابع با ضابطه  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x$  بر بازه  $[0, x_0]$  پیوسته و بر بازه  $(0, x_0)$  مشتق پذیر است و داریم:

$$f(0) = 0; f(x_0) = 0 \text{ (چون } x \text{ ریشه معادله است)}$$

بنابراین داریم:

$$f(0) = f(x_0) = 0$$

پس بنا بر قضیه رول حداقل یک عدد مانند  $c \in (0, x_0)$  وجود دارد، به طوری که  $f'(c) = 0$ . در نتیجه:

$$na_n c^{n-1} + (n-1)a_{n-1} c^{n-2} + \dots + a_1 = 0 \quad (2)$$

با توجه به معادله 2 نتیجه می شود که حداقل یک عدد مثبت مانند  $c \in (0, x_0)$  وجود دارد که ریشه معادله  $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$  است.

### مسائل تکمیلی

درستی قضیه رول را درباره تابع‌ها با ضابطه‌های زیر، روی بازه داده شده تحقیق کنید.

$$1) f(x) = x^2 - 4x + 3; x \in [1, 3]$$

$$2) f(x) = 3 \cos^2 x; x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$$

$$3) f(x) = 4x^2 - 9x; x \in [0, \frac{9}{4}]$$

۴. به کمک قضیه رول ثابت کنید که معادله  $x^3 + 2x + c = 0$ ، که در آن  $c$  یک عدد ثابت دلخواه است، نمی‌تواند بیش از یک ریشه حقیقی داشته باشد.

تابع‌هایی با ضابطه‌های زیر را در نظر بگیرید و نشان دهید تابع‌های مفروض روی بازه‌های داده شده، فرض قضیه مقدار میانگین را برآورده می‌کند، سپس مقادیر مناسبی برای  $c$  بیابید که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند.

$$5) f(x) = x^2 + x^2 - x; x \in [-2, 1]$$

$$6) f(x) = 2 \cos x; x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$$

$$7) f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 5}; x \in [2, 6]$$

برای هریک از تمرین‌های زیر، در بازه داده شده هیچ عددی مانند  $c$  وجود ندارد که در حکم قضیه مقدار میانگین صدق کند. در هر تمرین، تعیین کنید کدام قسمت از فرض قضیه مقدار میانگین برقرار نیست.

$$8) f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}; x \in [1, 6]$$

$$9) f(x) = 3(x-4)^{\frac{1}{2}}; x \in [-4, 5]$$

$$10) f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x < 3 \\ 15-2x & x \geq 3 \end{cases}; x \in [-1, 5]$$

زیرنویس

1. Michel Rolle
2. Jacques ozanam
3. Traité d'algere
4. zeros of a ploynomial function

۷. با استفاده از قضیه مقدار میانگین، نابرابری  $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$  را ثابت کنید.

حل. تابع با ضابطه  $f(x) = \sin x$  را بر بازه  $[a, b]$  در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و بر بازه باز  $(a, b)$  مشتق‌پذیر است و داریم:

$$x = a \Rightarrow f(a) = \sin a; A \left| \begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix} \right.$$

$$x = b \Rightarrow f(b) = \sin b; B \left| \begin{matrix} b \\ f(b) \end{matrix} \right.$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sin b - \sin a}{b - a}$$

بنابراین نقطه‌ای مانند  $c \in (a, b)$  وجود دارد، به طوری که:

$$\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = f'(c)$$

$$f'(x) = \cos x; \frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos c$$

از طرفی چون همواره  $|\cos c| \leq 1$  بنابراین:

$$\left| \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \right| \leq 1$$

در نتیجه داریم:

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$$

۸. فرض کنید تابعی چون  $f$  روی  $[a, b]$  پیوسته باشد و به ازای تمام  $x$ ‌های در  $(a, b)$ ،  $f'(x) = 1$ . ثابت کنید به ازای هر  $x \in [a, b]$ ، داریم:  $f(x) = x - a + f(a)$ .

حل. فرض می‌کنیم  $x \in [a, b]$  ( $a \leq x \leq b$ )، چون تابع  $f$  روی  $[a, b]$  پیوسته است بنابراین بر بازه  $[a, x]$  پیوسته است و چون برای هر  $x \in (a, b)$  داریم  $f'(x) = 1$ ، بنابراین تابع  $f$  بر بازه  $(a, x)$  مشتق‌پذیر است، در نتیجه لااقل یک عدد مانند  $c \in (a, x)$  موجود است، به طوری که:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$$

برای هر  $c \in (a, x)$ ، داریم:  $f'(c) = 1$ ، در نتیجه:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 1 \Rightarrow f(x) = x - a + f(a)$$