

قضیه‌ی تقسیم

اشاره:

در این قسمت و با بیان خواص رابطه‌ی بخش پذیری (عاد کردن) روی $\mathbb{Z}$ در دو قسمت قبل، به بررسی قضیه‌ی تقسیم و نتایج حاصل از آن می‌پردازیم:

برهان: فرض کنیم

$$a = bq + r$$

صحیح و دل‌خواه a بر عدد

طبیعی b باشد و q خارج

قسمت r و باقی‌مانده. در این

صورت داریم:

$$a = bq + r$$

$$\Rightarrow ka = k(bq) + kr$$

$$\Rightarrow ka = (kb)q + kr$$

واضح است که q خارج قسمت تقسیم ka

بر kb است و kr باقی‌مانده.

$$(0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq kr < kb)$$

تذکره: لم ۱ در حالتی که مقسوم و مقسوم‌علیه بر

k بخش‌پذیر باشند و نیز برای تقسیم آن‌ها بر k ،

برقرار است (به عنوان تمرین ثابت کنید).

لم ۲: اگر در یک تقسیم k برابر مقسوم‌علیه را به مقسوم اضافه

کنیم و مقسوم‌علیه را تغییر ندهیم، در این صورت خارج قسمت

با عدد k جمع می‌شود و باقی‌مانده تغییر نمی‌کند.

برهان: فرض کنیم $a = bq + r$. در این صورت:

$$a = bq + r \Rightarrow a + kb = bq + kb + r$$

$$\Rightarrow (a + kb) = b(\underbrace{q+k}_q) + r$$

قضیه‌ی تقسیم: به ازای هر عدد

صحیح مانند a و هر عدد طبیعی مانند b ، همواره

دو عدد صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت

می‌شوند، به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$.

اثبات قضیه‌ی تقسیم را با روشی بیان می‌کنیم که تا حدی

با روش اثبات در کتاب درسی متفاوت است:

برهان: دنباله‌ی اعداد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$\dots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \dots$$

واضح است که هر عدد صحیح مانند a ، همواره بین دو عضو

متوالی از این دنباله قرار خواهد گرفت! یعنی عددی صحیح مانند

q یافت می‌شود، به قسمی که $qb \leq a < (q+1)b$. با اضافه

کردن $-qb$ به طرفین نابرابری خواهیم داشت: $0 \leq a - qb < b$

که اگر فرض کنیم $r = a - bq$ ، در این صورت داریم:

$$a = bq + r$$

بنابراین قسمت اول قضیه‌ی یعنی وجود q و r در

$\mathbb{Z}$ که در رابطه‌های $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$ صدق کنند، به اثبات

رسید. اثبات یکتایی q و r همان اثبات کتاب درسی است!

توجه: از این به بعد در مسائل، a را مقسوم، b را

مقسوم‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

بیان و اثبات چند قضیه‌ی مقدماتی (لم)

لم ۱: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه را در عددی

ضرب کنیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم در آن عدد ضرب می‌شود و

خارج قسمت تغییر نمی‌کند.

یک مطلب جالب!

در هر تقسیم، تعداد ارقام خارج قسمت برابر است با حداقل تعداد صفرهایی که باید در جلوی مقسوم علیه قرار دهیم تا عدد حاصل از مقسوم بزرگ تر شود.

مثال: در تقسیم ۷۶ بر ۶، خارج قسمت دورقمی است، زیرا اگر حداقل دو صفر جلوی ۶ قرار دهیم، در این صورت حاصل یعنی ۶۰۰ از ۷۶ بزرگ تر می شود. در صورتی که خارج قسمت تقسیم ۷۶ بر ۸، یک رقمی است. زیرا با قرار دادن تنها یک صفر جلوی ۸، عدد حاصل از ۷۶ بزرگ تر می شود.

لم ۴: بزرگ ترین عددی که می توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند (با ثابت ماندن مقسوم علیه) برابر است با $(b-r-1)$.

برهان: اگر به طرفین رابطه ی $a = bq + r$ عدد n را اضافه کنیم، خواهیم داشت $a + n = bq + n + r$. حال اگر $(a + n)$ را مقسوم و b را همان مقسوم علیه و q را خارج قسمت فرض کنیم و $r' = (n + r)$ باقی مانده باشد، باید $b - 1 < n + 1$ یا $n < b - 1$ باشد که حداقل مقدار برای آن $n = b - r - 1$ است.

لم ۵: در تقسیم $a = bq + r$ حداکثر $\left\lfloor \frac{r}{q} \right\rfloor$ واحد می توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند.

برهان: $a = bq + r \Rightarrow a = (b + x)q + r'$
 $\Rightarrow bq + r = (b + x)q + r' \Rightarrow r' = r - xq, r' \geq 0$
 $\Rightarrow r - xq \geq 0 \Rightarrow xq \leq r \Rightarrow x \leq \frac{r}{q} \Rightarrow x_{\max} = \left\lfloor \frac{r}{q} \right\rfloor$

لم ۳: برای به دست آوردن خارج قسمت تقسیم یک عدد بر حاصل ضرب چند عدد، کافی است آن عدد را بر یکی از عامل های ضرب، تقسیم کنیم. خارج قسمت حاصل را هم بر یکی دیگر از عوامل تقسیم کنیم و این عمل را ادامه دهیم تا آخرین عامل ضرب که آخرین خارج قسمت همان خارج قسمت مطلوب است.

فرض کنیم می خواهیم خارج قسمت ۴۵۰ را بر $7 \times 3 \times 5$ بیابیم.

$$450 = 5 \times 90, 90 = 3 \times 30, 30 = 7 \times 4 + 2 \Rightarrow q = 4$$

$$450 = (7 \times 3 \times 5) \times 4 + 30 \Rightarrow q' = 4$$

(مشاهده می کنید که $q = q' = 4$)

برهان: لم ۳ را در حالت تقسیم عدد a بر bc بررسی می کنیم. برای حالتی که a بر حاصل ضرب n عدد تقسیم شود نیز به طریق مشابه می توان عمل کرد:

$$(1) a = bq + r, 0 \leq r < b$$

$$(2) q = cq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < c$$

می کنیم

اگر q را از رابطه ی ۲ در رابطه ی ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$a = b(cq_1 + r_1) + r \Rightarrow a = bcq_1 + (br_1 + r)$$

حال کافی است ثابت کنیم: $br_1 + r_1 < bc$. در این صورت

حکم به دست می آید و q_1 یعنی آخرین خارج قسمت، همان خارج قسمت مطلوب است.

$$r < b \Rightarrow r \leq b - 1$$

$$r_1 < c \Rightarrow r_1 \leq c - 1 \Rightarrow br_1 \leq bc - b$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین نامساوی}} r + br_1 \leq (b - 1) + (bc - b) \Rightarrow br_1 + r \leq bc - 1$$

$$\Rightarrow br_1 + r < bc$$

مسئله ی ۱: در یک تقسیم، اگر ۴۱ واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم علیه را تغییر ندهیم، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه و از باقی مانده ۴ واحد کم می شود. مقسوم علیه را بیابید.

حل: فرض $a = bq + r$

$$a + 41 = b(q + 5) + r - 4 \Rightarrow a + 41 = bq + r + 5b - 4 \Rightarrow 5b = 45 \Rightarrow b = 9$$

مسائل حل شده



حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} a = 25q_1 + 19 \\ b = 25q_2 + 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3 \times 25q_1 + 57 \\ 5b = 5 \times 25q_2 + 85 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a - 5b = 25(3q_1 - 5q_2) + 57 - 85 = 25q - 28$$

$q \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow (3a - 5b) = 25q - 28 = 25q - 50 + 22 = 25(q - 2) + 22$$

$$\Rightarrow (3a - 5b) = 25q' + 22 \Rightarrow \text{باقیمانده} = r = 22$$

(توجه دارید که باقی مانده ی هر تقسیمی، همواره عددی نامنفی است.)

مسئله ی ۶: اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم علیه هر دو بر عدد صحیح k بخش پذیر باشند، ثابت کنید همواره باقی مانده ی تقسیم نیز بر k بخش پذیر خواهد بود.

حل: روش اول:

$$a = bq + r, \quad k|a, \quad k|b \Rightarrow a = kq_1, \quad b = kq_2$$

$$\Rightarrow kq_1 = (kq_2)q + r \Rightarrow r = k(\underbrace{q_1 - q_2q}_{q'}) \Rightarrow k|r$$

روش دوم:

$$\left. \begin{matrix} k|a \\ k|b \end{matrix} \right\} \Rightarrow k|a - bq \Rightarrow a|r$$

مسئله ی ۷: باقی مانده های تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۶ هستند، باقی مانده ی تقسیم a بر ۵۶ را بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a = 7q_1 + 5 \\ b = 8q_2 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a = 56q_1 + 40 \\ 7b = 56q_2 + 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (8a - 7b) = 56(\underbrace{q_1 - q_2}_{q \in \mathbb{Z}}) + (40 - 42)$$

$$\Rightarrow a = 56q - 2 \Rightarrow r = 54$$

(برای یافتن $r = 54$ مانند مسئله ی ۵ عمل کنید.)

مسئله ی ۸: باقی مانده های تقسیم عدد a بر دو عدد ۵ و ۷، به ترتیب ۳ و ۵ هستند، باقی مانده ی تقسیم a را بر ۳۵ بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a = 5q_1 + 3 \\ 14q = 7q_2 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14a = 14 \times 5q_1 + 42 \\ 15a = 15 \times 7q_2 + 75 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (15a - 14a) = 25(3q_2 - 2q_1) + 33 \Rightarrow r = 33$$

(توجه دارید که برای ضرب در هر تساوی اعدادی متوالی لازم داریم که یکی عامل ۷ و دیگری عامل ۵ داشته باشد که ۱۴ و ۱۵ واجد این شرایط هستند.)

مسئله ی ۹: باقی مانده ی تقسیم عدد طبیعی a بر ۲۹ برابر ۱۲

مسئله ی ۲: چه تعداد عدد طبیعی مانند a یافت می شود که باقی مانده ی تقسیم آن بر ۱۹۸، از سه برابر مربع خارج قسمت ۴ واحد کمتر باشد (بزرگ ترین آن ها کدام است)؟

حل: طبق قضیه ی تقسیم، اگر q را خارج قسمت و r را

باقی مانده فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$a = 198q + r, \quad r < 198, \quad r = 3q^2 - 4$$

$$\Rightarrow 3q^2 - 4 < 198 \Rightarrow 3q^2 < 202 \Rightarrow q^2 < \frac{202}{3}$$

$$\Rightarrow q^2 \leq \left\lfloor \frac{202}{3} \right\rfloor = 67 \Rightarrow q \leq \left\lfloor \sqrt{67} \right\rfloor \Rightarrow q \leq 8$$

$$\text{اگر } \begin{cases} q=0 \Rightarrow r=-4 \\ q=1 \Rightarrow r=-1 \end{cases} \Rightarrow q \neq 0, 1, \quad 2 \leq q \leq 8$$

بنابراین برای q ، هفت مقدار وجود دارد که به ازای $q = 8$ بزرگ ترین مقدار برای a به دست می آید.

$$q = 8 \Rightarrow r = 3 \times 8^2 - 4 = 188, \quad a = 198 \times 8 + 188 = 1772$$

مسئله ی ۳: در یک تقسیم، مقسوم علیه ۸ و باقی مانده ۵ است. اگر ۳۲ واحد به مقسوم اضافه کنیم و مقسوم علیه را تغییر ندهیم، خارج قسمت چه تغییری می کند و باقی مانده چه عددی است؟

حل: طبق لم ۲، چون چهار برابر مقسوم علیه با مقسوم جمع شده است، خارج قسمت با عدد ۴ جمع می شود و خارج قسمت جدید به دست می آید. باقی مانده تغییر نمی کند و همان عدد ۵ است.

مسئله ی ۴: در یک تقسیم، مقسوم ۱۲ برابر باقی مانده است و باقی مانده ۲ واحد از حداکثر مقدار خود کمتر است. اجزای این تقسیم را به دست آورید.

حل: طبق فرض مسئله، اگر $a = bq + r$ ، در این صورت

$$r = b - 1 - 2 \quad \text{و} \quad a = 12r$$

$$a = bq + r \Rightarrow 12r = bq + r \Rightarrow 12(b - 3) = bq + b - 3$$

$$\Rightarrow 12b - 36 = bq + b - 3 \Rightarrow 11b - bq = 33$$

$$\Rightarrow b(11 - q) = 3 \times 11 \Rightarrow \begin{cases} b = 11 \Rightarrow r = b - 3 = 11 - 3 = 8 \\ 11 - q = 3 \Rightarrow q = 8 \end{cases}$$

$$a = 12r \Rightarrow a = 12 \times 8 = 96$$

(توجه دارید که اگر $11 - q = 11$ ، در این صورت $q = 0$ که نتیجه می دهد $a = 0$. در این صورت عددی طبیعی به دست نمی آید.)

مسئله ی ۵: اگر باقی مانده های تقسیم a و b بر ۲۵ به ترتیب ۱۹ و ۱۷ باشند، باقی مانده ی تقسیم $(3a - 5b)$ را بر ۲۵ بیابید.



و $17|a+21$ است. در این صورت کمترین مقدار را برای a بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = 29q + 12 \\ a + 17 = 21q' \end{cases} &\Rightarrow 29q + 12 = 21q' - 17 \\ &\Rightarrow 21q' = 29q + 12 + 17 = 29q + 29 = 29(q+1) \\ &\Rightarrow 21q' = 29q_1 \Rightarrow \frac{21}{29} = \frac{q_1}{q'} \Rightarrow q_1 = 21, q' = 29 \end{aligned}$$

از طرف دیگر:

$$a + 17 = 21q' \Rightarrow a = 21q' - 17 = 21 \times 29 - 17 = 592$$

مسئله ۱۰: اگر a عددی صحیح و فرد باشد، به طوری که باقی مانده ی تقسیم آن بر ۲۵، عدد ۱۷ باشد، باقی مانده ی تقسیم عدد $\frac{a+3}{2}$ را بیابید.

حل: طبق فرض داریم: $a = 25q + 17$. و چون a فرد است. پس باید q عددی زوج باشد (چرا؟) بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} q = 2k \Rightarrow a = 25 \times 2k + 17 \Rightarrow a + 3 &= 25 \times 2k + 17 + 3 \\ &\Rightarrow \frac{a+3}{2} = 25k + \frac{20}{2} \Rightarrow \frac{a+3}{2} = 25k + 10 \Rightarrow r = 10 \end{aligned}$$

مسئله ۱۱: در یک تقسیم، مقسوم 525 و باقی مانده 25 است. اگر مقسوم علیه، مجذور دو برابر خارج قسمت باشد، خارج قسمت را بیابید.

حل: طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} 525 &= bq + 25, \quad b = (2q)^2 = 4q^2 \\ \Rightarrow 525 &= 4q^2 \times q + 25 \Rightarrow 4q^3 = 500 \Rightarrow q^3 = 125 \Rightarrow q = 5 \end{aligned}$$

مسئله ۱۲: اگر a و b اعداد طبیعی و $b \neq 1$ باشد و باقی مانده ی تقسیم a بر b را r بنامیم، باقی مانده ی تقسیم $-a$ بر $-b$ را بیابید.

حل: طبق فرض مسئله و قضیه ی تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} a &= bq + r, \quad 0 \leq r < b \Rightarrow b - r > 0 \\ -a &= -bq - r \Rightarrow -a = -bq - r + \underline{b - b} \\ &\Rightarrow -a = -b(q+1) + b - r \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم: $r' = b - r$ ، دیدیم که $b - r > 0$ و واضح است که $b - r < |b|$. بنابراین باقی مانده ی تقسیم $-a$ بر $-b$ عدد $(b - r)$ است.

مسئله ۱۳: اگر در یک تقسیم، خارج قسمت را از مقسوم و مقسوم علیه کم کنیم، خارج قسمت تغییر نمی کند و 20 واحد به باقی مانده اضافه می شود. خارج قسمت را بیابید.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{aligned} a &= bq + r, \quad a - q = (b - q)q + r + 20 \\ \Rightarrow a - q &= bq - q^2 + r + 20 \\ a &= bq + r \\ \Rightarrow bq + r - q &= bq - q^2 + r + 20 \\ \Rightarrow -q^2 + q + 20 &= 0 \Rightarrow (q - 5)(q + 4) = 0 \\ \Rightarrow q &= 5 \text{ یا } q = -4 \end{aligned}$$

مسئله ۱۴: چند عدد طبیعی بین 700 و 1100 وجود دارد که اگر آن ها را بر 143 تقسیم کنیم، باقی مانده ی تقسیم و خارج قسمت آن، مساوی باشند؟

حل: اگر عدد مورد نظر را a فرض کنیم، داریم: $700 < a < 1100$ و $a = 143q + r$ و $r = q$. بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} 700 < 143q + q < 1100 &\Rightarrow 700 < 144q < 1100 \\ \Rightarrow 4/86 < q < 7/63 \\ q \in \mathbb{Z} &\Rightarrow 5 \leq q \leq 7 \Rightarrow q = 5 \text{ یا } q = 6 \text{ یا } q = 7 \end{aligned}$$

بنابراین سه عدد طبیعی وجود دارد.

مسئله ۱۵: مجموعه ارقام کوچک ترین عدد طبیعی را بیابید که مضرب 13 و مربع آن نیز بر 315 بخش پذیر باشد.

حل: طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{aligned} n &= 13k, \quad 315 | n^2, \quad 315 = 3^2 \times 5 \times 7 \\ 315 | n^2 &\Rightarrow \frac{n^2}{315} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2}{3^2 \times 5 \times 7} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{169k^2}{3^2 \times 5 \times 7} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$169 \text{ فقط عامل } 13 \text{ دارد} \Rightarrow k_{\min} = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 13 \times 105 = 1365$$

$$\text{مجموع ارقام} = 1 + 3 + 6 + 5 = 15$$

مسئله ۱۶: مجموع سه عدد 71 است. اگر اولی را بر دومی تقسیم کنیم، خارج قسمت 2 و باقی مانده 1 می شود و اگر سومی را بر دومی تقسیم کنیم، خارج قسمت 3 و باقی مانده 4 می شود. این سه عدد را بیابید.

حل: اگر عدد اول را a ، دومی را b و سومی را c فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a + b + c = 71 \\ a = 2b + 1 \\ c = 3b + 4 \end{cases} &\Rightarrow (2b + 1) + b + (3b + 4) = 71 \\ &\Rightarrow 6b = 66 \Rightarrow b = 11 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \times 11 + 1 = 23 \\ c = 3 \times 11 + 4 = 37 \end{cases} \end{aligned}$$