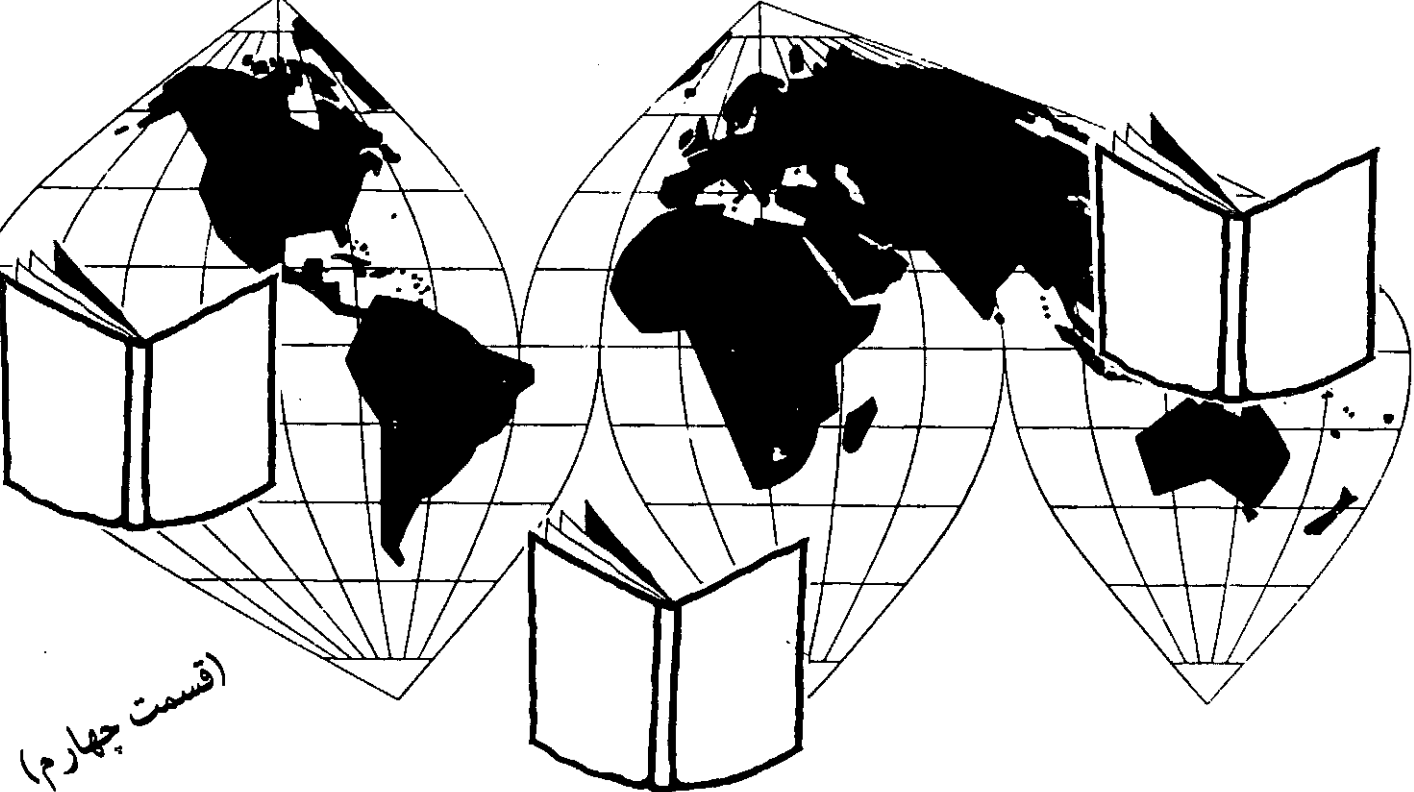




(قسمت چهارم)

مقاله‌های کوتاه از مجله‌های ریاضی معتبر جهان (۲۲)

قضیه‌های «سوا»، «مینلئوس» و اصل سطح

• ترجمه: غلامرضا یاسی پور

۴. تعمیم‌های قضیه هوان

در این بخش، قضایایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که با قضیه‌های بخش پیشین در این ویژگی مشابهند، که به ازای هر n ضلعی، حاصل ضرب n نسبت طولهای قطعه خطها دارای مقداری ثابت، یعنی $+1$ یا -1 است. اما در این جا، حالتی را بررسی می‌کنیم که، چون در مورد قضیه هوان، قطعه خطها بر یک خط واقع شوند؛ اما نباشند. در این صورت، دو نقطه W_i ، Z_i را بر یالها یا قطرهای $[V_i, V_j]$ از یک n ضلعی مشخص و حاصل ضربهای به صورت زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$\prod_{i=1}^n \left[\frac{V_i W_i}{Z_i V_j} \right]$$

قضیه ۴ (قضیه اول هوان برای n ضلعیها)

فرض می‌کنیم $P = [V_1, \dots, V_n]$ یک n ضلعی مفروض و z عددی صحیح چنان باشد که به ازای هر i ، اعداد صحیح $i+j$ ، $i+2j$ ، $i+3j$ ، $i+4j$ (به پیمانه n) متمایز باشند. W_i را (به ازای $i=1, \dots, n$) نقطه تقاطع $V_i V_{i+2j}$ و $V_i V_{i+3j}$ قرار

تعریف می‌کنیم. در این صورت، نقطه‌های W_i و W_{i+j} بر خط $V_i V_{i+2j}$ واقع می‌شوند و

$$\prod_{i=1}^n \left[\frac{V_{i+j} W_i}{W_{i+j} V_{i+3j}} \right] = 1 \quad (9)$$

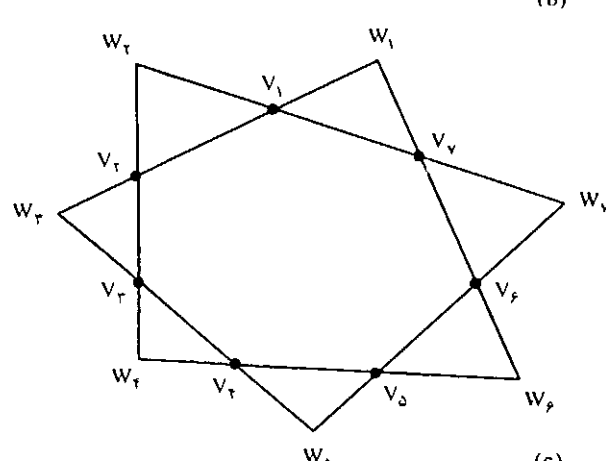
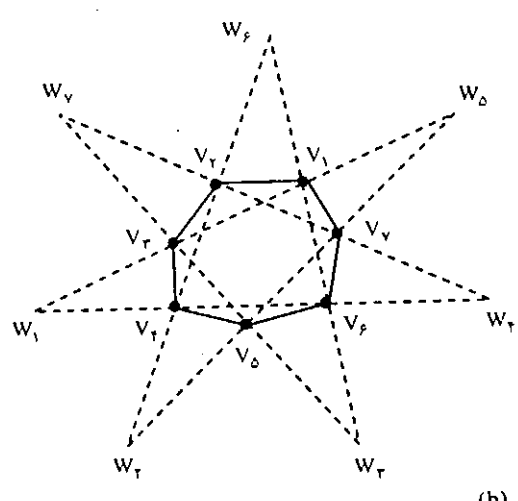
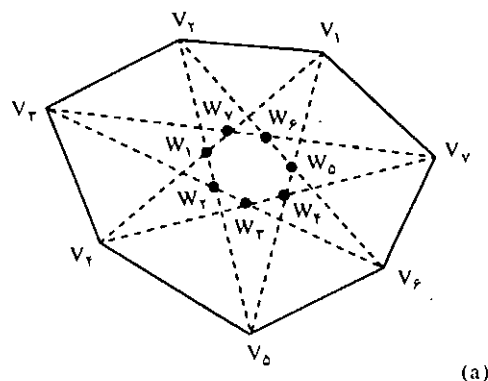
باید توجه داشت که اگر V_i ، V_{i+j} ، V_{i+2j} ، V_{i+3j} نقاطی متمایز نباشند، در این صورت، اتحاد مورد بحث بی‌معنا یا بدیهی خواهد شد. گذشته از این، تنها ضروری است که حالتیهای $[1, 2, \dots, (n-1)/2]$ در نظر گرفته شوند؛ زیرا مقادیر دیگر z به تکرار همین نتایج منجر می‌شوند.

شکل (۱۰) قضیه را به ازای $n=7$ ، $z=1, 2, 3$ نشان می‌دهد. گزاره اولیه (۳) از قضیه هوان (شکل (۴) را ملاحظه کنید) متناظر با حالت $n=5$ ، $z=1$ است.

اثبات: در مورد اولین اظهار، توجه می‌کنیم که W_i تقاطع $V_i V_{i+2j}$ و $V_i V_{i+3j}$ و W_{i+j} تقاطع $V_{i+j} V_{i+3j}$ و $V_{i+j} V_{i+4j}$ است. در نتیجه چنانچه گفته شد، هر دوی این نقاط بر $V_{i+j} V_{i+3j}$ قرار دارند.

۵. توضیحات و تفسیرها

قضیه مورد نظر را در شکل (۱۱) به ازای $n=7$ و :
 $(j,k) = (1,3), (3,2), (5,1)$ مشخص کرده ایم. گزاره اولیه (۴)
 از قضیه هوائن متناظر با حالت $k=2, j=1, n=5$ است.



شکل (۱۱). قضیه دوم هوائن در مورد n ضلعیه به ازای $n=7$
 و (a) $k=3, j=1$ ؛ (b) $k=2, j=3$ ؛ و (c) $k=1, j=5$.
 در هر حالت، حاصل ضرب هفت نسبت $[V_i W_i / W_{i+2k} V_{i+k}]$
 (به ازای $i=1, \dots, 7$) مقدار ۱ را اختیار می کند.

قضیه «مِثلاَنوس» در مورد n ضلعیه، قضیه جدیدی نیست.
 از اوایل قرن نوزدهم شناخته شده است، مراجع [۲, P.۲۹۵]،
 [۶, P.۷۵]، [۷, P.۶۳]، [۹, P.۷۵] را ملاحظه کنید. و
 همان طور که در بالا متذکر شدیم، حالت های خاصی از قضیه سوا
 در مورد n ضلعیه نیز مشخص شده بوده است؛ به عنوان مثال،
 مراجع [۶, P.۸۶]، [۷, P.۶۴] را ملاحظه کنید.

جالب ترین و غیر منتظره ترین نتایج این مقاله، این است که
 حاصل ضرب های گوناگون یال - نسبت ها و قطر نسبت ها برابر ۱+ با
 ۱- اند، نیست؛ بلکه این است که مقادیر این حاصل ضرب ها مستقل
 از چند ضلعی P اند که کارمان را با آن آغاز کردیم (البته با توجه
 به شرایط بیان شده در آغاز بخش ۳). در این صورت، با توجه به
 این موضوع، ممکن است شخص تصور کند جمیع
 حاصل ضرب های n نسبت در یک n ضلعی دارای همین ویژگی
 است؛ در حالی که چنین نیست. به عنوان مثال، در شکل (۴)،
 مقدار

$$\prod_{i=1}^5 \left[\frac{W_i W_{i+1}}{V_i V_{i+2}} \right] \quad (11)$$

به پنج ضلعی P انتخاب شده وابسته است؛ به رغم این
 واقعیت که یک چنین حاصل ضربی، در وهله اول، بسیار شبیه
 حاصل ضرب هایی به نظر می رسد که در گزاره اولیه قضیه هوائن
 رخ می دهند. این موضوع را که (۱۱) ثابت نیست، می توان با
 آزمایش مختصری با مثال های عددی نشان داد. در واقع، گمان
 می کنیم حاصل ضرب (۱۱) بیشترین مقدار خود را زمانی به دست
 می آورد که $P = [v_1, \dots, v_5]$ نگاره «آفینی» از یک پنج ضلعی
 منتظم باشد. اثبات این گزاره را در دست نداریم و بررسی و بحث
 مسائلی از این قبیل نیز در این جا مناسب به نظر نمی رسد.

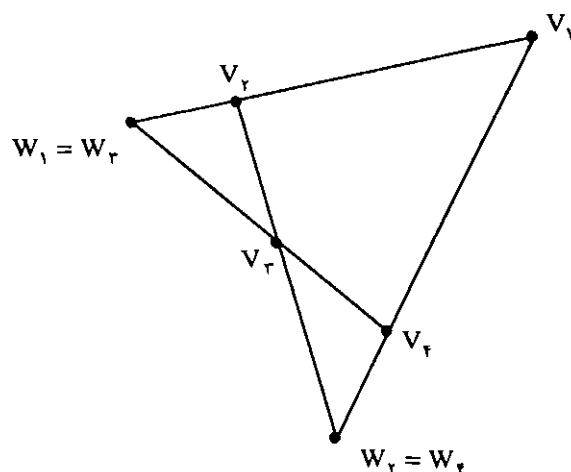
ملاحظه این موضوع مشکل نیست که قضایای ۴ و ۵ شامل
 تمام حالت های مذکور در مقدمه بخش (۴) اند؛ یعنی حالت هایی که
 در آنها حاصل ضرب n عامل، مقدار ثابتی را اختیار می کند که به
 انتخاب چندضلعی اولیه P وابسته نیست. اگر تحقیقاتمان به بررسی
 حاصل ضرب های $2n, 3n, 4n, \dots$ عامل (که هر یک از آنها
 خارج قسمت طول های قطعه خط های واقع در یک n ضلعی است)
 تعمیم دهیم، آن گاه امکانات بسیار دیگری به وجود می آیند. البته
 خواننده، خود می تواند به بررسی این حالت ها بپردازد، اما نتایج
 بیان شده در این جا و قدرت اصل سطح را در اثبات نتایجی از

n ضلعی قضایای سوا و منلائوس شناخته شده‌اند و می‌توان آنها را در کتابهای مزبور یافت. اما تاکنون نتوانسته‌ایم نتیجه‌ای بیابیم که بتوان آن را حتی به صورت حالت خاصی از قضیه «خود تراگردی مان» (Selftrans versality Theorem) تعبیر کرد. ملاحظه کردیم که «اصل سطح» روشی ساده در اثبات (به مفهوم سنتی) جمیع نتایجی است که به تجربه کشف شده‌اند. گذشته از این، اصل مزبور، علاوه بر این که توانایی بیان قضایای مربوط به n ضلعیها را با n دلخواه به دست می‌دهد، امکانهای دیگری را نیز مطرح می‌نماید و علاوه بر این، به تعمیمهای با بعدهای بالاتری منجر می‌شود که در جای دیگر مطرح‌شان خواهیم کرد.

تبصره: پس از تکمیل دستنوشته مقاله از بابتیست Baptist [۱، P. ۶۱]، دریافتیم که «اصل سطح» - البته بدون ذکر هیچ گونه نام خاصی - در اثبات سریل «Crelle» از قضیه سوا [۵] به کار رفته، اما به فایده عمومی آن توجه نشده و این اصل، با تمام فواید عملی‌اش، به طور کامل در بوتۀ فراموشی سپرده شده است.

این قبیل نشان می‌دهند.

حالت $n=4$ ، $j=2$ و $k=1$ قضیه (۵) شایسته تذکری خاص است. این حالت را در شکل (۱۲) نشان داده‌ایم و آشکار است که می‌توان آن را به عنوان بیان‌کننده این موضوع تعبیر کرد که حاصل ضرب نسبتهای معینی از طولهای واقع در یک چهارضلعی کامل برابر است. گرچه چند ضلعیهای کامل، طی دو قرن، به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته‌اند، نتوانستیم هیچ گونه ذکری از این نتیجه خاص درباره آنها بیابیم.



شکل (۱۲). حالت $n=4$ ، $j=2$ ، $k=1$ از قضیه دوم هوائن. حاصل ضرب چهار نسبت $[V_i W_i / W_{i+2} V_{i+1}]$ (به ازای $i=1, 2, 3, 4$) برابر ۱ است.

با توجه به این که جمیع قضیه‌های این مقاله، بسیار ساده و اثباتهای آنها بسیار مقدماتی‌اند، ممکن است شگفت‌آور به نظر برسد که این قضیه‌ها چرا دو یا سه قرن پیش کشف نشده‌اند. این موضوع را می‌توان از لحاظی با این واقعیت توضیح داد که مؤلفان پیشین، برخلاف ما، از امتیاز روشهای جدید برخوردار نبوده‌اند. البته، زمانی که ما بررسیمان را آغاز کردیم، از قضیه‌های «سوا» و «منلائوس» در مورد مثلثات آگاه بودیم؛ اما این قضیه «هوائن» بود که نشان داد ممکن است بررسی حاصل ضربهای نسبتهای دیگر در n ضلعیهای با $n > 3$ مفید باشد. با استفاده از برنامه‌ای ساده در نرم افزار ممتیکا «Mathematica» توانستیم مقادیر حاصل ضربهای دوری نسبتهای گوناگون را در مورد تعداد بسیاری از n ضلعیها با صحت محاسبه کنیم و نتایج حاصله قضایای ۱ تا ۵ مان را مطرح کنیم. (بعدها کشف کردیم که صورتهای

اعداد جالب ریاضی

$$(103)^2 = 10609$$

$$(301)^2 = 90601$$

$$(112)^2 = 12544$$

$$(211)^2 = 44521$$

$$(13)^2 = 169$$

$$(14)^2 = 196$$

$$(113)^2 = 12769$$

$$(311)^2 = 96721$$

$$(122)^2 = 14884$$

$$(221)^2 = 48841$$

$$(157)^2 = 24649$$

$$(158)^2 = 24964$$

$$(913)^2 = 833569$$

$$(914)^2 = 835396$$

$$1^2 + 5^2 + 3^2 = 153$$

$$3^2 + 7^2 + 0^2 = 370$$

$$3^2 + 7^2 + 1^2 = 371$$

$$4^2 + 0^2 + 7^2 = 407$$

ترجمه: صمد پوراسدا...