

نمایش اعداد صحیح در مبناهای مختلف

مثال ۱. عدد n رقمی

$$A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0$$

مبنای 10 به صورت زیر نمایش داد:

$$A = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10^2a_2 + 10^1a_1 + a_0$$

توجه دارید که خط بالای ارقام یا حروف به معنی این است که حروف زیر خط، هر کدام یک رقم در مبنای مزبورند و اگر مبنای عدد نوشته نشود، آن را 10 در نظر می‌گیرند. هم چنین دقت دارید

که برای نمایش یک عدد n رقمی در مبنایی چون b ، طبق قضیه‌ی قبل، باید اولین عدد از سمت چپ در b^{n-1} ضرب و به ترتیب از توان b یک واحد کم شود.

مثال ۲. عدد $A = (51324)_5$ را در مبنای ۶ باز کنید.

$$A = 5 \times 6^4 + 1 \times 6^3 + 3 \times 6^2 + 2 \times 6^1 + 4$$

توجه داشته باشید که وقتی عددی، مثلاً $A = (312)_5$ که در مبنای ۵ به شکل یک دوتایی و یک بسته‌ی ۵ تایی و سه بسته‌ی ۲۵ تایی دسته‌بندی شده است، در مبنای خودش باز شود و این دسته‌بندی‌های پنج تایی باز و روی هم شمارش شوند، عددی در مبنای 10 به دست می‌آید. یعنی:

«برای این که عددی در مبنای $b > 1$ را به مبنای 10 ببریم، کافی است آن را در مبنای خودش، یعنی b باز کنیم. مجموع اعداد حاصل عددی است در مبنای 10 ».

برای مثال، می‌خواهیم عدد $A = (312)_5$ را به مبنای 10

ببریم:

$$(312)_5 = 3 \times 5^2 + 1 \times 5 + 2 = 75 + 5 + 2 = 82$$

حال این سؤال پیش می‌آید که اگر بخواهیم عدد 82 را با

ما همواره در محاسبات روزمره و علمی و مهندسی، از اعداد در مبنای ده (مبنای اعشاری) استفاده می‌کنیم. مبنای ده نمایشی است برای اعداد صحیح و به خصوص اعداد طبیعی که در آن اعداد را ده تایی دسته‌بندی می‌کند. مثلاً وقتی می‌نویسیم ۱۳۸۸، منظورمان ۸ یکی و ۸ بسته‌ی ده تایی و ۳ بسته‌ی ۱۰۰ تایی (هر بسته‌ی ۱۰۰ تایی، ۱۰ بسته‌ی ده تایی است) و ۱ بسته‌ی هزار تایی که هر هزار تا ۱۰ بسته‌ی ده تایی است.

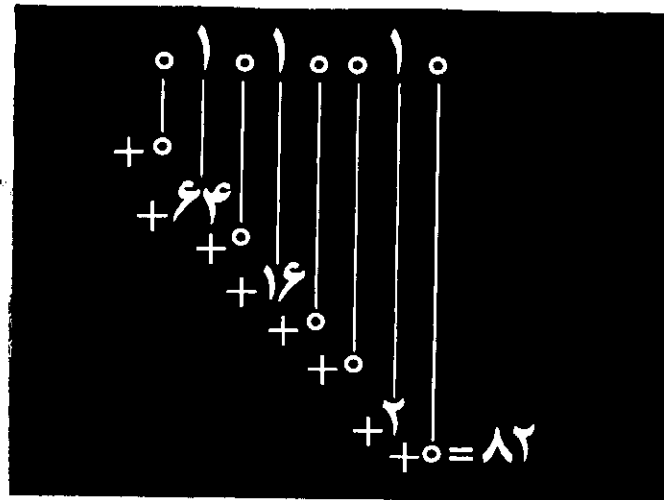
اعداد را می‌توان در مبناهای غیر از 10 نیز نمایش داد. مبناهایی چون ۲ یا ۸ یا ۱۲. مبنای ۲ (مبنای دودویی) در رایانه کاربرد دارد و مبنای ۱۲، مبنای شمارش ایرانیان باستان بوده است و آثار استفاده از آن هنوز هم مشاهده می‌شود (تقسیم نیم روز به ۱۲ ساعت یا سال به ۱۲ ماه و یا استفاده از مقیاس‌های اندازه‌گیری هم چون «دوجین» به معنی ۱۲ تا از این نمونه‌اند).

در این بخش، می‌خواهیم با استفاده از قضیه‌ی تقسیم نشان دهیم، هر عدد طبیعی را می‌توان در مبنای عدد طبیعی $b > 1$ نمایش داد و حتی اعمال جمع و ضرب را در مبناهای غیر از 10 یاد گرفت و انجام داد. ابتدا به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که با استفاده از قضیه‌ی تقسیم نشان می‌دهد، هر عدد طبیعی مانند n را می‌توان در مبنای هر عدد طبیعی مانند $b > 1$ نمایش داد. قضیه: اگر b عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک باشد، هر عدد طبیعی مانند n را می‌توان به شکل منحصر به فردی، به صورت زیر نمایش داد:

$$n = r_k b^k + r_{k-1} b^{k-1} + \dots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0$$

در رابطه‌ی فوق، k عددی صحیح و نامنفی است و برای هر $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ، همواره $0 \leq r_i \leq b-1$ و $r_k \neq 0$. (اثبات این قضیه، براساس استفاده از قضیه‌ی تقسیم، در کتاب درسی آمده است).

برای این که قضیه را بهتر درک کنیم، چند مثال می‌آوریم:



که عبارت $(3 \times 5^2 + 1 \times 5 + 2)$ همان باز شده‌ی عدد $(312)_5$ در مبنای ۵ است.

سؤال دیگر این است که اگر مبنای شمارش بزرگ‌تر از ۱۰ باشد، ارقام چگونه نوشته و خوانده می‌شوند. مثلاً در مبنای ۱۶ عدد ۱۲ یا ۱۳ رقم محسوب می‌شود. بنابراین عدد $(12864113)_{16}$ را می‌توان عددی ۸ رقمی خواند (یک رقم یک رقم) و یا عددی ۵ رقمی. البته عدد ۵ رقمی هم به چند صورت خوانده می‌شود:

$(3-11-4-6-8-12)$ و یا $(13-1-4-6-8-12)$. بنابراین، برای این که این اشکال ایجاد نشود، طبق قرارداد، حرف a را ۱۰، حرف b را ۱۱، حرف c را ۱۲ و ... در نظر می‌گیریم. برای مثال، عدد $(1a2c)_{16}$ به صورت زیر به مبنای ۱۰ برده می‌شود:

$$(1a2c)_{16} = 1 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 2 \times 16 + 12$$

قبل از طرح و حل مسائلی در زمینه‌ی عددنویسی در مبناهای مختلف، می‌خواهیم اعمال جمع و ضرب در مبناهای غیر از ۱۰ را نیز یاد بگیریم. البته برای مثال، اگر بخواهیم دو عدد ۷۸ و ۹۶ را با هم جمع کنیم، ابتدا یکان‌های آن دو را با هم جمع و عدد حاصل یعنی ۱۴ را بر مبنای خودشان یعنی ۱۰ تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را که یک باشد، به مکان بالاتر می‌بریم و باقی‌مانده‌ی تقسیم ۱۴ بر مبنای ۱۰ را نگه می‌داریم. همین عمل را در مکان‌های دیگر تکرار می‌کنیم. $(9+7+1)$ را بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم و باقی‌مانده را که ۷ باشد، نگه می‌داریم و خارج قسمت را به مکان بالاتر می‌فرستیم و ...

استفاده از قضیه‌ی قبل در مبنای ۵ بنویسیم، این عمل چگونه انجام می‌شود؟

واضح است که باید عدد ۸۲ را ۵ تا ۵ تا دسته‌بندی کنیم. برای این منظور، باید با استفاده از قضیه‌ی تقسیم، عدد ۸۲ را با تقسیمات متوالی به دسته‌های ۵ تایی و ۲۵ تایی و ۱۲۵ تایی ... تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r} 82 \div 5 = 16 \text{ remainder } 2 \\ 16 \div 5 = 3 \text{ remainder } 1 \\ 3 \div 5 = 0 \text{ remainder } 3 \end{array}$$

$$82 = (312)_5$$

در واقع، اگر ۸۲ را با استفاده از قضیه‌ی تقسیم که در بالا انجام شد، بازنویسی کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 82 &= 5 \times 16 + 2 = 5 \times (3 \times 5 + 1) + 2 \\ &= 3 \times 5^2 + 1 \times 5 + 2 \end{aligned}$$

در مبنای غیر از ۱۰ نیز
به صورت روبه رو عمل
می کنیم:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 7 \quad 8 \\ + \quad 0 \quad 9 \quad 6 \\ \hline 1 \quad 7 \quad 4 \end{array}$$

یعنی در هر مکان، برای جمع دو رقم، ابتدا آن‌ها را جمع و حاصل جمع را بر مبنای خودشان تقسیم می کنیم. باقی مانده را در همان مکان نگه می داریم و خارج قسمت را به مکان بعدی می بریم و ...

مثلاً می خواهیم دو عدد $(64)_7$ و $(54)_7$ را با هم جمع کنیم. ابتدا رقم اول از راست هریک را با هم جمع $(4+6=10)$ و حاصل را بر ۷ تقسیم می کنیم. $(10=1 \times 7 + 3)$ باقی مانده را نگه می داریم، خارج قسمت یعنی ۱ را به مکان دوم می فرستیم و آن را با مجموع ارقام مکان دوم، جمع می کنیم. حاصل را بر ۷ تقسیم می کنیم و باقی مانده را نگه می داریم و خارج قسمت را به مکان بعدی می بریم.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 6 \quad 6 \\ + \quad 0 \quad 5 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 5 \quad 3 \end{array}_7 \quad \left\{ \begin{array}{l} 6+4=10=1 \times 7 + 3 \\ (6+5)+1=12=1 \times 7 + 5 \\ 0+1=1 \end{array} \right.$$

باقی مانده خارج است

$$\begin{array}{r} 1 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\ + \quad 0 \quad 7 \quad 7 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 5 \quad 6 \quad 3 \end{array}_8 \quad \left\{ \begin{array}{l} 7+4=11=1 \times 8 + 3 \\ (6+7)+1=14=1 \times 8 + 6 \\ (5+7)+1=13=1 \times 8 + 5 \\ 0+1=1 \end{array} \right.$$

برای ضرب دو عدد در مبنای غیر از ۱۰ نیز به همین صورت عمل می کنیم:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 5 \\ \times \quad 1 \quad 2 \\ \hline 10 \quad 20 \quad 50 \\ \hline 53 \quad 10 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \times 6 = 24 = 3 \times 8 + 0 \\ 4 \times 5 + 3 = 23 = 2 \times 8 + 7 \\ 7 \times 6 = 42 = 5 \times 8 + 2 \\ 7 \times 5 + 5 = 40 = 5 \times 8 + 0 \end{array} \right.$$

$7+2=9=1 \times 8 + 1$

نکته ی جالب.....!

به نظر شما آیا در مبنای غیر از ۱۰، ممیز معنی دارد و چگونه باید اعداد دارای ممیز را تعریف کرد؟ بله درست است. ممیز در اعداد با مبنای غیر از ۱۰ معنی دارد و درست مثل تعریف ممیز در مبنای ۱۰ است. برای مثال، به بسط عدد $1388/12$ توجه کنید:

$$1388/12 = 1 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 8 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$$

حال می خواهیم عدد $(4123/123)_6$ را در مبنای خودش بسط دهیم:

$$(4123/123)_6 = 4 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 2 \times 6^1 + 3 \times 6^0 + 1 \times 6^{-1} + 2 \times 6^{-2} + 3 \times 6^{-3}$$

در واقع، در این عدد رقم های ۱ بعد از ممیز، $\frac{1}{6}$ و $\frac{2}{36}$ یعنی $\frac{2}{36}$ و $\frac{3}{216}$ تعریف می شوند.

مسائل حل شده

مسئله ۱. با فرض این که $(ba)_4 + (ab)_5 = 33$ ، عدد $(aba)_6$ را در مبنای ۱۰ به دست آورید.

حل:

$(ab)_5 + (ba)_4 = 33 \Rightarrow 5a + b + 4b + a = 33 \Rightarrow 6a + 5b = 33$
و چون $1 \leq a \leq 3$ و $1 \leq b \leq 3$ (در مبنای ۴ حداکثر رقم به کار رفته ۳ است)، لذا باید $a = b = 3$ باشد. در این صورت داریم:

$$(aba)_6 = (333)_6 = 3 \times 6^2 + 3 \times 6 + 3 = 129$$

مسئله ۲. اگر $(134)_{x+1} = (213)_x$ ، در این صورت $(111)_x$ را بیابید.

حل: ابتدا x را می یابیم (توجه داریم که باید $x \geq 4$ باشد).

$$\begin{aligned} (213)_x &= (134)_{x+1} \Rightarrow 2x^2 + x + 3 = (x+1)^2 + 3x(x+1) + 4 \\ &\Rightarrow 2x^2 + x + 3 = x^2 + 2x + 1 + 3x^2 + 3x + 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \\ &\Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 5 \\ &\Rightarrow (111)_5 = 1 \times 5^2 + 1 \times 5 + 5 = 35 \end{aligned}$$

مسئله ۳. اگر عدد دو رقمی $(ab)_7$ با عدد $(ba)_9$ برابر باشد، این عدد را در مبنای ۱۰ نمایش دهید.

حل: چون $(ab)_7$ ، پس $1 \leq a \leq 6$ و $1 \leq b \leq 6$ و a نمی تواند صفر باشند، به دلیل این که در $(ab)_7$ ، رقم در سمت چپ و در $(ba)_9$ رقم b در سمت چپ قرار گرفته است و صفر سمت چپ خوانده نمی شود).

$$\begin{aligned} (ab)_7 &= (ba)_9 \Rightarrow 7a + b = 9b + a \Rightarrow 6a = 8b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ \text{چون } a &\neq 8 \text{ پس باید قرار دهیم: } \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \text{ که در نتیجه } a = 4 \text{ و } b = 3. \end{aligned}$$

$$(ab)_7 = 4 \times 7 + 3 = 31$$

بنابراین داریم:

$$(ba)_9 = 3 \times 9 + 4 = 31$$

مسئله ۴. مطلوب است:

الف) تعداد اعداد ۴ رقمی در مبنای ۵

ب) بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی در مبنای ۵ (با تکرار ارقام و بدون تکرار ارقام)

ج) کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی در مبنای ۵ (با تکرار ارقام و بدون تکرار ارقام)

حل: در مبنای ۵، می‌توان از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ استفاده کرد که در سمت چپ رقم صفر قرار نمی‌گیرد. پس برای انتخاب رقم در سمت چپ، ۴ انتخاب داریم. و در جایگاه‌های بعدی، هر کدام ۵ (البته اگر تکرار ارقام مجاز باشد).

$$4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

(با تکرار ارقام) $(4444)_5 \rightarrow$ بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی (ب)

(بدون تکرار ارقام) $(4321)_5 \rightarrow$ بزرگ‌ترین عدد ۴ رقمی

(بدون تکرار ارقام) $(1023)_5 \rightarrow$ کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی (ج)

(با تکرار ارقام) $(1000)_5 \rightarrow$ کوچک‌ترین عدد ۴ رقمی

مسئله ۵. اگر نمایش عدد $(145)_x$ در مبنای ۱۰ عدد ۱۰۱ باشد، مقدار x را بیابید.

$$(145)_x = 101 \Rightarrow 1 \times x^2 + 4 \times x + 5 = 101$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 96 = 0 \Rightarrow x = 8$$

مسئله ۶. ثابت کنید اگر عدد $\overline{a5} \times \overline{b5}$ به ۲۵ ختم شود، آن‌گاه $(a+b) = 2k$.

اثبات:

$$\overline{a5} \times \overline{b5} = (10a+5) \times (10b+5) = 100ab + 50(a+b) + 25$$

برای این که عدد فوق به ۲۵ ختم شود، باید $(a+b)$ زوج باشد تا حاصل $100ab + 50(a+b)$ به دو صفر ختم شود.

در قسمت آخر می‌خواهیم عدد A را از مبنای غیر از ۱۰ به مبنای غیر از ۱۰ ببریم. برای این کار، راه معمول این است که ابتدا عدد A را از مبنای مثلاً b به مبنای ۱۰ و سپس عدد حاصل در مبنای ۱۰ را با تقسیمات متوالی به مبنای c ببریم.

مثال: می‌خواهیم عدد $(213)_5$ را در مبنای ۷ نمایش دهیم. به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(213)_5 = 2 \times 5^2 + 1 \times 5 + 3 = 58$$

$$58 \overline{) 7}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 58 \overline{) 7} \\ \underline{56} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{1} \end{array}$$

نکته‌ی جالب:

هرگاه بخواهیم عددی را از مبنای b به مبنای b^k ببریم، در این صورت به ترتیب هر k رقم از راست در مبنای b

یک رقم از راست در مبنای b^k است و برعکس، هر ۱ رقم از سمت راست، در یک عدد در مبنای b^k رقم از سمت راست در همان عدد در مبنای b است.

مثال: عدد $A = (1021121)_3$ مفروض است. این عدد را در مبنای ۹ نمایش دهید. چون $9 = 3^2$ ، پس هر دو رقم در عدد A ، یک رقم این عدد در مبنای ۹ است.

$$(21)_3 = 2 \times 3 + 1 = 7, (11)_3 = 1 \times 3 + 1 = 4, (02)_3 = 2$$

$$(1)_3 = 1 \Rightarrow (1021121)_3 = (1247)_9$$

مثال: عدد $A = (210123)_4$ مفروض است. این عدد را در مبنای ۲ بنویسید.

حل:

روش اول: با توجه به نکته‌ی قبل، هر یک رقم از عدد A ، دو رقم از عدد B (عدد مورد نظر) در مبنای ۲ است. برای به دست آوردن هر دو رقم B ، کافی است یک رقم نظیر در A را به مبنای ۲ ببریم (با تقسیمات متوالی).

$$(3) = (11)_2 \rightarrow 3 \overline{) 2}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{) 2} \\ \underline{3} \\ 1 \end{array}$$

$$2 = (10)_2, 1 = (01)_2, 0 = (00)_2, 1 = (01)_2, 2 = (10)_2$$

$$\Rightarrow A = (210123)_4 = (100100011011)_2 = B$$

روش دوم: عدد A را در مبنای خودش یعنی ۴ بسط می‌دهیم و بر حسب توان‌های ۲ مرتب می‌کنیم و ارقام بزرگ‌تر از ۱ را در مبنای ۲ می‌نویسیم:

$$A = 2 \times 4^5 + 1 \times 4^4 + 0 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 3$$

$$= 2 \times 2^{10} + 1 \times 2^8 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 2 \times 2^2 + 3$$

$$= (1 \times 2 + 0) \times 2^7 + 1 \times 2^8 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + (1 \times 2 + 0) \times 2^1 + (1 \times 2 + 1)$$

$$= 1 \times 2^{11} + 0 \times 2^{10} + 1 \times 2^8 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2 + 1$$

$$= (100100011011)_2 = B$$

مثال: عددی در مبنای ۳ به صورت $A = (211121121)_3$ نوشته شده است. رقم وسط این عدد در مبنای ۲۷ را بیابید.

حل: چون $27 = 3^3$ ، هر سه رقم در این عدد، یک رقم در عدد در مبنای ۲۷ است، اگر سه رقم سه رقم جدا کنیم، سه رقم دوم، رقم وسط آن عدد خواهد بود.

$$\left. \begin{array}{l} \text{رقم وسط} \\ (121)_3 = 1 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 16 \\ (211)_3 = 2 \times 3^2 + 1 \times 3 + 1 = 22 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{رقم راست} \\ \text{رقم چپ} \end{array}$$

$$\Rightarrow A = (22-16-16)_{27}$$