



مقاله‌های کوتاه از مجله‌های معتبر جهان (۲۱)

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

قضایای سِوا، منلائوس و اصل سطح (قسمت سوم)

قضیه ۲ (قضیه سِوا در n ضلعیها). فرض می‌کنیم $P = [V_1, \dots, V_n]$ یک n ضلعی دلخواه، C نقطه‌ای معلوم، و k عدد صحیح و مثبتی چنان باشد که $1 \leq k < n/2$. به ازای $i = 1, \dots, n$ فرض می‌کنیم W_i تقاطع خطوط CV_i و $V_{i-k}V_{i+k}$ باشد، آنگاه،

$$\prod_{i=1}^n \left[\frac{V_{i-k}W_i}{W_iV_{i+k}} \right] = 1 \quad (V)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه با قطر - نسبت‌ها، جز در حالتی که n فرد و $k = (n-1)/2$ ، ارتباط دارد. مورد اخیر، تنها تعمیمی از قضیه سِواست که توانسته‌ایم در کتابهای مربوطه بیابیم. اما، نتیجه قضیه ۲، به اندازه‌ای که در وهله نخست ملاحظه می‌شود عمومی نیست.

اثبات. اثبات این قضیه از مراحل مشابه مراحل قضیه ۱ تبعیت می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که با به کار بردن اصل سطح در مثلثهای با قاعده $[C, V_i]$ ، به ازای $i = 1, \dots, n$ ، به دست می‌آوریم.

$$\left[\frac{V_{i-k}W_i}{W_iV_{i+k}} \right] = \left[\frac{CV_iV_{i-k}}{CV_{i+k}V_i} \right]$$

با قرار دادن این جملات در سمت چپ (۶)، حاصل ضرب n جمله را حاصل می‌کنیم که هر یک از آنها خارج قسمت سطوحهای مثلثهای مربوطه است. این جمله‌ها، چنان که مطلوب است، مقدار ۱ را به دست می‌دهند.

اگر n و k دارای بزرگترین عامل مشترک $d > 1$ باشد آنگاه حاصل ضرب سمت چپ (۷) می‌تواند به d حاصل ضرب، هر یک با n/d عامل، تجزیه شود، و هر یک از این عاملها دارای مقدار ۱ باشد. اگر n و k نسبت به هم اول باشند، آنگاه می‌توان (با شماره‌گذاری مجدد رأسها چون در حالت قضیه منلائوس) سمت چپ (۷) را به حاصل ضرب n یال - نسبت، در یک

توجه داشته باشید که این نتیجه با قطر - نسبت‌ها، جز در حالتی که n فرد و $k = (n-1)/2$ ، ارتباط دارد. مورد اخیر، تنها تعمیمی از قضیه سِواست که توانسته‌ایم در کتابهای مربوطه بیابیم. اما، نتیجه قضیه ۲، به اندازه‌ای که در وهله نخست ملاحظه می‌شود عمومی نیست.

اگر n و k دارای بزرگترین عامل مشترک $d > 1$ باشد آنگاه حاصل ضرب سمت چپ (۷) می‌تواند به d حاصل ضرب، هر یک با n/d عامل، تجزیه شود، و هر یک از این عاملها دارای مقدار ۱ باشد. اگر n و k نسبت به هم اول باشند، آنگاه می‌توان (با شماره‌گذاری مجدد رأسها چون در حالت قضیه منلائوس) سمت چپ (۷) را به حاصل ضرب n یال - نسبت، در یک

در هر یک از فضایی فوق W_i را به صورت تقاطع یک ضلع یا یک قطر (پایه «basis») با خط CD (قاطع متناظر) تعریف می‌کنیم. قضیهٔ متلاوس متناظر با حالتی است که در آن C و D نقاط ثابتی، که رأس نیستند، می‌باشند، بنابراین قاطع CD در مورد تمام قاعده‌ها خطی ثابت است. در قضیهٔ سوا، C نقطه‌ای ثابت و D رأس V_i ای از چند ضلعی P است. در این صورت W_i نقطهٔ تقاطع قاعدهٔ $V_{i-k}V_{i+k}$ با قاطع CV_i است. این ملاحظه‌ها این را مطرح می‌کنند که، زمانی که قاطع مورد بحث توسط دو رأس P مشخص شده باشد، می‌تواند نتایجی مشابه در مورد یال - نسبت‌ها یا قطر - نسبت‌ها موجود شود. در واقع، قضیه زیر را خواهیم داشت که به صورتی جدید ظاهر شده است:

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ خود قاطع بودن). فرض می‌کنیم s, r, j اعدادی صحیح و متمایز به پیمانهٔ n باشند و W_i نقطهٔ تقاطع قاعده (ضلع یا قطر) از V_iV_{i+j} از n ضلعی $P = \{V_1, \dots, V_n\}$ با قاطع $V_{i+r}V_{i+s}$ باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای

$$\prod_{i=1}^n \left[\frac{V_i W_i}{W_i V_{i+j}} \right] = (-1)^n \quad (\Lambda)$$

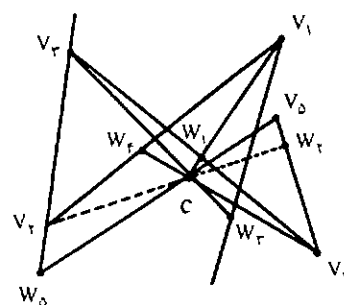
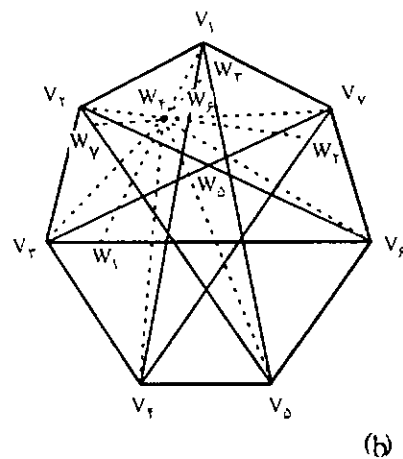
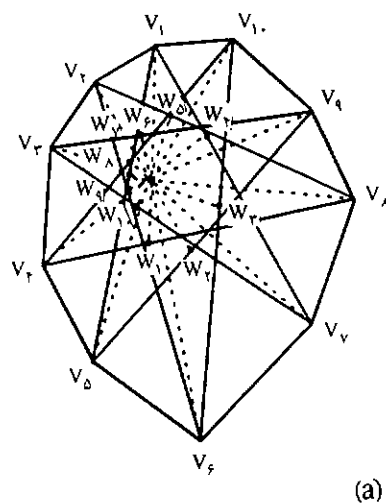
این است که یا (i) $n = 2m$ زوج باشد، $s \equiv r+m$ و $j \equiv m$ یا (ii) $n \equiv 2r$ و $s \equiv 3r$ و $j \equiv 3r$ یا (iii) $n \equiv 3s$ و $j \equiv 3s$ تمام هم‌نهشتیها به پیمانهٔ n اند.

در حالت (i) جملات واقع در (۸) دوبره‌دو حذف می‌شوند و در نتیجه صورت قضیه بدیهی می‌شود. حالت‌های (ii) و (iii) در اصل یکسان‌اند، زیرا s و r در تعیین قاطع $V_{i+r}V_{i+s}$ نقشی متقارن ایفا می‌کنند و بنابراین می‌توانند با هم تعویض شوند. به‌عنوان مثال، در شکل (a) $\Lambda(a)$ ، $n=5$ ، $r=3$ ، $j=2$ ، $s=5$ ، و در شکل (b) $\Lambda(b)$ ، $s=4$ ، $r=3$ ، $j=1$ ، $n=7$ ، بنابراین هر یک از آنها مثالی از حالت (iii) اند.

از آنجا که n فرد است، علامت سمت راست (۸) منفی است. اثبات. با استفاده از اصل سطح در مورد مثلث‌های به قاعدهٔ $[V_{i+r}, V_{i+s}]$ و رأس‌های V_i و V_{i+j} ، به‌دست می‌آوریم.

$$\left[\frac{V_i W_i}{W_i V_{i+j}} \right] = - \left[\frac{V_i V_{i+r} V_{i+s}}{V_{i+j} V_{i+r} V_{i+s}} \right] \quad (\Lambda a)$$

عبارات فوق را به جای هر یک از n عامل واقع در سمت



شکل ۷. مثال‌های قضیهٔ سوا در n ضلعیها در حالات (a) $n=10$ ، (b) $k=2$ ، $n=7$ ؛ (c) $k=2$ ، $n=5$. در حالت‌های (a) و (b) قضیه، به ترتیب، اظهاراتی دربارهٔ قطر - نسبت‌های $[V_i W_{i+2}/W_{i+2} V_{i+4}]$ و $[V_i W_{i+2}/W_{i+2} V_{i+6}]$ می‌گوید، و در (c) اظهاری دربارهٔ یال - نسبت‌های $[V_i W_{i+3}/W_{i+3} V_{i+1}]$ می‌کند.

منجر به جمله $(-1)^n$ در سمت راست (۸) می‌شود. به این ترتیب قضیه به اثبات می‌رسد.

در مورد قاعده‌ای معلوم، تعیین قاطعهای نظیری که قضیه به ازای آنها برقرار است، جالب است.

در این مورد، حالت (ii) را بررسی می‌کنیم. با نوشتن $t+j$ به جای r و $-u$ به جای s ، به سادگی محقق می‌شود که شرط داده شده هم‌ارز است با

$$u \equiv t, \quad 2j+3t \equiv 0 \pmod{n}$$

این دستگاه را می‌توان به‌طور صریح برای یافتن t برحسب j به‌طریق زیر حل کرد (و بنابراین r و s را به‌دست آورد):

$$(ii_a) \quad t \equiv 2kj, \quad \text{اگر } n \equiv 3k+1, \text{ آنگاه}$$

$$j=1, 2, \dots, [(n-1)/2]$$

$$(ii_b) \quad t \equiv (k-1)j, \quad \text{اگر } n \equiv 3k-1, \text{ آنگاه}$$

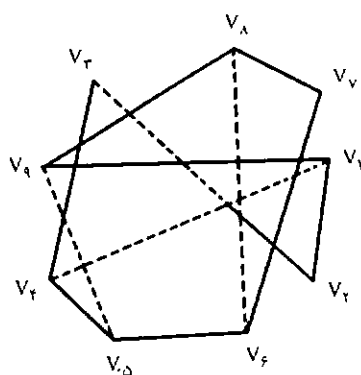
$$j=1, 2, \dots, [(n-1)/2]$$

$$(ii_c) \quad \text{اگر } n \equiv 3k, \text{ آنگاه } j \equiv 3i \text{ و}$$

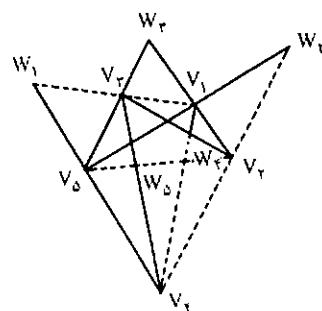
$$t \equiv -2i, \quad k-2i \text{ یا } 2k-2i$$

$$i=1, 2, \dots, [(k-1)/2] \text{ به‌ازای}$$

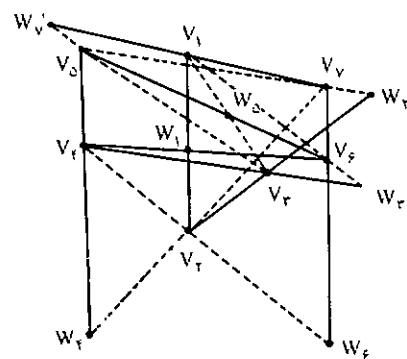
به‌عنوان مثال، در شکل ۹ حالت $n=9$ ، $k=3$ و $i=1$ را نشان خواهیم داد. قاطعهای V_5V_9 و V_6V_8 ، V_7V_3 را با خط - نقطه و قاعده (پایه) V_1V_4 را با خط چین مشخص کرده‌ایم. تمام آنها شرایط قضیه را برقرار می‌کنند. (هشت قاعده (پایه) دیگری را که در (۸) رخ می‌دهند نشان نداده‌ایم، زیرا مشخص کردن آنها شکل را چنان پیچیده می‌کند که نامفهوم می‌شود.)



شکل ۹. سه قاطع V_5V_9 ، V_6V_8 ، V_7V_3 از پایه V_1V_4 که شرطهای قضیه خود قاطع بودن را به‌ازای $n=9$ برقرار می‌کنند.



(a)



(b)

شکل ۸. مثالهایی از قضیه خود قاطع بودن، به‌ازای (a) $n=5$ ، $s=4$ ، $r=3$ ، $j=2$ ؛ و (b) $s=5$ ، $r=3$ ، $j=1$ ، $n=7$. هر حالت، قضیه نشان می‌دهد که حاصل ضرب n نسبت $[V_iW_i/W_iV_{i+j}]$ (که در آن $i=1, \dots, n$) برابر -1 است.

چپ (۸) قرار می‌دهیم و زمانی را که دقیقاً مثلثهایی یکسان در صورت و مخرج رخ می‌دهند مشخص می‌نماییم و بنابراین مساحت‌های آنها را (که برحسب دترمینانها بیان شده‌اند) حذف می‌کنیم تا چنان‌که مطلوب است، اندازه ± 1 به‌دست آید. ولی جمله $V_i V_{i+r} V_{i+s}$ واقع در صورت با جمله $V_{(i+h)+j} V_{(i+h)+r} V_{(i+h)+s}$ واقع در مخرج حذف می‌شود، اگر و تنها اگر، یا

$$(i) \quad h \equiv -j, \quad r \equiv s-j, \quad s \equiv r-j \text{ یا}$$

$$(ii) \quad h \equiv -r, \quad r \equiv s-r, \quad s \equiv j-r \text{ یا}$$

$$(iii) \quad h \equiv -s, \quad s \equiv r-s, \quad r \equiv j-s$$

سه شق فوق، نظیر سه حالتی هستند که در صورت قضیه داده شده‌اند. توجه داشته باشید که هر حذف، عامل -1 را در حالت (i) و عامل $+1$ را در دو حالت دیگر به دست می‌دهد که