

قضیه تقسیم و کاربردهای آن در $\mathbb{Z}$ (۱)

برای دانش آموزان دوره ی پیش دانشگاهی رشته ریاضی

● حمیدرضا امیری

تذکر: رابطه ی بخش پذیری یا عاد کردن روی $\mathbb{N}$ خاصیت پادتقارنی دارد. به عبارت دیگر، اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، در این صورت از $a|b$ و $b|a$ نتیجه می گیریم: $a = b$.
رابطه ی عاد کردن روی $\mathbb{Z}$ دارای ویژگی هایی است که از آن ها تقریباً در همه ی موضوعات مقدماتی (تا آخر بحث هم نهشتی ها و حتی معادلات سیاله) نظریه ی اعداد استفاده خواهیم کرد. لذا یادگیری این ویژگی ها که بعداً به عنوان ابزارهایی برای حل مسائل و پرسش های چهارگزینه ای و اثبات قضیه ها از آن ها بهره می گیریم، بسیار ضروری است.

ویژگی های رابطه ی عاد کردن روی $\mathbb{Z}$

$$۱) a|b \Rightarrow a|-b, -a|b, -a|-b$$

$$\text{اثبات: } a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow -b = -aq = a(-q) = aq' \Rightarrow a|-b$$

(توجه دارید که معادل حکم مسئله، یعنی معادل $a|-b$ ، طبق تعریف $-b = aq'$ است که ما خودمان را به این رابطه رساندیم!)
برای اثبات $-a|b$ باید به رابطه ی $b = -aq'$ برسیم:

$$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b = (-a)(-q) \Rightarrow b = -aq' \Rightarrow -a|b$$

اثبات حکم سوم، یعنی $-a|-b$ به عهده ی شما.

$$۲) a|b \Leftrightarrow ma|mb \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{اثبات: } a|b \Leftrightarrow b = aq \Leftrightarrow mb = maq \Leftrightarrow ma|mb$$

$$۳) a|b \Rightarrow a|\overbrace{mb}^{mb=aq'} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{اثبات: } a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow mb = maq \Rightarrow mb = a(\underbrace{mq}_{q'})$$

$$\Rightarrow mb = aq' \Rightarrow a|mb$$

تذکر: عکس ویژگی (۳) در حالت کلی برقرار نیست و حتی از $a|bc$ در حالت کلی نمی توان نتیجه گرفت که: $a|b$ یا $a|c$.
به عنوان مثال نقض، می دانیم $۶|۳ \times ۴$ ، در صورتی که $۶ \nmid ۳$ و $۶ \nmid ۴$.

$$۴) a|b \Leftrightarrow a^n | b^n \quad (a^n | b^n \Leftrightarrow b^n = a^n q')$$

$$\text{اثبات: } a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \xrightarrow{q^n = q'} b^n = a^n q'$$

یکی از اصلی ترین و پایه ای ترین مباحث در نظریه ی مقدماتی اعداد، قضیه ی تقسیم در $\mathbb{Z}$ و مسائل و کاربردهای آن است. برای ورود به این بحث پیش نیازهای چندانی لازم نداریم و آن چه راه هم که نیاز داریم، بسیار ساده و مقدماتی هستند؛ تعاریف و اصولی هم چون تعریف عضو ابتدا و انتها، کران بالا و پایین و اصولی چون اصل خوش ترتیبی و اصل استقرای ریاضی که همگی در کتاب درسی - ریاضیات گسسته - آورده شده اند.

ابتدا به تعریف رابطه ی «عاد کردن» در $\mathbb{Z}$ و بیان خواص، ویژگی ها و نتایج حاصل از این تعریف و حل مسائلی می پردازیم که گاه در امتحانات و کنکورها نمونه هایی از آن ها آمده است. امیدوارم این بحث و موضوع برای شما جالب و سرگرم کننده باشد. فراموش نکنیم که نظریه ی اعداد از قدیمی ترین شاخه های علم ریاضی است. مسائل و قضیه هایی در این شاخه از ریاضیات وجود دارند که قدمت آن ها به دو تا سه هزار سال پیش برمی گردد و مسائلی وجود دارند که صدها سال است، لاینحل باقی مانده اند و از راه حل آن ها در حد یک حدس یاد می شود!

مسائل نظریه ی اعداد و به خصوص مسائل مربوط به قضیه ی تقسیم، ب م م و ک م م بسیار جالب اند و به شدت حس کنجکاوای انسان را تحریک می کنند. به همین دلیل، حل آن ها بسیار لذت بخش و سرگرم کننده است! بحث را با تعریف رابطه ی عاد کردن و مسائل مربوط به آن آغاز می کنیم.

تعریف: اگر a و b اعداد صحیح باشند و $a \neq 0$ ، در این صورت وقتی b بر a بخش پذیر است، یعنی $b = a \times q$ ($q \in \mathbb{Z}$)، می نویسیم: $a|b$ و می خوانیم: « a عاد می کند b را یا a می شمارد b را».

رابطه ی عاد کردن روی $\mathbb{Z}$ ، $a|b \Leftrightarrow b = aq$ ($q \in \mathbb{Z}$)، از خواص انعکاسی، تقارنی، پادتقارنی و تعدی، دو خاصیت انعکاسی و تعدی را دارد و دو خاصیت دیگر را ندارد؛ زیرا:

$$\text{I) } \forall a \in \mathbb{Z}, a = a \times 1 \Rightarrow a|a \quad (\text{خاصیت انعکاسی دارد})$$

$$\text{II) } ۴|۸, ۸|۴ \Rightarrow \quad (\text{خاصیت تقارنی ندارد})$$

$$\text{III) } ۲|-۲, -۲|۲, ۲ \nmid -۲ \Rightarrow \quad (\text{خاصیت پادتقارنی ندارد})$$

$$\text{IV) } a|b, b|c \Rightarrow b = aq_1, c = bq_2 \Rightarrow c = \overbrace{(aq_1)}^b \times q_2 \Rightarrow c = a(q_1 q_2) \Rightarrow c = aq \Rightarrow a|c \quad (\text{خاصیت تعدی دارد})$$

$$5) a|b, a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

یعنی اگر عددی دو عدد را بشمارد، آن گاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\text{اثبات: } \left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ a|c \Rightarrow c = aq_2 \end{array} \right\} \Rightarrow b \pm c = a(\underbrace{q_1 \pm q_2}_{q'}) \Rightarrow a|b \pm c$$

تذکر: عکس‌ویژگی (۵) در حالت کلی برقرار نیست (۵+۳|۲، ولی ۲|۳ و ۲|۵).

$$6) a|b, c|d \Rightarrow ac|bd$$

$$\text{اثبات: } \left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = aq_1 \\ c|d \Rightarrow d = cq_2 \end{array} \right\} \Rightarrow bd = ac(\underbrace{q_1 q_2}_q) \Rightarrow ac|bd$$

$$7) a|b \xrightarrow{q^{**}} |a| \leq |b|$$

$$\text{اثبات: } a|b \xrightarrow{q^{**}} b = aq \Rightarrow |b| = |aq| \Rightarrow |b| = |a| |q|$$

$$b \neq 0 \Rightarrow q \neq 0 \xrightarrow{|q| \geq 1} |a| |q| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a|$$

$$8) a|b, b|a \Rightarrow a = \pm b$$

$$\text{اثبات: } \left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow |a| \leq |b| \\ b|a \Rightarrow |b| \leq |a| \end{array} \right\} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

$$9) a \in \mathbb{Z} \Rightarrow |a| \quad (\text{هر عدد صحیح بر یک بخش پذیر است})$$

$$\text{اثبات: } a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 1 \times a \Rightarrow 1|a$$

$$10) a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a|0 \quad (\text{صفر بر هر عدد صحیح بخش پذیر است})$$

$$\text{اثبات: } a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 = a \times 0 \Rightarrow a|0$$

$$11) a \in \mathbb{Z}, a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\text{اثبات: } a|1 \xrightarrow{\text{ویژگی ۸}} a = \pm 1$$

(۹) طبق ویژگی

$$12) a|b \xrightarrow{m \leq n} a^m | b^n \rightarrow (b^n = a^m q^1)$$

$$\text{اثبات: } a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b^n = a^n q \xrightarrow{m \leq n} a^m (\underbrace{a^{n-m} q}_{q'})$$

$$\Rightarrow a^m q' \Rightarrow a^m | b^n$$

$$13) a^m | b^n \xrightarrow{m > n} a|b$$

$$\text{اثبات: } a^m | b^n \Rightarrow b^n = a^m q \xrightarrow{m > n} a^n (\underbrace{a^{m-n} q}_{q'})$$

$$\Rightarrow b^n = a^n q' \xrightarrow{\text{ویژگی ۴}} a^n | b^n$$

کاربرد این ویژگی‌ها را در حل مسائل بسیار جالب و گاه پیچیده بخش پذیری، در مقاله‌ی بعدی مشاهده خواهید کرد.
ادامه دارد...

$$\Rightarrow a^n | b^n$$

برای اثبات طرف دوم رابطه‌ی دو شرطی (۴) به دو تذکر زیر دقت کنید:

تذکر ۱: اگر a عددی گویا باشد، حتماً باید به شکل $a = \frac{m}{n}$ باشد که: $m, n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq 0$. و اگر عددی صحیح نباشد، دو حالت امکان پذیر است: یا آن عدد گویا و غیر صحیح است که باید به شکل $\frac{m}{n}$ باشد و یا آن عدد گنگ است.

تذکر ۲: اگر $a \neq 0$ عددی صحیح (و در حالت کلی تر اگر a عددی گویا) و b عددی گنگ باشد، در این صورت: $(ab) \in \mathbb{Q}'$ (حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ همواره گنگ است).

اثبات از راه برهان خلف

$$a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}', a \neq 0 \Rightarrow (ab) \in \mathbb{Q}$$

اگر فرض کنیم: $ab = c$ و $c \in \mathbb{Q}$ ، در این صورت خواهیم

داشت: $b = \frac{c}{a}$ و می‌دانیم $\frac{c}{a}$ ، یعنی تقسیم عدد گویای c بر عدد گویا و ناصفر a ، همواره عددی گویاست و با گنگ بودن b تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است؛ یعنی: $ab \in \mathbb{Q}'$.

اثبات طرف دوم ویژگی (۴):

$$a^n | b^n \Rightarrow b^n = a^n q (q \in \mathbb{Z}) \Rightarrow b = a \times \sqrt[n]{q}$$

اگر ثابت کنیم $\sqrt[n]{q}$ عددی صحیح است، می‌توانیم آن را q' فرض کنیم و $b = aq'$ ، یعنی $a|b$ همان حکم مسئله است. برای اثبات این که: $\sqrt[n]{q} \in \mathbb{Z}$ از برهان خلف کمک می‌گیریم. فرض کنیم: $\sqrt[n]{q} \notin \mathbb{Z}$. پس طبق تذکر (۱) یا گویا و غیر صحیح و یا

گنگ است که چون داریم: $\sqrt[n]{q}, q \in \mathbb{Z}$ نمی‌تواند به صورت $\frac{m_1}{n_1}$

باشد و لذا $\sqrt[n]{q}$ گویا نیست (اگر $\sqrt[n]{q} = \frac{m_1}{n_1}$ باشد، در این صورت

داریم: $q = \frac{m_1^n}{n_1^n}$ که با صحیح بودن q تناقض دارد). پس:

$$\sqrt[n]{q} \notin \mathbb{Q} \text{ و در نتیجه: } \sqrt[n]{q} \in \mathbb{Q}'$$

و بنابر تذکر ۲، چون: $b = a \times \sqrt[n]{q}$ و $a \neq 0$ ، لذا باید فرض خلف ما، یعنی $\sqrt[n]{q} \notin \mathbb{Z}$ باطل است و باید داشته باشیم: $\sqrt[n]{q} \in \mathbb{Z}$ که این نشان می‌دهد، می‌توان فرض کرد: $\sqrt[n]{q} = q'$. پس داریم:

$$a^n | b^n \Rightarrow b^n = a^n q (q \in \mathbb{Z}) \Rightarrow b = a \sqrt[n]{q} \Rightarrow b = aq' \Rightarrow a|b$$