

قضیه‌ی تقسیم (۲)

اشاره

در این قسمت می‌خواهیم با توجه به ویژگی‌ها و خواص رابطه‌ی «عاد کردن» که در قسمت قبل مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفت، نمونه‌هایی از کاربرد آن‌ها را در حل مسائل بخش پذیری مطرح کنیم. بنابراین قبل از مطالعه‌ی این قسمت، یک بار دیگر ویژگی‌های رابطه‌ی عاد کردن را مرور کنید تا آمادگی استفاده از آن‌ها را داشته باشید.

● حمیدرضا امیری

$$۱۶|۲۰k - ۴ \xrightarrow{\text{در } k \text{ ضرب می‌شود}} ۱۶|۲۰k^2 - ۴k \quad (۳)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow ۱۶|۴۵k^2 + ۶k - ۳$$

مسئله‌ی ۴. اگر $ab|c$ ، ثابت کنید: $a|c$ و $b|c$.

حل:

$$ab|c \Rightarrow c = abq \Rightarrow \begin{cases} c = a(\frac{bq}{a}) \Rightarrow a|c \\ c = b(\frac{aq}{b}) \Rightarrow b|c \end{cases}$$

مسئله‌ی ۵. برای مسئله‌ی ۴ حالت کلی را بیان و اثبات کنید و سپس از $a^n|c$ نتیجه بگیرید: $a|c$. اگر: $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n | c$ ، آن‌گاه: $a_1|c$ و $a_2|c$ و $\dots$ و $a_n|c$.

حل: اثبات به روش استقرا روی n :

$$n=1: a_1|c \Rightarrow a_1|c$$

$$n=2: a_1 \times a_2 | c \xrightarrow{\text{مسئله ۴}} a_1|c, a_2|c$$

$$n=k: a_1 \times a_2 \times \dots \times a_k | c \Rightarrow a_1|c, \dots, a_k|c \text{ فرض استقرا}$$

$$n=k+1: a_1 \times \dots \times a_k \times a_{k+1} | c \Rightarrow a_1|c, \dots, a_{k+1}|c \text{ حکم استقرا}$$

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_k \times a_{k+1} | c \Rightarrow (a_1 \times \dots \times a_k) \times a_{k+1} | c \text{ فرض کنیم}$$

$$\Rightarrow (a_1 \times \dots \times a_k) | c, a_{k+1} | c \Rightarrow a_1 | c, \dots, a_k | c, a_{k+1} | c \text{ مسئله ۴}$$

استفاده از فرض استقرا

حال اگر فرض کنیم: $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a$ ، در این صورت داریم:

$$a \times a \times \dots \times a | c \text{ یا } a^n | c \Rightarrow a | c$$

مسئله‌ی ۱. اگر $a|b - a$ ، ثابت کنید: $a|b$ و سپس نشان دهید:

$$a|a^n - b^n$$

حل:

$$a|a - b \text{ :طبق فرض}$$

$$a|a \text{ :می‌دانیم}$$

$$\Rightarrow a|[a - (a - b)] \Rightarrow a|b$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ثابت شد: } a|b \Rightarrow a|b^n \\ \text{می‌دانیم: } a|a \Rightarrow a|a^n \end{array} \right\} \Rightarrow a|a^n - b^n$$

مسئله‌ی ۲. اگر $a - b|a$ ، ثابت کنید: $a - b|b$.

(فکر می‌کنم دقیقاً شبیه مسئله‌ی قبل و به راحتی قابل حل است.)

اقدام کنید!

مسئله‌ی ۳. اگر $۴|۵k - ۱$ ، آن‌گاه ثابت کنید: $۱۶|۴۵k^2 + ۶k - ۳$.

حل: برای رسیدن از رابطه‌ی $۴|x$ به رابطه‌ی $۱۶|y$ ، به دو طریق

می‌توان عمل کرد: یا طرفین را به توان ۲ رساند ($۴^2|x^2$) و یا طرفین

را در ۴ ضرب کرد ($۱۶|۴x$):

$$(۱) \quad ۴|۵k - ۱ \Rightarrow ۱۶|۲۵k^2 - ۱۰k + ۱$$

$$(۲) \quad ۴|۵k - ۱ \Rightarrow ۱۶|۲۰k - ۴$$

حال اگر سمت راست رابطه‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم

و از سمت راست رابطه‌ی حکم کم کنیم، به عبارت ($۲۰k^2 - ۴k$)

می‌رسیم که با ضرب سمت راست رابطه‌ی (۲) در k تأمین می‌شود!

مسئله ۶ برای هر $b > 1$ ثابت کنید: اگر $m|n$ ، آن گاه:
 $(b^m - 1) | (b^n - 1)$

حل:

(۱) $m|n \Rightarrow n = mq$ طبق فرض

از طرف دیگر با توجه به (۱) می دانیم

$$b^n - 1 = b^{mq} - 1 = (b^m)^q - 1 = (b^m - 1)((b^m)^{q-1} + (b^m)^{q-2} + \dots + 1)$$

$$\Rightarrow b^n - 1 = (b^m - 1) \times t \Rightarrow b^m - 1 | b^n - 1$$

مسئله ۷ عکس مسئله ۶ را بیان و ثابت کنید.

برای هر $b > 1$ ثابت کنید: اگر $b^m - 1 | b^n - 1$ ، آن گاه:
 $m|n$

حل: کافی است $(b^n - 1)$ را بر $(b^m - 1)$ تقسیم کنیم و باقی مانده را، مثلاً پس از k مرحله، مساوی با صفر قرار دهیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r} b^n - 1 \\ b^n - b^{n-m} \\ \hline b^{n-m} - 1 \\ b^{n-m} - b^{n-2m} \\ \hline b^{n-2m} - 1 \\ \vdots \\ b^{n-km} - 1 \end{array}$$

$$b^{n-km} - 1 = 0 \Rightarrow b^{n-km} = 1 \xrightarrow{b>1} n - km = 0$$

$$\Rightarrow n = km \Rightarrow m|n$$

(این مسئله از طریق لم اقلیدس نیز قابل حل است که بعداً بیان خواهد شد.)

مسئله ۸ اگر $a|6k+5$ و $a|5k+6$ ، ثابت کنید: $a = \pm 1$.

حل: می دانیم معادل حکم، یعنی $a = \pm 1$ ، آن است که ثابت شود: $a|1$.

$$\left. \begin{array}{l} a|6k+5 \Rightarrow a|30k+25 \\ a|5k+6 \Rightarrow a|30k+24 \end{array} \right\} \Rightarrow a|(30k+25) - (30k+24)$$

$$\Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$

مسئله ۹ چند نقطه با هر دو مختص صحیح، روی منحنی به

$$y = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x+1}$$

حل: اگر بخواهیم $y \in \mathbb{Z}$ باشد، باید صورت کسر بر مخرج بخش پذیر باشد؛ یعنی: $x+1 | 2x^2 - 3x + 4$ (۱)

(۲) $x+1 | 2x^2 + 2x \xrightarrow{\text{در } 2x \text{ ضرب}} x+1 | x+1$ از طرف دیگر

(۳) $x+1 | 5x - 4 \Rightarrow x+1 | (2x^2 + 2x) - (2x^2 - 3x + 4)$

(۴) $x+1 | 5x + 5 \Rightarrow x+1 | 5x + 5$ هم چنین می دانیم

(۵) $x+1 | 9 \Rightarrow x+1 | (5x+5) - (5x-4) \Rightarrow x+1 | 9$

$$\Rightarrow x+1 = \pm 1 \text{ یا } \pm 3 \text{ یا } \pm 9 \Rightarrow x \in \{0, -2, 2, -4, 8, -10\}$$

به ازای هر x با قرار دادن در معادله ی منحنی، یک y در $\mathbb{Z}$ حاصل می شود. در نتیجه روی این منحنی فقط ۶ نقطه با هر دو مختص صحیح وجود دارند.

مسئله ۱۰ اگر $y = \frac{f(x)}{x-a}$ ، ثابت کنید: طول نقاط با مختصات صحیح که روی منحنی به معادله ی مذکور قرار دارند، از رابطه ی $x - a | f(a)$ به دست می آید.

حل: می دانیم، شرط این که $y \in \mathbb{Z}$ باشد آن است که:

$x - a | f(x)$ از طرف دیگر می دانیم، اگر $f(x)$ را بر $(x-a)$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $f(x) = (x-a)q(x) + r$ که: $r = f(a)$.

بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} x - a | (x-a)q(x) + r \\ x - a | (x-a)q(x) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{از هم کم می کنیم}} x - a | r \Rightarrow x - a | f(a)$$

مسئله ۱۱ چند نقطه با هر دو مختص صحیح، روی منحنی

$$y = \frac{2x^2 + 2x^2 + x}{x+2}$$

حل:

مسئله ۱۰

$$y \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{مسئله ۱۰}} x+2 | 2(-2)^2 + 2(-2) + (-2) \Rightarrow x+2 | -10$$

$$\Rightarrow x+2 = \pm 1 \text{ یا } \pm 5 \text{ یا } \pm 10$$

پس ۸ نقطه با مختصات صحیح روی منحنی واقع هستند.

مسئله ۱۲ به ازای چند عدد طبیعی و کمتر از ۵۰ داریم:

$$126 | 5^n + 1$$

یادآوری: می دانیم که $a^n + b^n$ به ازای هر n فرد بر $a+b$ بخش پذیر است و $a^n - b^n$ برای هر n بر $(a-b)$ بخش پذیر خواهد بود. عبارت $a^n - b^n$ نیز به ازای هر n زوج بر $a+b$ بخش پذیر است.



معرفی سایت های ریاضی جهان

• احسان یارمحمدی

اسم سایت: MATH-KAL

آدرس اینترنتی سایت: <http://www.mathkalusa.com>

در بالای صفحه اصلی سایت MATH-KAL عنوان های زیر ملاحظه می شود.

• صفحه اصلی (Home)

• نتایج (Products)

• نمونه نمایشی (Demo)

• سفارشات (Orders)

• عنوان های ریاضی (Math Topics)

• تماس (Contact)

• پرسش های اغلب پاسخ داده شده (FAQ)

• عناوین ریاضی این سایت عبارتند از:

■ ویژگی ها (Features)

• آموزش خصوصی محاوره ای (Interactive Tutorial)

• کتاب درسی الکترونیکی (Electronic Textbook)

• محیط کاوش (Exploration Enviroment)

• مجموعه ابزار کار معلم (Teacher Tool kit)

• تکلیف ساز (Homework Generator)

• آزمون های زمان دار

(On Screen Timed Tests)

■ نتایج (Products)

• جبر ۱ (Algebra 1)

• جبر ۲ (Algebra 2)

• مثلثات و مختصات (Trigonometry & Coordinate)

• هندسه (Geometry)

• مسائل توضیحی و احتمال

(Word Problems & Probability)

ادامه در صفحه ی ۵۰

حل:

$$126|5^n + 1 \Rightarrow 5^2 + 1|5^n + 1 \Rightarrow 5^2 + 1|(5^2)^{\frac{n}{2}} + 1$$

بنابر یادآوری فوق، باید $\frac{n}{2}$ عددی صحیح و فرد باشد تا رابطه ی

اخیر برقرار شود:

$$\frac{n}{2} = k, k = 2t + 1 \Rightarrow \frac{n}{2} = 2t + 1 \Rightarrow n = 4t + 2 \quad 0 \leq t \leq 7$$

$$\Rightarrow n \in \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38\}$$

مسئله ی ۱۳. اگر $a^2 - b^2 | a$ ، ثابت کنید: $a - b | b$.

حل:

$$a^2 - b^2 | a \Rightarrow (a - b)(a + b) | a$$

$$\begin{array}{ccc} \text{مسئله ی ۲} & & \text{مسئله ی ۴} \\ \longrightarrow (a - b) | a & \longrightarrow & a - b | b \end{array}$$

مسئله ی ۱۴. اگر $x - y | 5x + 1$ و $x^2 - y^2 | 5x$ ، ثابت کنید x و

y متوالی اند.

حل:

$$x^2 - y^2 | 5x \Rightarrow (x - y) | 5x, x - y | 5x + 1 \Rightarrow x - y | 1$$

$$\Rightarrow x - y = \pm 1 \Rightarrow x \text{ و } y \text{ متوالی اند}$$

مسئله ی ۱۵. به ازای چند عدد دو رقمی، رابطه ی $33 | 2^n - 1$

برقرار است؟

حل:

$$33 = 2^5 + 1 | 2^n - 1 \Rightarrow 2^5 + 1 | (2^5)^{\frac{n}{5}} - 1$$

می دانیم، عبارت $a^n - b^n$ فقط به ازای n های زوج بر $(a + b)$

بخش پذیر است. پس:

$$\frac{n}{5} = 2k \Rightarrow n = 10k, 10 \leq 10k \leq 99 \Rightarrow 1 \leq k \leq 9$$

یعنی دقیقاً ۹ عدد دو رقمی وجود دارد که در رابطه ی فوق صدق می کند.

مسئله ی ۱۶. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارند، به طوری

که داشته باشیم: $n | 330$ و $15 | n$ ؟

حل: چون $15 | n$ ، پس: $n = 15k$ و باید $330 | 15k$ ، پس:

$$k | 22. \text{ بنابراین: } k \in \{1, 2, 11, 22\} \text{ و } k \in \{15, 30, 165, 330\}$$

یعنی ۴ عدد طبیعی چون n در رابطه های فوق صدق می کند.

در مقاله ی بعدی ان شاء الله به سراغ قضیه ی تقسیم و کاربردهای آن در Z خواهیم رفت و مشاهده خواهید کرد که رابطه ی عاد کردن و ویژگی های آن هم چنان کاربرد دارند و از آن ها استفاده خواهد شد.

ادامه دارد...